

## La funzione di risposta armonica

- Se ad un sistema lineare stazionario *asintoticamente stabile* si applica in ingresso un segnale sinusoidale  $x(t) = X \sin \omega t$  di pulsazione  $\omega$ :

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) = X \sin \omega t & \xrightarrow{\quad} & \boxed{F(\omega)} \xrightarrow{\quad} y(t) \simeq Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\
 X(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} & & Y(s) = G(s)X(s)
 \end{array}$$

esaurito il transitorio, si ottiene che l'uscita è anch'essa di tipo sinusoidale con la stessa pulsazione  $\omega$ :

$$y(t) = Y(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)]$$

- L'ampiezza  $Y(\omega)$  dell'uscita e lo sfasamento  $\varphi(\omega)$  rispetto all'ingresso sono in generale funzioni della pulsazione  $\omega$ .
- Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione complessa  $F(\omega)$  di variabile reale  $\omega$  definita come segue:

$$F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)]$$

- Essa descrive il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio  $0 \leq \omega < \infty$ . In virtù della linearità del sistema, la funzione  $F(\omega)$  è indipendente da  $X$ .
- **Teorema.** *Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento  $G(s)$  razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione. La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è legata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  dalla relazione:*

$$F(\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

- **Dim.** La trasformata di Laplace del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione:

$$Y(s) = G(s) X(s) = G(s) \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

I poli della funzione  $Y(s)$  sono gli stessi della funzione di trasferimento  $G(s)$  più quelli corrispondenti al segnale di ingresso che sono  $p_{1,2} = \pm j\omega$ .

- Nell'antitrasformata della  $Y(s)$  è presente un termine transitorio  $y_0(t)$ , dovuto ai poli di  $G(s)$ , e un termine permanente  $y_p(t)$  di tipo sinusoidale:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + M_1 \cos[\omega t + \varphi_1]$$

I parametri  $M_1$  e  $\varphi_1$  sono funzioni dei residui  $K_{1,2}$  dei poli  $p_{1,2}$ :

$$K_1 = G(s) \frac{X \omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega) \quad K_2 = K_1^*$$

- Ricordando che il sistema è asintoticamente stabile e che

$$M_1 = |K_1| = X |G(j\omega)|, \quad \varphi_1 = \arg(K_1) = \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}$$

per  $t$  sufficientemente elevato si ha che:

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq y_p(t) = X |G(j\omega)| \cos[\omega t + \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}] \\ &= \underbrace{X |G(j\omega)|}_{Y(\omega)} \sin \left[ \omega t + \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\varphi(\omega)} \right] \end{aligned}$$

- La funzione di risposta armonica può essere definita anche per sistemi instabili, ma in questo caso non è misurabile sperimentalmente.
- *La risposta all'impulso  $g(t)$  di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica  $F(\omega)$ :*

$$g(t) \longleftrightarrow G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = F(\omega)$$

- *La risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso  $g(t)$ :*

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} G(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(j\omega)}_{F(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

## Legami tra risposta armonica e risposta all'impulso

- Le relazioni così ottenute

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

definiscono la *trasformata* e l'*antitrasformata di Fourier* rispettivamente delle funzioni  $g(t)$  e  $G(j\omega)$ .

- La funzione  $G(j\omega)$  è complessa: indicandone con  $R(\omega)$  e  $I(\omega)$  le parti reale e immaginaria, si può scrivere

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t dt$$

$$I(\omega) = - \int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt$$

cioè il calcolo di  $G(j\omega)$  si può ricondurre a quello di due integrali reali.

- Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$$

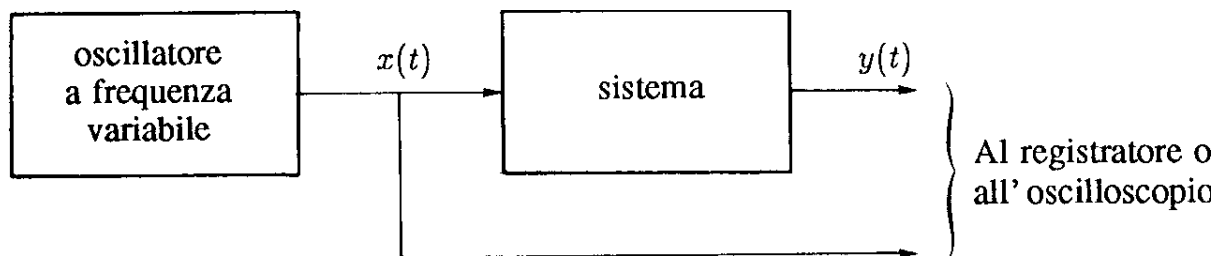
e

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) \sin \omega t d\omega$$

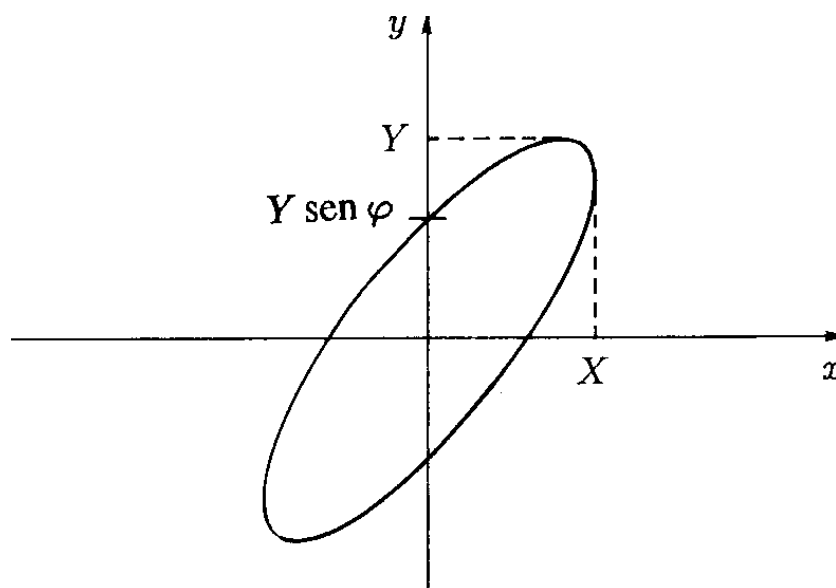
cioè è possibile calcolare la risposta impulsiva  $g(t)$  eseguendo integrali di funzioni reali, in cui è coinvolta la sola parte reale o la sola parte immaginaria della funzione  $G(j\omega)$ .

### Rilevazione della funzione di risposta armonica

- Per la determinazione sperimentale della funzione di risposta armonica è necessario un oscillatore sinusoidale a frequenza variabile e un oscilloscopio.



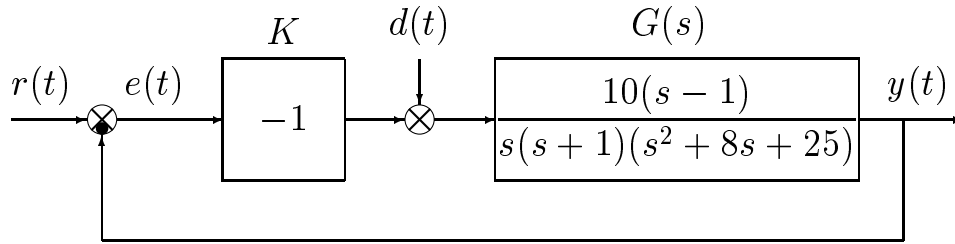
- L'ampiezza  $Y$  e la fase  $\varphi$  dell'uscita rispetto all'ingresso si possono determinare dall'analisi della figura di Lissajous ottenuta inviando ai due assi dell'oscilloscopio rispettivamente il segnale di ingresso e quello di uscita:



- Funzione di risposta armonica:

$$F(\omega) = \frac{Y}{X} e^{j\varphi}$$

- *Esempio.* Facendo riferimento al seguente sistema:



determinare l'errore a regime  $e_\infty(t)$  che si ha quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante  $d(t) = 2$  ed il riferimento sinusoidale  $r(t) = 3 + \cos t$ .

- In questo caso si applica il principio di sovrapposizione degli effetti: l'errore  $E(s)$  è dato dalla somma dei contributi derivanti dall'ingresso  $R(s)$  e dal disturbo  $D(s)$ :

$$E(s) = G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) = \frac{-G(s)}{1 + K G(s)}D(s) + \frac{1}{1 + K G(s)}R(s)$$

Sostituendo si ottiene ( $K = -1$ ):

$$E(s) = \underbrace{\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}}_{G_d(s)} D(s) + \underbrace{\frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}}_{G_r(s)} R(s)$$

I contributi sull'errore a regime derivanti dalle componenti “costanti” del disturbo e del riferimento ( $d_0 = 2$  e  $r_0 = 3$ ) si determinano “a regime” per  $s = 0$  (cioè per  $\omega = 0$  nelle corrispondenti funzioni di risposta armonica):

$$e_0 = \left. \frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)} \right|_{s=0} d_0 + \left. \frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)} \right|_{s=0} r_0 = 2$$

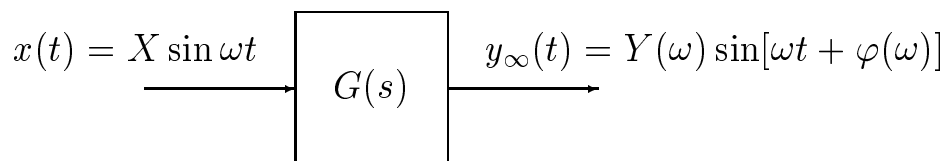
La componente sinusoidale del riferimento induce, a regime, una componente sinusoidale  $e_\omega(t)$  anche sul segnale errore  $e(t)$ . La componente  $e_\omega(t)$  si determina facilmente calcolando il valore della funzione di risposta armonica della funzione  $G_r(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$ :

$$G_r(j) = \left. \frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)} \right|_{s=j} = 1.569e^{-j0.1974} = 1.569 \angle -11.31^\circ$$

L'errore a regime  $e_\infty(t)$  è quindi il seguente:

$$e_\infty(t) = e_0 + |G_r(j)| \cos(t + \text{Arg}[G_r(j)]) = 2 + 1.569 \cos(t - 0.1974)$$

- **Nota:** il concetto di funzione di risposta armonica deve essere utilizzato tutte le volte che si vuol calcolare la risposta a regime di un sistema lineare asintoticamente stabile quando in ingresso è presente un segnale sinusoidale:



- Definizione di funzione di risposta armonica:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = G(j\omega)$$

