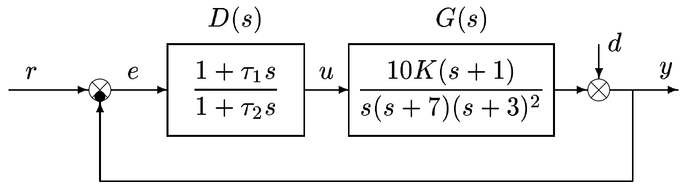
Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Posto $\tau_1 = \tau_2 = 0$, determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è stabile. In corrispondenza del valore massimo K^*, determinare esattamente la posizione p_4 del quarto polo del sistema retroazionato, sapendo che la posizione del terzo polo è in $p_3 = -.95$.

b) Posto $\tau_1 = \tau_2 = 0$, determinare il valore minimo $\overline{K}$ del guadagno che determina un errore a regime $|e_\infty| < 0.2$ (della variabile errore $e(t) = r(t) - y(t)$) per un ingresso a rampa $r(t) = 3t$ ed un disturbo costante $d(t) = 5$. Posto $K = \overline{K}$ calcolare il valore a regime del segnale $u(t)$.

c) Posto $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.06$ e $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno di anello $D(s)G(s)$. Calcolare l'eventuale asintoto verticale. Nota: ricordarsi di chiudere il diagramma all'infinito nel modo appropriato.

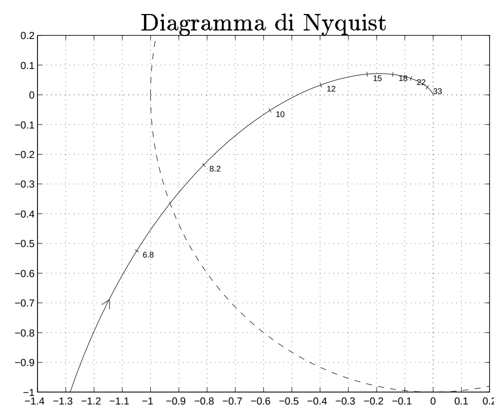
d) Posto $K = 1$ tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $G(s)$.

e) Posto $\tau_1 = 0.2$ e $\tau_2 = 0.06$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare con esattezza gli asintoti del luogo delle radici. Determinare la posizione dei punti di diramazione solo in modo qualitativo.

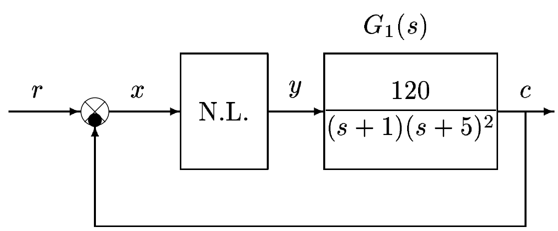
f) Siano date le seguenti formule di inversione

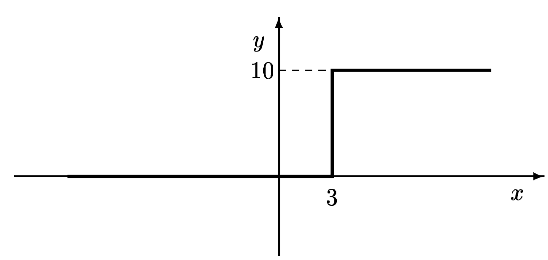
$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

e si consideri il diagramma di Nyquist riportato a fianco. Calcolare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase $M_\varphi = 45^o$.



g) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





Determinare il valore r^* del segnale di riferimento a cui corrisponde il punto di lavoro $(x_0, y_0) = (3,\ 5)$. Relativamente a questo punto di lavoro, determinare anche l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema.

h) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare la rete corretrice

$$D(s) = M(s)/E(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzino i seguenti parametri: $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0.2$ e $T = 1$.

a) Posto $\tau_1 = 0$ e $\tau_2 = 0$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{10K(s+1)}{s(s+7)(s+3)^2} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad s^4 + 13s^3 + 51s^2 + (63+10K)s + 10K = 0$$

Dalla tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 51 & 10K \\ 3 & 13 & 63+10K & \\ 2 & 600-10K & 130K & \\ 2' & 60-K & 13K & \\ 1 & (57-K)(63+10K)-13^2K & & \\ 0 & 13K & & \end{array}$$

si ricava che il sistema retroazionato è stabile per

$$K > 0, \qquad K < 57, \qquad 3780 + 368K - 10K^2 > 0$$

cioè per

$$0 < K < 45.16 = K^*$$

La posizione ω^* della coppia di poli puramente immaginari corrispondenti al guadagno K^* si ricava, per esempio, utilizzando i coefficienti della terza riga della tabella di Routh

$$\omega^* = \sqrt{\frac{63+10K^*}{13}} = 6.29$$

Per $K = K^*$ due dei quattro poli sono sull'asse immaginario. Il grado relativo del sistema è 3 per cui vale il teorema del baricentro: la somma dei poli rimane costante al variare di K. La posizione del quarto pole è così facilmente determinata:

$$p_4 = -13 - p_3 = -12.1$$

b) Il disturbo costante $d = 5$ non influenza l'errore a regime perchè il sistema è di tipo 1. Per ingresso a rampa il sistema ha un errore a regime costante facilmente calcolabile:

$$e_\infty = \frac{3}{k_v}, \quad K_v = \frac{10K}{63} \qquad \rightarrow \qquad e_\infty = \frac{189}{10K}$$

Imponendo il vincolo $|e_\infty < 0.2|$ si ricava

$$\left|\frac{189}{10K}\right| < 0.2 \qquad \rightarrow \qquad K > 94.5 = \overline{K}$$

A regime il sistema $D(s)$ ha un guadagno statico unitario per cui il valore a regime di $u(t)$ coincide con quello di $e(t)$, cioè 0.2.

c) Posto $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.06$, $K = 1$, il guadagno di anello del sistema è

$$D(s)G(s) = \frac{10K(s+1)(1+0.2s)}{s(s+7)(s+3)^2(1+0.06s)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist è mostrato in Fig. 1. Per $\omega = 0^+$, il diagramma presenta il seguente asintoto verticale

$$\sigma_a = \frac{10}{63}(1 + 0.2 - \frac{1}{7} - \frac{2}{3} - 0.06) = 0.0524$$

La fase del sistema per $\omega \to \infty$ è $-\frac{3\pi}{2}$. La chiusura all'infinito è con una semicirconferenza in senso orario partendo da $\omega = 0^-$ per arrivare ad $\omega = 0^+$.

d) I diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$ sono riportati in Fig. 2.