- Per problemi di questo tipo non è il caso di utilizzare la metodologia della trasformata di Laplace in quanto i calcoli da eseguire sono molto più pesanti e il risultato a cui si giunge è lo stesso.
- Un errore comune è quello di calcolare l'andamento a regime dell'uscita applicando il teorema del valore finale alla trasformata  $Y(s)$  del segnale di uscita  $y(t)$

$$x(t) = X \sin(\omega t) \rightarrow R(s) = \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} \implies Y(s) = G(s) \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2}$$

- È bene ricordare che ciò non è possibile in quanto il teorema del valore finale può essere applicato solamente per segnali che abbiano tutti i poli a parte reale negativa con al più un polo nell'origine. Nel caso in esame la  $Y(s)$  ha una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario per cui non è possibile applicare il teorema del valore finale. D'altra parte, è evidente che il segnale di uscita, essendo sinusoidale, non ammette limite per  $t \rightarrow \infty$ .
- Utilizzando invece il concetto di risposta armonica la soluzione del problema è immediata. Infatti, sfruttando la relazione teorica  $F(\omega) = G(j\omega)$  esistente tra la funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  e la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema, è possibile scrivere immediatamente il segnale di uscita a regime:

$$y_\infty(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = X |G(j\omega)| \sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

- In modo del tutto analogo si calcola la risposta a regime del sistema ad un generico segnale sinusoidale presente in ingresso:

$$x(t) = X \cos[\omega t + \alpha] \implies y_\infty(t) = X |G(j\omega)| \cos[\omega t + \alpha + \arg G(j\omega)]$$

- Lo sfasamento  $\varphi = \arg G(j\omega)$  dato dalla funzione di risposta armonica è sempre lo sfasamento del segnale di uscita rispetto alla fase del segnale di ingresso.

## Diagrammi di Bode

- Possibili rappresentazioni grafiche della funzione di risposta armonica  $F(\omega) = G(j\omega)$  sono: i *Diagrammi di Bode*, i *Diagrammi di Nyquist* e i *Diagrammi di Nichols*.

- I *Diagrammi di Bode* sono due:

1) il diagramma delle ampiezze rappresenta  $\alpha = \ln |G(j\omega)|$  in funzione del  $\ln \omega$ ;

2) il diagramma delle fasi rappresenta  $\beta = \arg G(j\omega)$  in funzione del  $\ln \omega$ ;

$$\begin{aligned} \ln G(j\omega) &= \ln \left[ |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \right] = \ln |G(j\omega)| + \ln [e^{j \arg G(j\omega)}] \\ &= \ln |G(j\omega)| + j \arg G(j\omega) \end{aligned}$$

- Esempio:

Diagramma delle ampiezze

$$G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j \frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{1000}\right)}$$

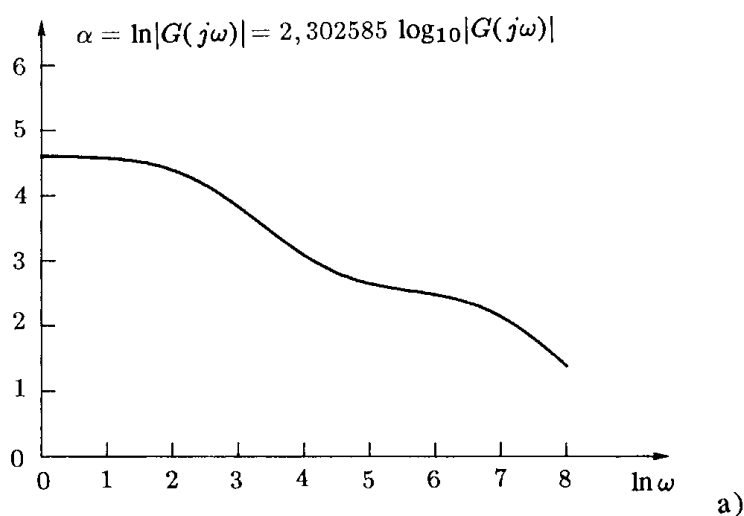
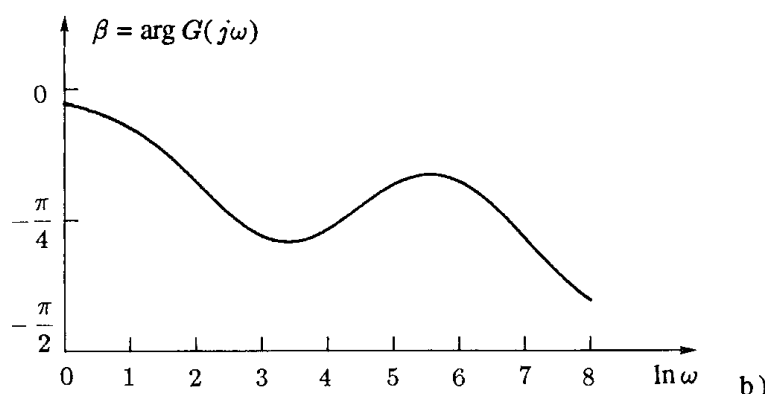
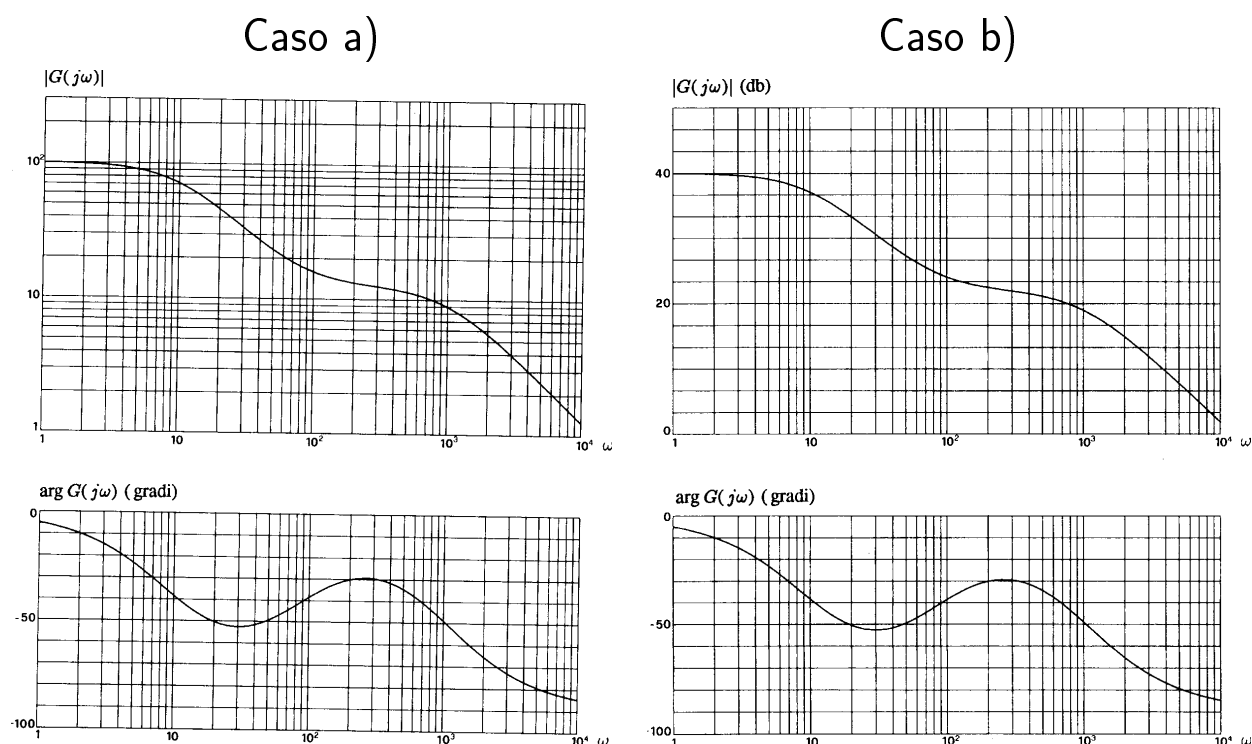


Diagramma delle fasi



- Per i calcoli si utilizzano i logaritmi naturali. Peraltro, un cambiamento di base dei logaritmi equivale ad un semplice cambiamento di scala.
- Si possono utilizzare due tipi diversi di carta millimetrata:
  - a) carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi;
  - b) carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi. In questo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel:  $B = 20 \log_{10} A$ .



- I vantaggi che si hanno impiegando una scala logaritmica sono:
  - i) è possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
  - ii) i diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi;
  - iii) i diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori.



Conversione in db e viceversa

- Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere il guadagno di amplificatori.

$$B(\text{db}) = 20 \log_{10} A$$

- Per la conversione si può utilizzare il seguente diagramma:

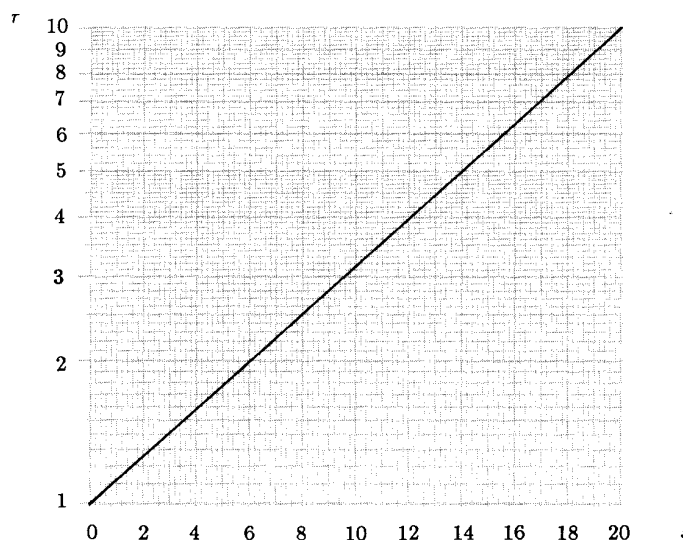
Posto  $A$  nella forma:

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10,$$

il valore di  $A$  in decibel è:

$$B = 20n + s \text{ db}$$

dove  $s$  si ricava dal diagramma a fianco:  $0 \leq s < 20$ .



- Alcune conversioni di uso frequente:

$A$	$B = 20 \log_{10} A$
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
5	14
10	20
20	26
50	34
100	40
1000	60
10000	80
0.5	-6
0.1	-20
0.01	-40

– Esempio 1:

$$A = 24$$

$$A = 2.4 \cdot 10^1$$

$$B \simeq 20 + 8 = 28$$

– Esempio 2:

$$A = 0.56$$

$$A = 5.6 \cdot 10^{-1}$$

$$B \simeq -20 + 15 = -5$$

– Ogni 6 db il valore di  $A$  raddoppia;

– Ogni 20 db il valore di  $A$  è moltiplicato per 10;

- Si consideri una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Il fattore  $s^h$  corrisponde ad un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità  $h$ : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è  $h=0$ .
- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1})(s - p_{h+2}) \dots (s - p_n)}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- La funzione di risposta armonica si ottiene ponendo  $s = j\omega$ :

$$G(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\tau'_1)(1 + j\omega\tau'_2) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Il diagramma di Bode della funzione  $G(j\omega)$  si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

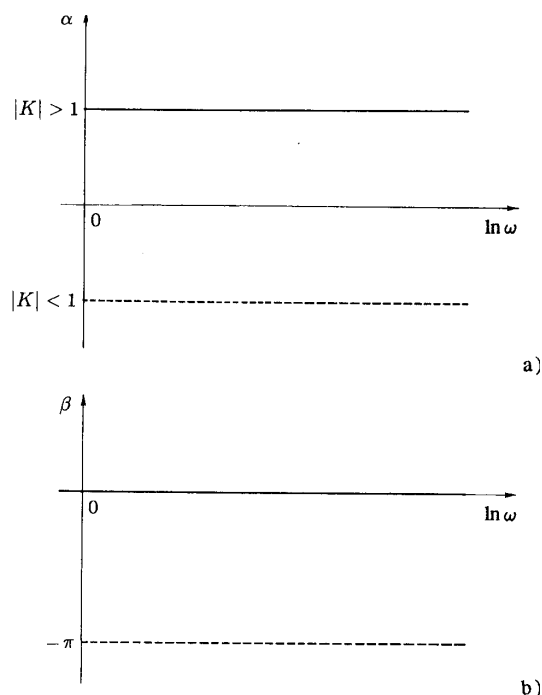
$$\begin{aligned} & K \\ & (j\omega)^{-h} \\ & (1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \\ & \left(1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} \end{aligned}$$

- Guadagno costante:  $G(j\omega) = K$ .

- I diagrammi dei moduli e della fasi sono indipendenti da  $\omega$ , cioè sono costanti;

- Se  $K > 0$ , il diagramma delle fasi è  $\beta = 0$ ;

- Se  $K < 0$ , il diagramma delle fasi è  $\beta = -\pi$ .

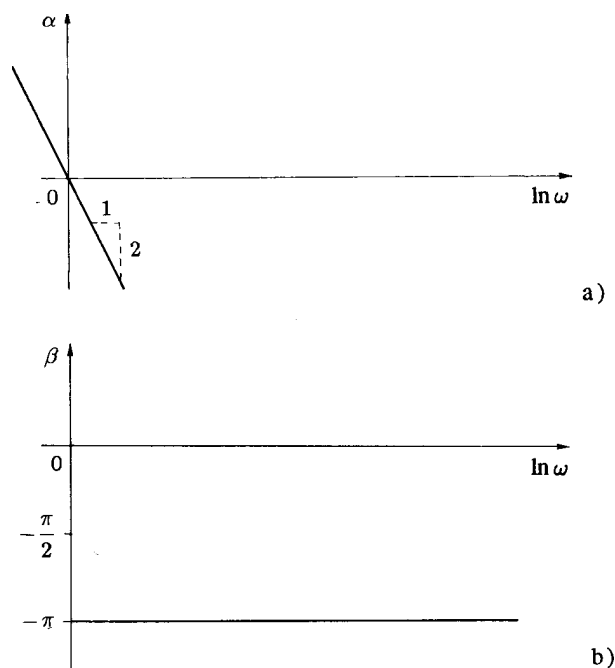


- Poli nell'origine:  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ .

- I diagrammi riportati a fianco sono relativi al caso  $h = 2$ ;

- In scala  $(\ln, \ln)$ , il diagramma delle ampiezze è una retta passante per il punto  $(\omega, \alpha) = (1, 0 \text{ db})$  e di inclinazione  $-h$ ;

- Il diagramma delle fasi è costante, identicamente uguale a  $-h\frac{\pi}{2}$ ;



- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\omega^h} - j h \frac{\pi}{2} = -h \ln \omega - j h \frac{\pi}{2}$$

- Poli nell'origine:  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau)$$

- Diagrammi asintotici di Bode:

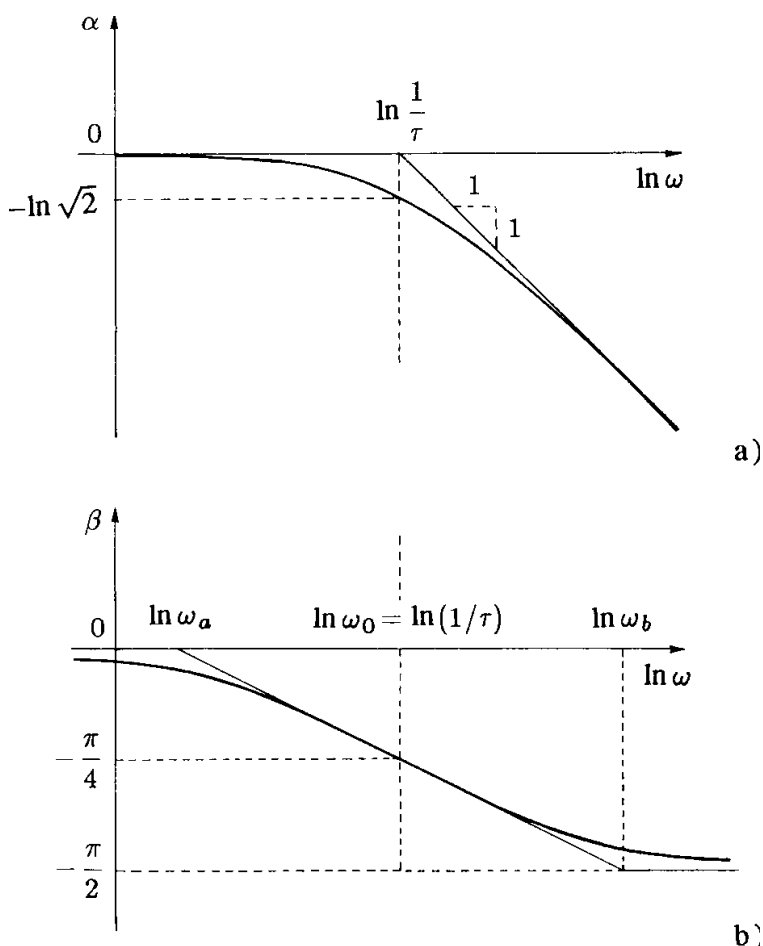
Diagramma delle ampiezze:

a) per  $\omega \ll 1/\tau$ , si ottiene  $\alpha \simeq 0$ , cioè il diagramma tende a coincidere con l'asse delle ascisse.

b) per  $\omega \gg 1/\tau$ , si ottiene

$$\alpha \simeq \ln \frac{1}{\omega\tau} = \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega$$

cioè il diagramma tende alla retta passante per il punto  $\ln \omega = \ln(1/\tau)$  e di inclinazione  $-1$ ;



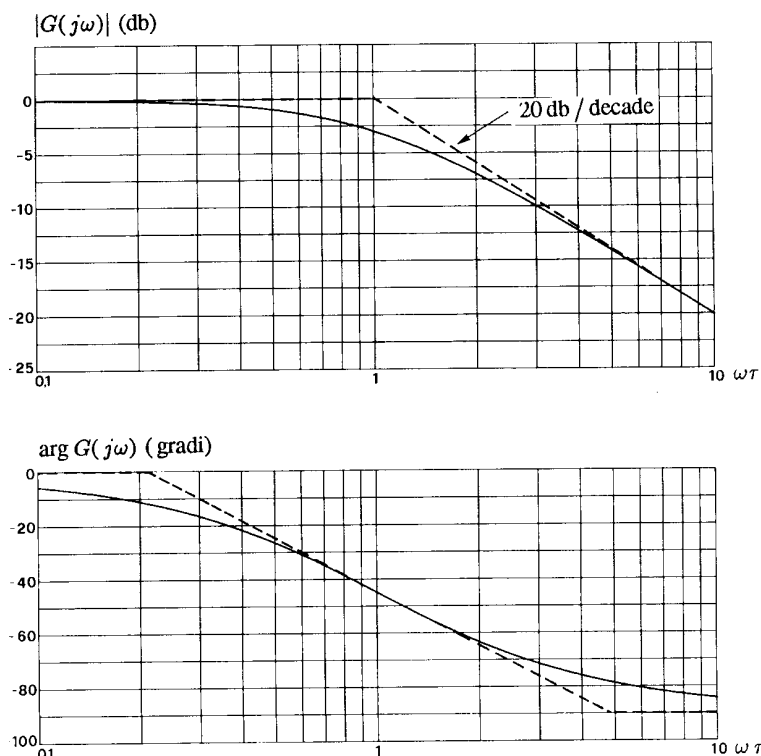
- L'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze è pertanto costituita dalle due semirette

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } \ln \omega \leq \ln \frac{1}{\tau} , \\ \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega & \text{per } \ln \omega \geq \ln \frac{1}{\tau} , \end{cases}$$

- Il massimo errore della rappresentazione asintotica si ha per  $\omega = 1/\tau$  e vale  $\ln \sqrt{2}$  (circa 3db).
- La pendenza  $-1$ , su carta semilogaritmica diventa  $-20$  db/decade;

- Diagramma asintotico delle fasi:

La spezzata si ottiene collegando i due asintoti  $\beta = 0$  e  $\beta = -\pi/2$  con la tangente al diagramma effettivo nel punto corrispondente alla *pulsazione di rottura*  $\omega_0 = 1/\tau$ , punto in cui è  $\beta = -\pi/4$ .



- Essendo  $\beta = -\arctan \omega\tau$ , si può scrivere

$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \frac{d\omega}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} = -\frac{1}{2}$$

- Le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  si determinano utilizzando la relazione

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2}$$

da cui si ottiene

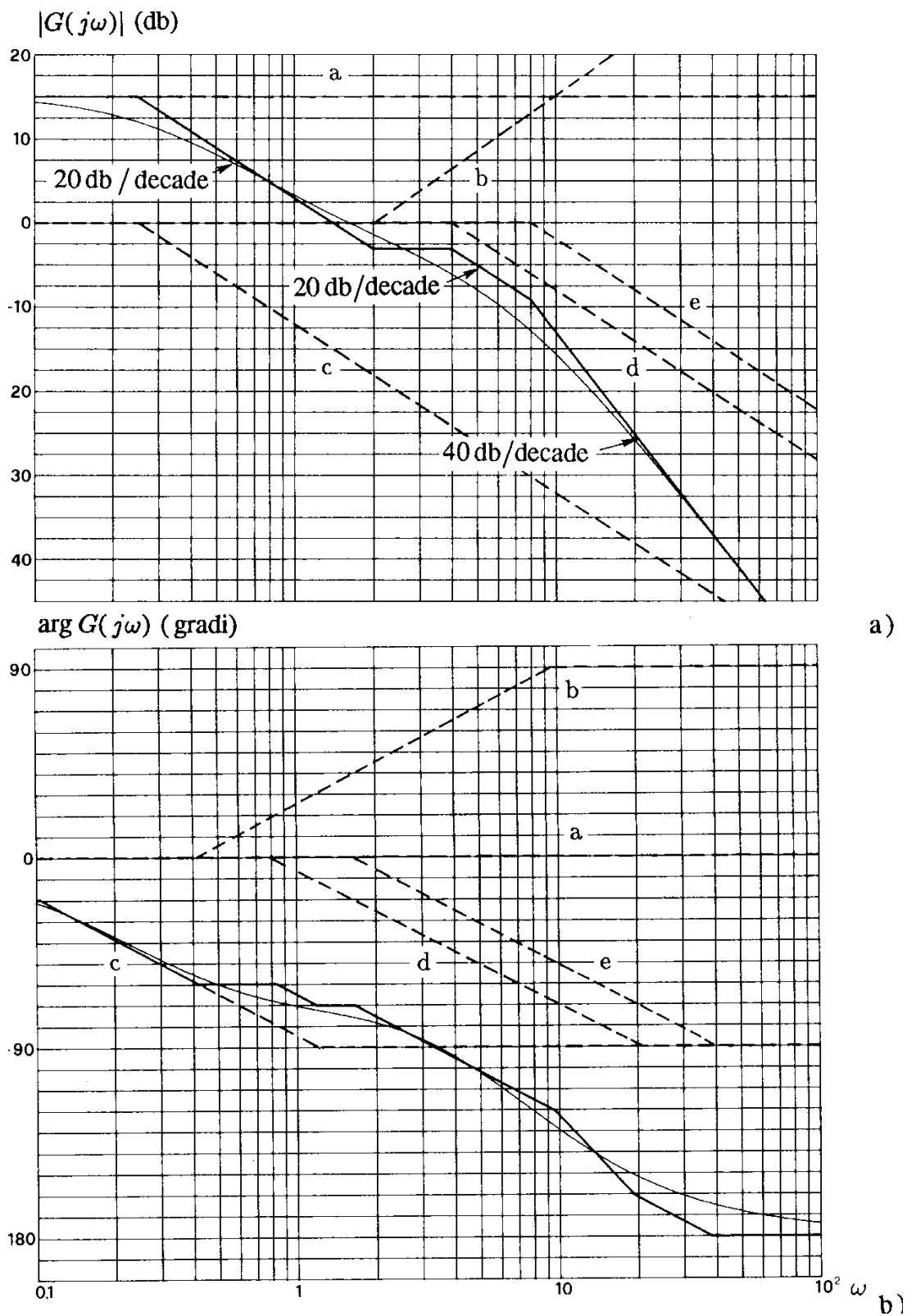
$$\ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81}$$

- I diagrammi di Bode della funzione  $G(j\omega) = 1+j\omega\tau$  si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli della funzione  $G(j\omega) = (1+j\omega\tau)^{-1}$ .
- Quando la costante di tempo  $\tau$  è negativa, il diagramma delle ampiezze risulta immutato, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

- **Esempio.** Si consideri la seguente funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{5,6 (1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4) (1 + j\omega 0,25) (1 + j\omega 0,125)}$$

- Diagrammi di Bode:



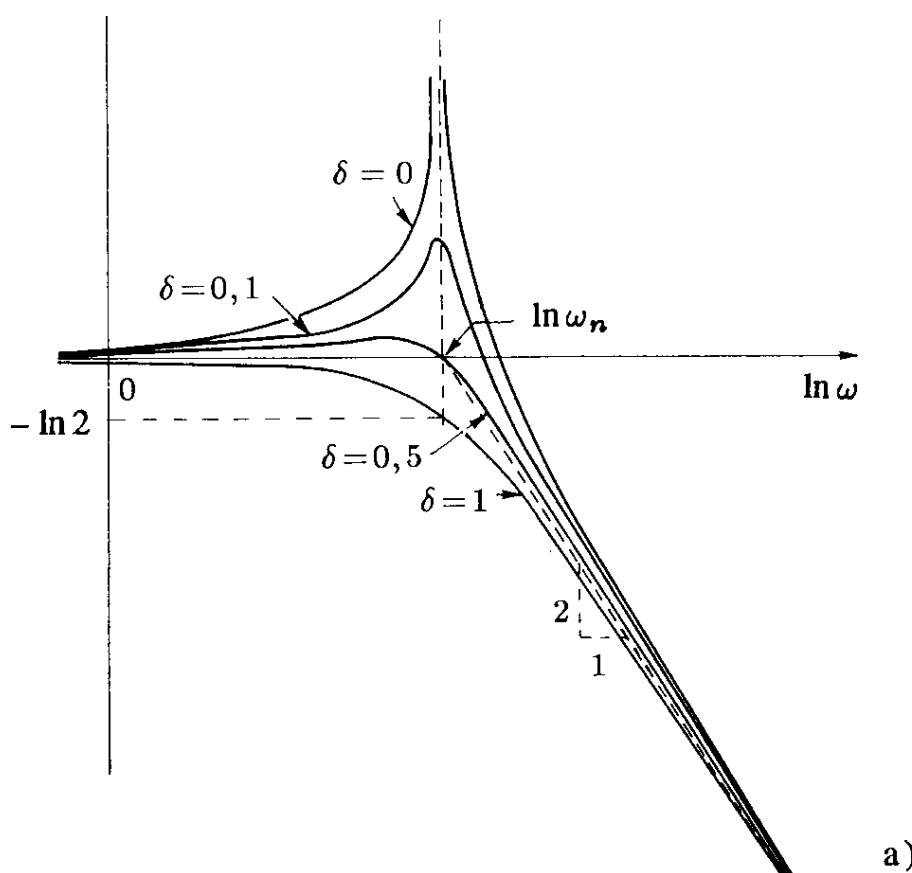
- Poli complessi coniugati ( $0 \leq \delta < 1$ ):

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} - j \arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze:



- Asintoti del diagramma  $\alpha$ : per  $\omega/\omega_n \ll 1$ , tutti i termini sotto radice quadrata sono trascurabili rispetto all'unità ed è pertanto  $\alpha \simeq 0$ ; per  $\omega/\omega_n \gg 1$ , ha la prevalenza il termine  $(\omega/\omega_n)^4$  e si può scrivere pertanto

$$\alpha \simeq -\ln \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 2 \ln \omega_n - 2 \ln \omega$$

- Il diagramma effettivo si può discostare sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per  $\delta=0$  e in corrispondenza della pulsazione di rottura  $\omega_n$ , lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
  - 1) per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , presenta un massimo;
  - 2) per  $0 \leq \delta \leq 1/2$ , interseca l'asse a destra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 3) per  $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , interseca l'asse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 4) per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ , non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.
- Pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Posto  $u = \omega/\omega_n$ , il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4 \delta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

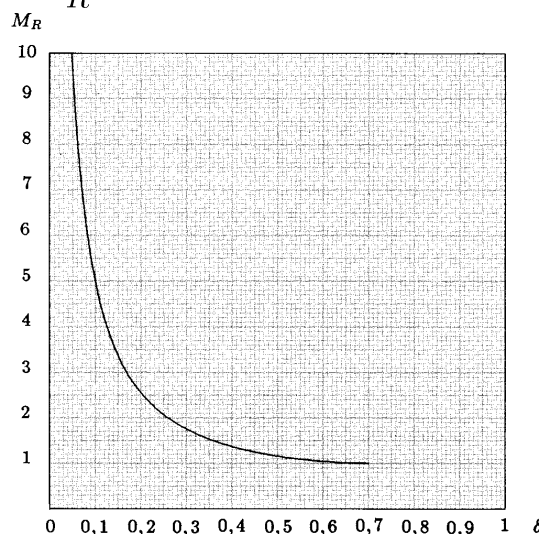
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

- Picco di risonanza  $M_R$ : si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione  $\omega_R$ :

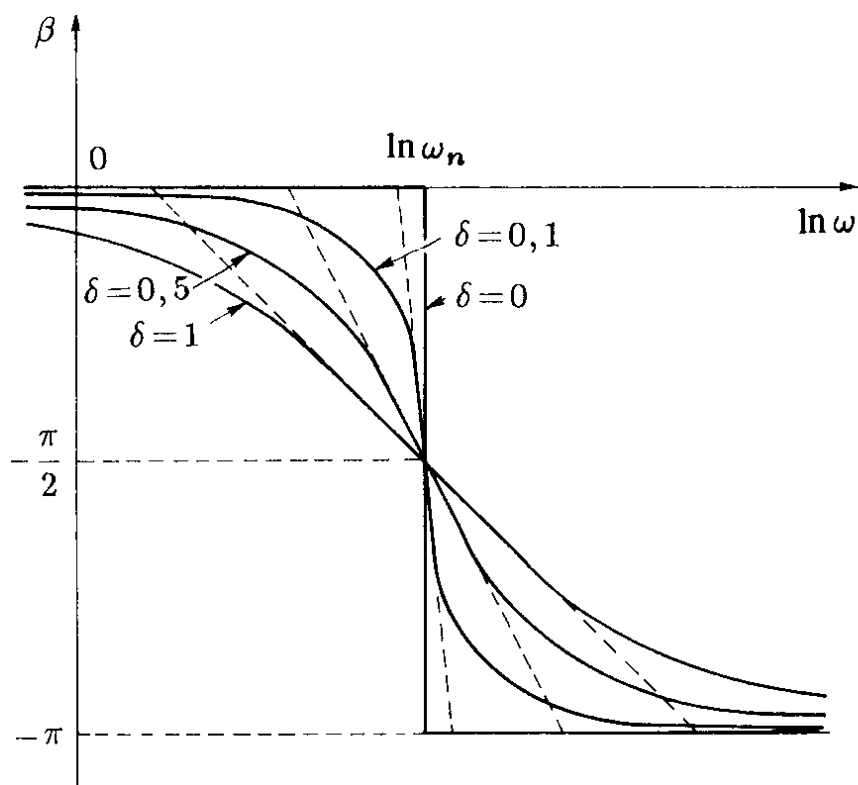
$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}}$$





- Diagramma di Bode della fasi:



- Approssimazione asintotica del diagramma delle fasi si ottiene congiungendo gli asintoti  $\beta = 0$  e  $\beta = -\pi$  con un segmento inclinato di pendenza opportuna.
- Essendo  $\beta = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$ , si deduce:

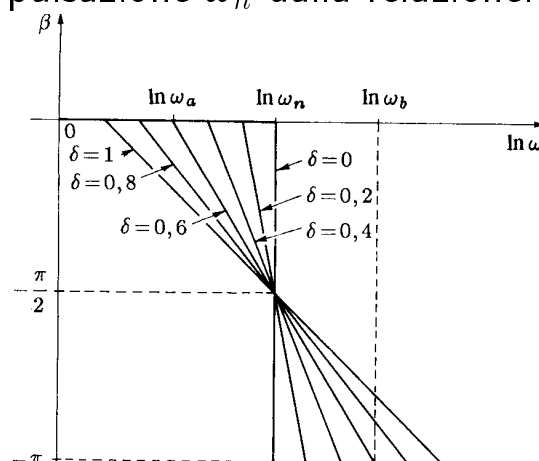
$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \left. \frac{d\beta}{du} \frac{du}{d \ln \omega} \right|_{u=1} = - \frac{1}{1 + \left( \frac{2\delta u}{1-u^2} \right)^2} \frac{2\delta(1+u^2)u}{(1-u^2)^2} \bigg|_{u=1} = -\frac{1}{\delta}$$

- Le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  sono legate alla pulsazione  $\omega_n$  dalla relazione:

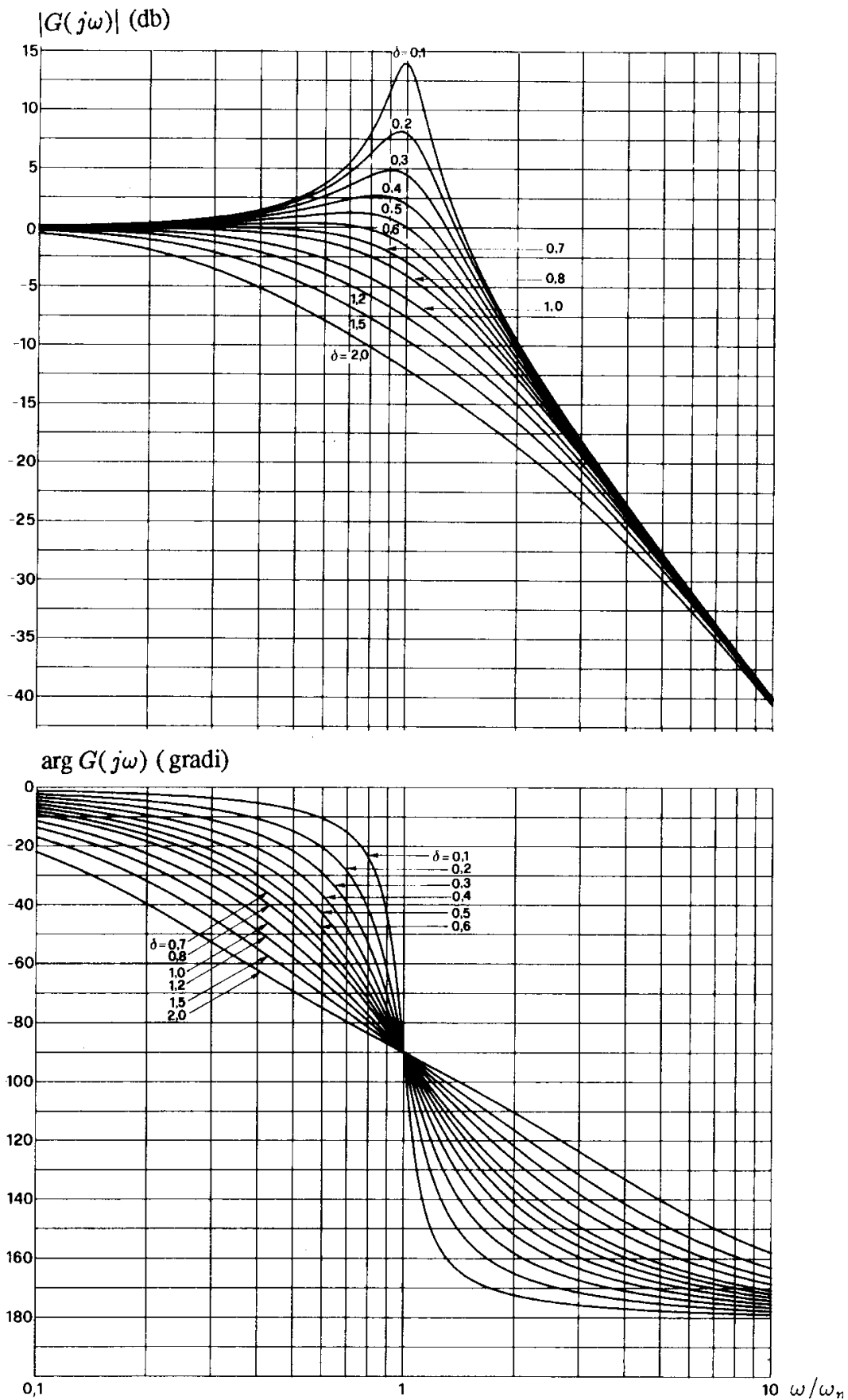
$$\frac{\pi/2}{\ln \omega_n - \ln \omega_a} = \frac{\pi/2}{\ln \omega_b - \ln \omega_n} = \frac{1}{\delta}$$

dalla quale si ottiene

$$\boxed{\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta}$$



- Diagrammi delle ampiezze e delle fasi in scala semilogaritmica:

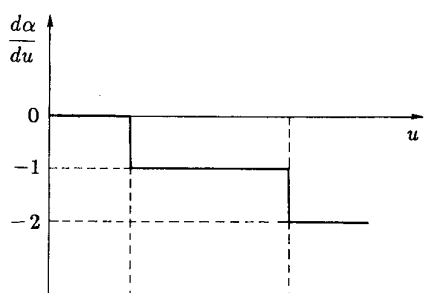
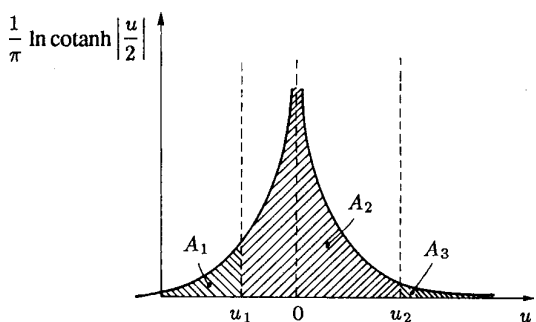
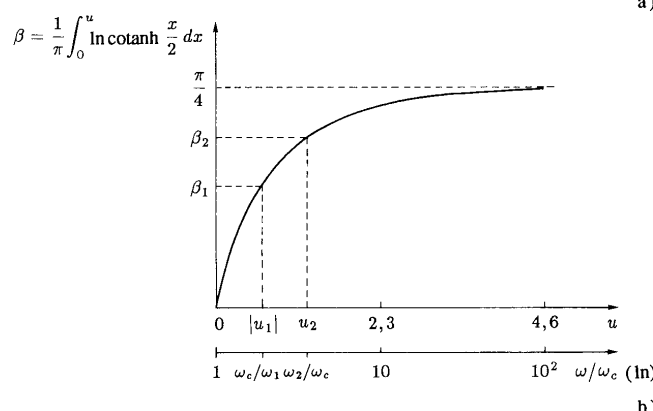
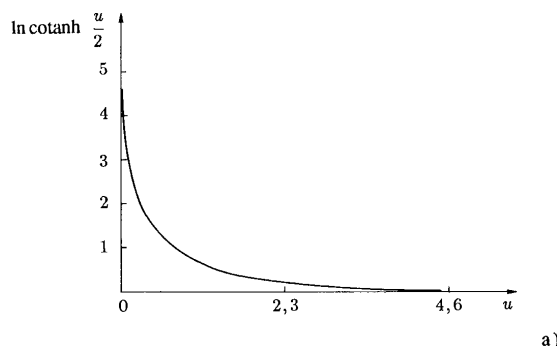
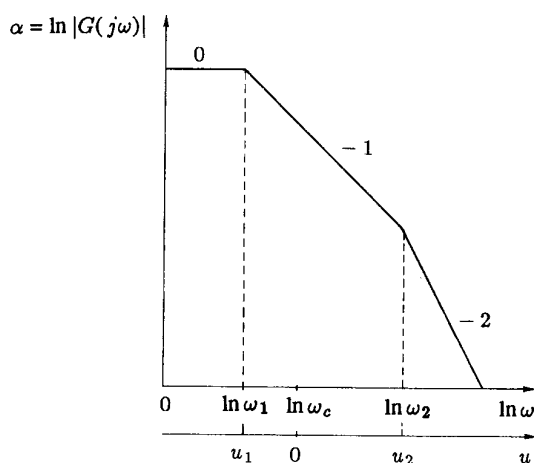


## La formula di Bode

- Una funzione di trasferimento razionale fratta è a a fase minima se non ha né poli né zeri nel semipiano destro del piano  $s$ .
- Per sistemi a fase minima, detta  $\omega_c$  la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase  $\beta_c$ , vale la formula di Bode:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \coth \left| \frac{u}{2} \right| du$$

in cui si è posto  $\alpha := \ln |G(j\omega)|$ ,  $u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$ .

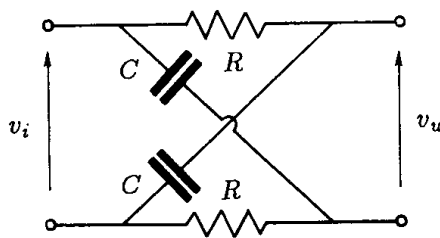


- La fase  $\beta_c$  in corrispondenza di una data pulsazione  $\omega_c$  dipende essenzialmente dalla pendenza  $\frac{d\alpha}{du}$  del diagramma delle ampiezze nell'intorno di quella pulsazione  $\omega_c$ .

- Esempio:  $\beta_c = 0 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3$  dove:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1, \quad A_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2$$

- Significato della variabile di integrazione  $u$ : se il diagramma  $\alpha$  è riferito ai logaritmi naturali, la variabile  $u$  non è altro che l'ascissa  $\ln \omega$  con l'origine traslata in  $\ln \omega_c$ .
- La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano.
- Esempio di rete elettrica a fase non minima:



a)

- Funzione di trasferimento

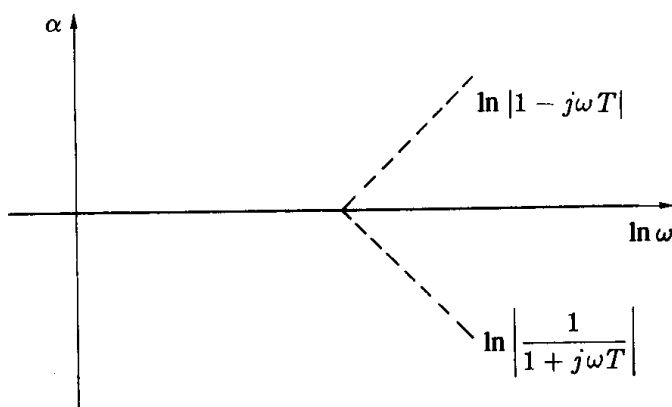
$$V_u(s) = \frac{1/Cs - R}{R + 1/Cs} V_i(s)$$

che, posto  $T := RC$ , diventa

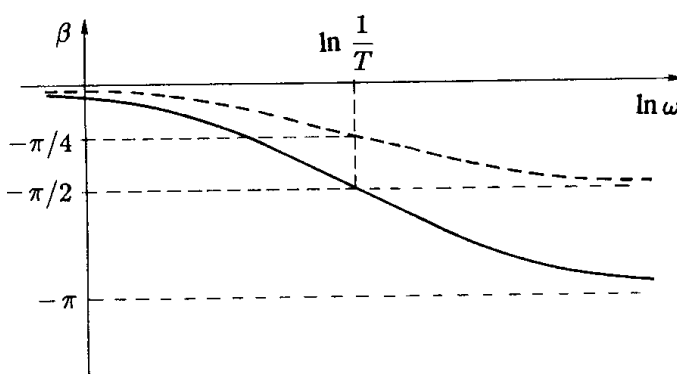
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts},$$

cioè una funzione non a fase minima;

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi: il diagramma delle ampiezze è costante  $\alpha = 0$  ( $|G(j\omega)| = 1$ ), mentre il diagramma delle fasi varia gradualmente da  $0^\circ$  a  $-180^\circ$ .



b)



c)

- È chiaro che applicando la formula di Bode all'esempio si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

- La funzione di trasferimento trascendente

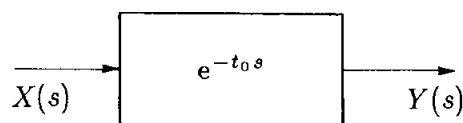
$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

che rappresenta un ritardo finito di valore  $t_0$ , non è a fase minima.

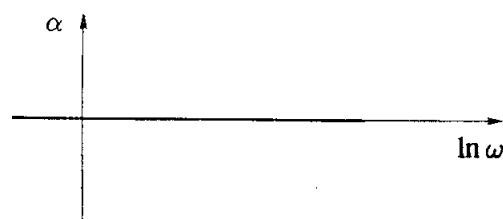
- Essendo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 ,$$

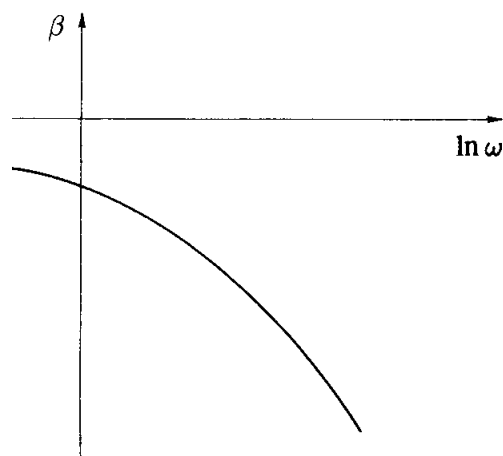
la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase crescente linearmente con la frequenza.



a)



b)



c)

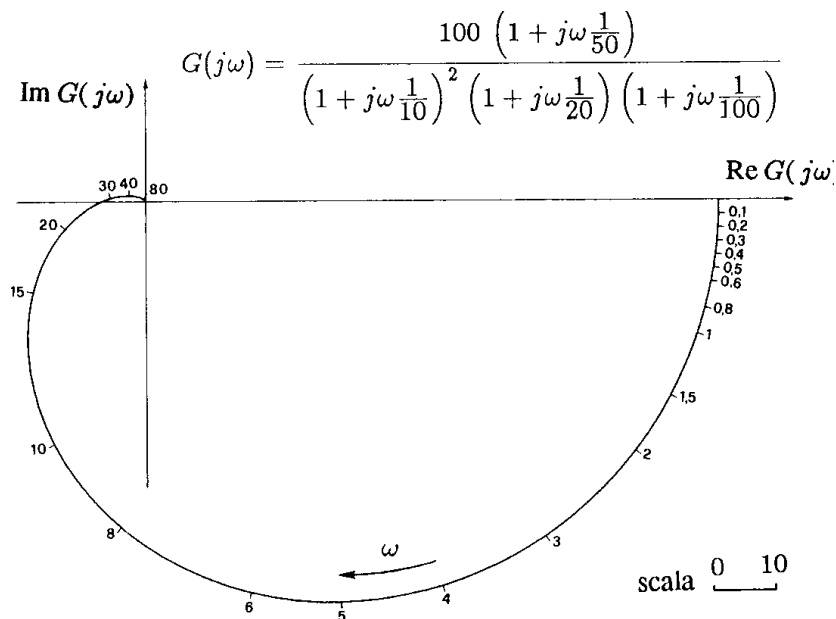
- Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j \beta = 0 - j \omega t_0 = 0 - j t_0 e^{j \ln \omega}$$

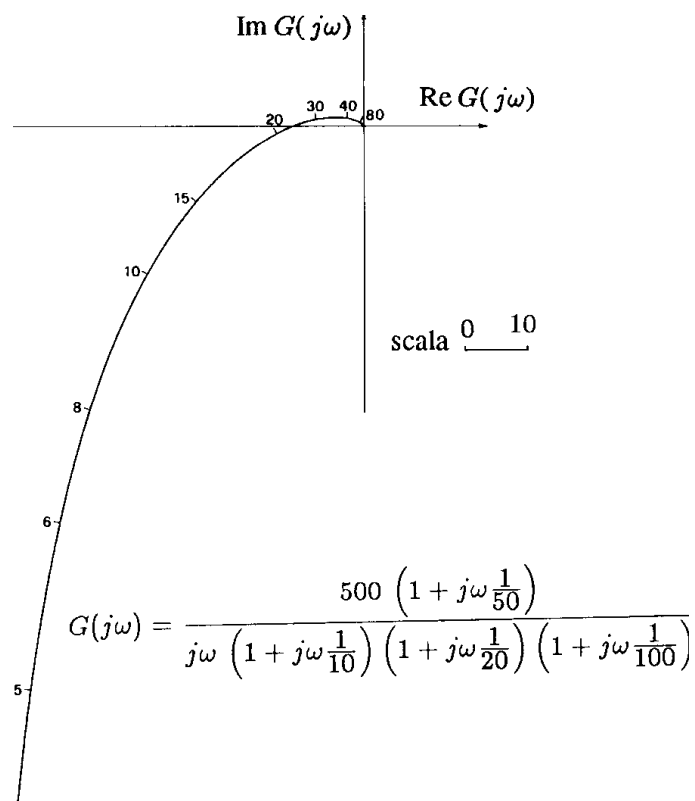
relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi ha un andamento esponenziale. Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato ( $\beta = 0$ ).

## Diagrammi di Nyquist o polari

- Esempio di diagramma polare senza poli nell'origine:



- Esempio di diagramma polare con un polo nell'origine:



- I diagrammi di Nyquist mostrano, sul piano complesso di Gauss, come varia il numero complesso  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$ ;

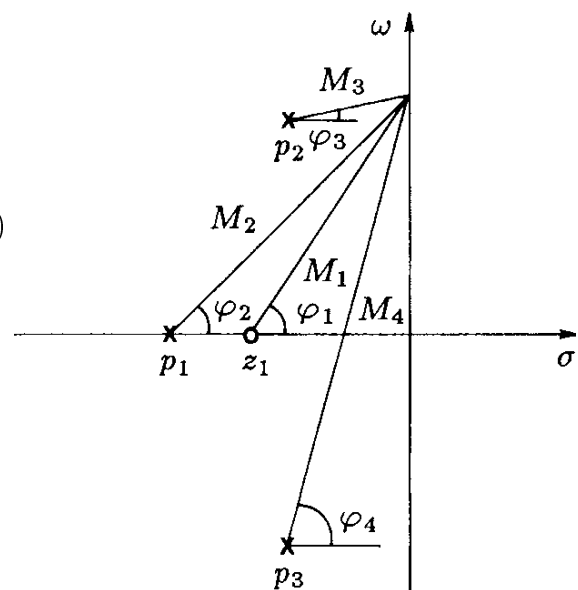
- I diagrammi di Nyquist sono graduati in funzione della pulsazione  $\omega$ ;
- I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di Nyquist);
- Nota la funzione di trasferimento  $G(s)$ , il diagramma polare si può tracciare per punti, separando le parti reale e immaginaria di  $G(j\omega)$  e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di  $\omega$ .
- Se una funzione di trasferimento  $G(s)$  è data in forma fattorizzata, la corrispondente funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

- Interpretazione grafica della funzione di risposta armonica (un esempio):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned}$$

I moduli  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  e le fasi  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$  sono facilmente determinabili per via grafica.



- In molti casi, per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato è sufficiente la conoscenza dell'andamento *qualitativo* del suo diagramma di Nyquist.

**Regole per il tracciamento dei diagrammi polari**

- Si faccia riferimento ad una funzione  $G(s)$  in forma polinomiale:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

oppure in forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s) (1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- *Comportamento per  $\omega \rightarrow 0+$*  Si distinguono due casi:

1) Se  $h = 0$ , il diagramma parte da un punto dell'asse reale:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K_1 \frac{b_0}{a_0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K$$

Per piccoli valori di  $\omega$ , si possono trascurare le potenze superiori di  $\omega$ :

$$G(j\omega) \simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} \quad \rightarrow \quad \Delta \arg G(j\omega) \simeq \underbrace{\left( \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right)}_{\Delta_\tau} \omega$$

Con  $\Delta \arg G(j\omega)$  si è indicata la variazione dell'argomento di  $G(j\omega)$  rispetto al valore che essa assume per  $\omega = 0$ .

- Nel caso della forma fattorizzata a costanti di tempo si ha:

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \underbrace{\left( \tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right)}_{\Delta_\tau} \omega$$

- Il diagramma polare lascia l'asse reale ruotando in senso orario o antiorario a seconda che il coefficiente  $\Delta_\tau$  sia negativo o positivo.



2) Se  $\boxed{h > 0}$ , il diagramma parte da un punto all'infinito:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -h \frac{\pi}{2} - \varphi_0$$

con  $\varphi_0 = 0$  o  $\varphi_0 = \pi$  a seconda che il valore di  $K_1 b_0/a_h$  (o quello di  $K$ ) sia positivo o negativo.

- Nel caso  $\boxed{h=1}$  i diagrammi polari presentano un asintoto verticale la cui ascissa  $\sigma_a$  si determina calcolando il valore della parte reale di  $G(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow 0+$ :

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2}$$

Nel caso in cui la  $G(s)$  sia data in forma fattorizzata si ha che:

$$\sigma_a = K \left( \tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right) = K \Delta_\tau$$

- Quando è  $h > 1$ , il diagramma polare inizia in un punto all'infinito, ma nel diagramma non è presente nessun asintoto.
- $\boxed{\text{Comportamento per } \omega \rightarrow \infty}$ . Se è  $\boxed{m=n}$ , il diagramma termina in un punto dell'asse reale:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K_1 = K \frac{\tau'_1 \tau'_2 \dots \frac{1}{\omega'^2_{n1}} \frac{1}{\omega'^2_{n2}} \dots}{\tau_1 \tau_2 \dots \frac{1}{\omega^2_{n1}} \frac{1}{\omega^2_{n2}} \dots}$$

Se è  $\boxed{m < n}$ , il diagramma termina nell'origine tangente ad uno degli assi coordinati:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} + (\text{sign } K_1 - 1) \frac{\pi}{2}$$

- $\boxed{\text{Rotazioni intorno all'origine per } \omega \text{ variabile da } 0 \text{ a } \infty}$ . La variazione "al finito"  $\Delta \arg G(j\omega)$  dell'argomento di  $G(j\omega)$  per  $\omega$  variabile da zero all'infinito è

$$\Delta \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} - (\mu - \nu) \frac{\pi}{2} - (n_z - n_p) \pi$$

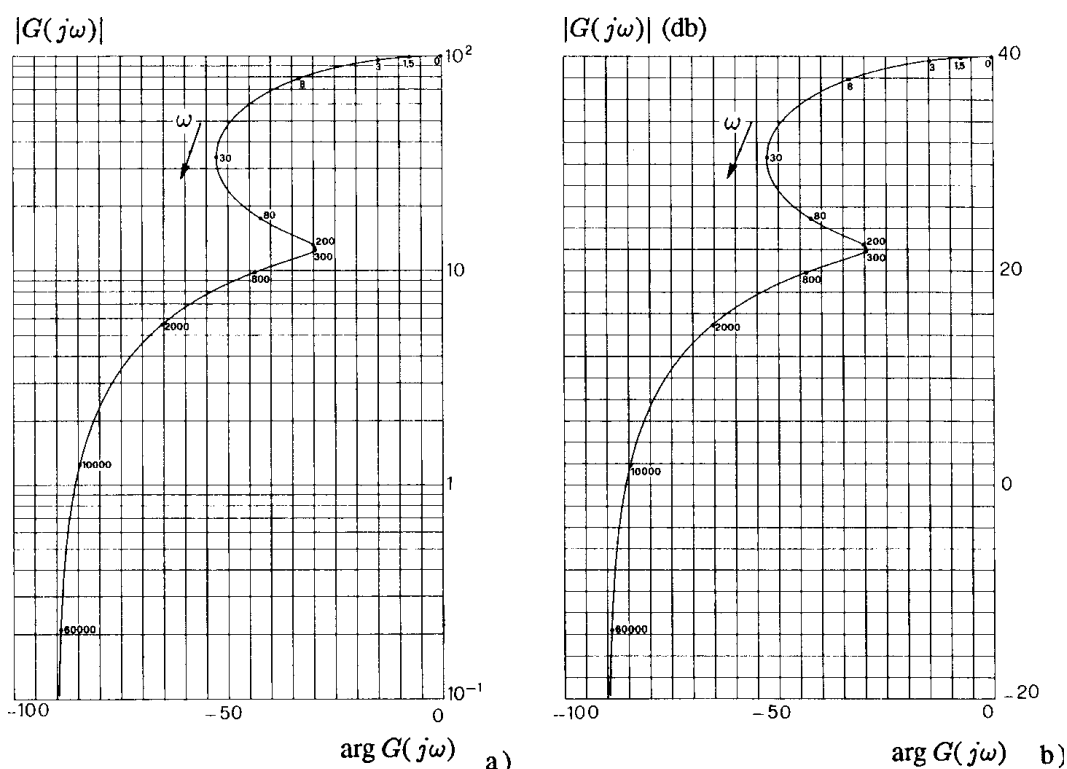
dove  $\mu$  e  $\nu$  sono i numeri degli zeri e dei poli immaginari, con  $n_z$  ed  $n_p$  quelli degli zeri e dei poli a parte reale positiva.

## Diagrammi di Nichols

- I diagrammi di Nichols riportano in ascissa l'argomento e in ordinata, in scala logaritmica, il modulo della funzione di risposta armonica;
- Diagramma di Nichols della funzione

$$G(s) = \frac{100(1 + \frac{s}{80})}{(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{1000})}$$

tracciato con due diversi tipi di reticolo:

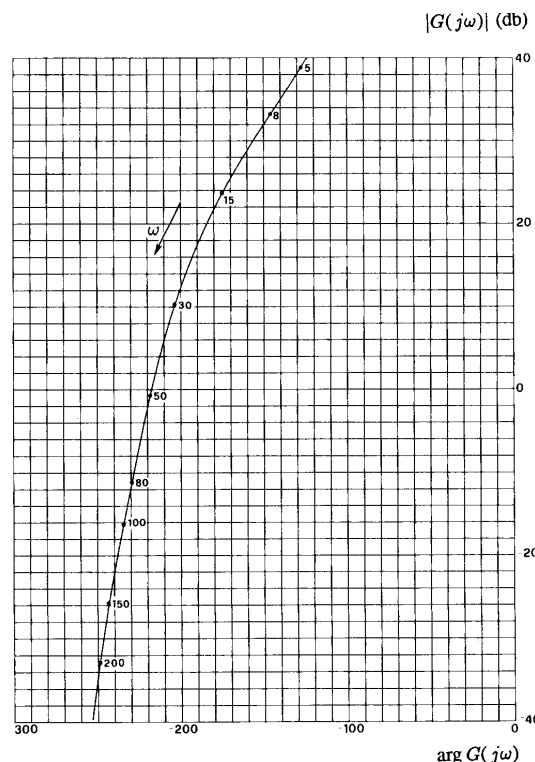
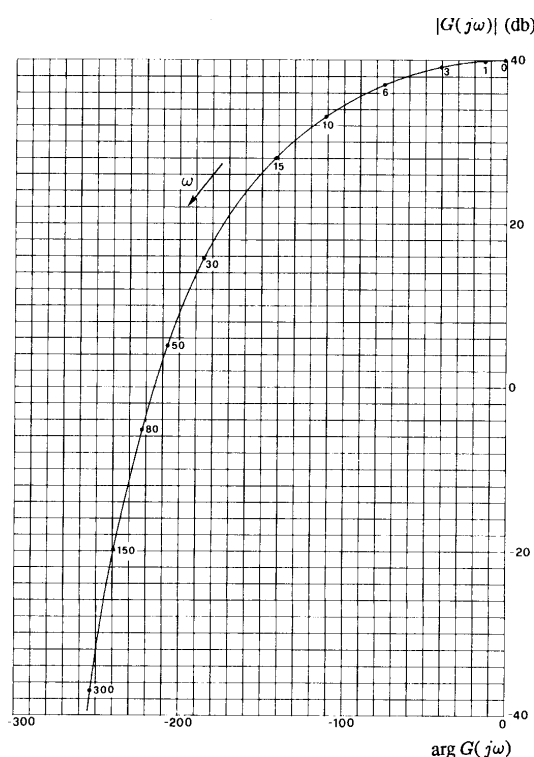


- I diagrammi di Nichols possono essere tracciati su carta semilogaritmica o su ordinaria carta millimetrata, con ampiezze date in db.
- Come i diagrammi polari, sono costituiti da una sola curva graduata in valori della pulsazione e quindi hanno il vantaggio, rispetto ai diagrammi di Bode, di essere una rappresentazione più sintetica.
- Sono di costruzione più complicata rispetto ai diagrammi di Bode, ma ammettono la *sommabilità* di più sistemi in cascata, cioè il diagramma di Nichols si può ottenere per semplice somma, per uguali valori della pulsazione, dei diagrammi di Nichols di ciascun elemento componente;

- Diagrammi di Nichols delle seguenti due funzioni:

$$G(s) = \frac{100(1 + \frac{s}{50})}{(1 + \frac{s}{10})^2(1 + \frac{s}{20})(1 + \frac{s}{100})},$$

$$G(s) = \frac{500(1 + \frac{s}{50})}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{20})(1 + \frac{s}{100})}$$

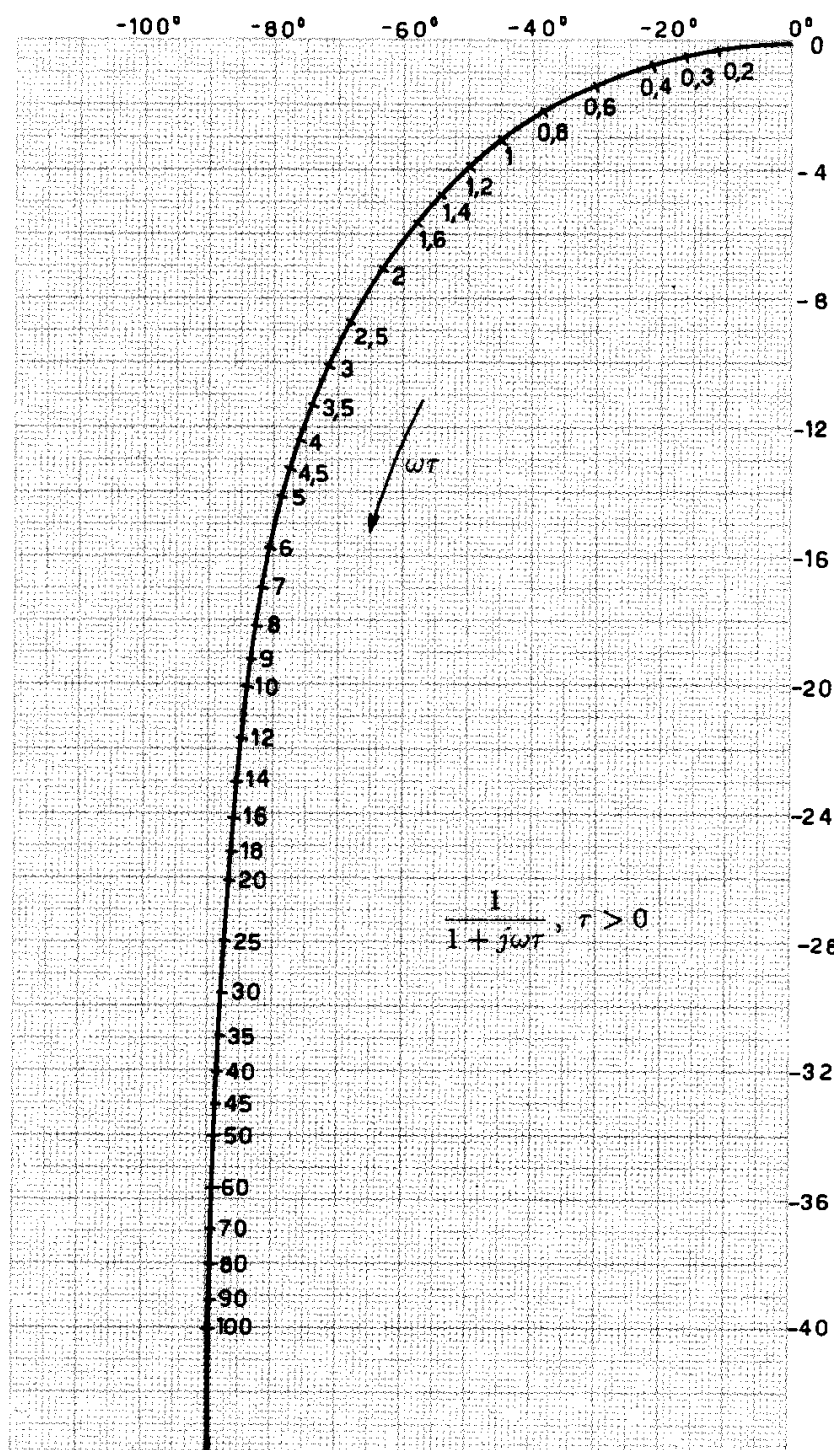


- Vantaggio: maggior dettaglio nel rappresentare l'andamento della funzione di risposta armonica per valori elevati della pulsazione.
- I diagrammi di Nichols sono largamente impiegati nella soluzione di problemi di sintesi, come per esempio nel progetto delle reti correttrici.

Diagrammi di Nichols delle funzioni elementari.

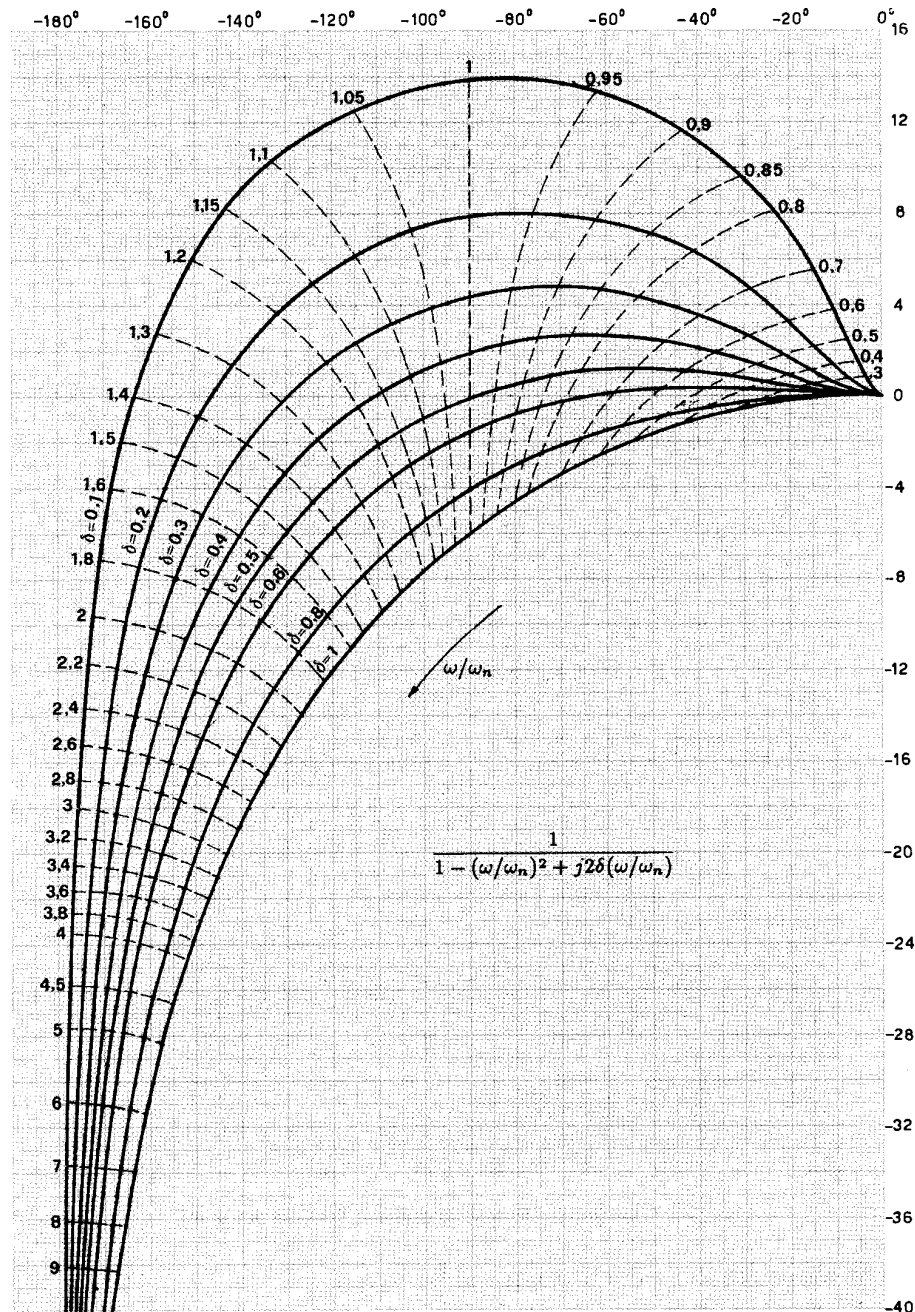
- È facile comporre i diagrammi di Nichols di più sistemi in cascata sommando, ad uguali valori della pulsazione, i contributi delle singole funzioni elementari:
  - 1)  $G(j\omega) = K$ . Il diagramma si riduce a un punto, corrispondente a fase 0 o  $-\pi$ , a seconda che la costante  $K$  sia positiva o negativa.
  - 2)  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ . Il diagramma è una retta parallela all'asse delle ordinate, di ascissa  $h(-\pi/2)$ .

3)  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$ ,  $\tau > 0$ . Il diagramma è il seguente:



- Il diagramma corrispondente alla funzione  $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$  si ottiene ribaltando il grafico di figura intorno all' origine.
- Per valori di  $\tau$  negativi in ambedue i casi si ribalta il diagramma intorno all'asse delle ordinate.

4)  $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ . Al variare di  $\delta$ , il diagramma di Nichols è il seguente:



- Il diagramma corrispondente alla funzione  $G(j\omega) = 1 - (\omega/\omega_n)^2 + j 2 \delta (\omega/\omega_n)$  si ottiene da quello riportato in figura ribaltandolo intorno all' origine.
- Per valori di  $\delta$  negativi, in ambedue i casi si ribalta il diagramma intorno all'asse delle ordinate.

- **Esempio.** Si consideri la seguente funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{5,6(1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4)(1 + j\omega 0,25)(1 + j\omega 0,125)}$$

- Per tracciarne il diagramma di Nichols, si costruisce una tabella in cui, in corrispondenza di alcuni valori di  $\omega$ , sono riportati modulo e argomento di ciascuno dei fattori elementari.

TERMINI		0,0	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	40,0
5,6	db	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96
	grad	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$(1 + j\omega 0,5)$	db	0,0	0,002	0,004	0,011	0,043	0,17	0,37	0,96	3,01	5,11	6,98	10,00	14,14	20,04	26,03
	grad	0,0	0,85	1,72	2,86	5,71	11,30	16,69	26,56	45,00	56,30	63,43	71,56	78,69	84,28	87,14
$(1 + j\omega 4)^{-1}$	db	0,0	-0,062	-0,24	-0,64	-2,14	-5,51	-8,29	-12,30	-18,12	-21,60	-24,09	-27,61	-32,03	-38,06	-44,08
	grad	0,0	-6,84	-13,49	-21,80	-38,66	-57,99	-67,38	-75,96	-82,87	-85,23	-86,42	-87,61	-88,57	-89,28	-89,64
$(1 + j\omega 0,25)^{-1}$	db	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,043	-0,096	-0,26	-0,97	-1,94	-3,01	-5,11	-8,60	-14,15	-20,04
	grad	0,0	0,0	-0,43	-0,86	-1,43	-2,86	-5,71	-8,53	-14,03	-26,57	-36,86	-45,00	-56,31	-68,20	-78,69
$(1 + j\omega 0,125)^{-1}$	db	0,0	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,024	-0,067	-0,263	-0,57	-0,96	-1,93	-4,09	-8,60	-14,15
	grad	0,0	0,0	-0,21	-0,42	-0,72	-1,43	-2,86	-4,28	-7,12	-14,03	-20,56	-26,56	-36,86	-51,34	-68,20
$G(j\omega)$	db	14,96	14,90	14,72	14,32	12,84	9,56	6,92	3,29	-1,38	-4,04	-6,12	-9,69	-15,62	-25,81	-37,28
	grad	0,0	-6,63	-13,05	-21,09	-37,24	-55,26	-63,50	-70,55	-78,47	-86,35	-94,55	-109,2	-129,4	-151,9	-165,4

- Il modulo e l'argomento della funzione  $G(j\omega)$  si ottiene sommando il contributo dei singoli fattori. Si traccia infine la curva, cercando di interpolare nel modo migliore i punti così determinati.

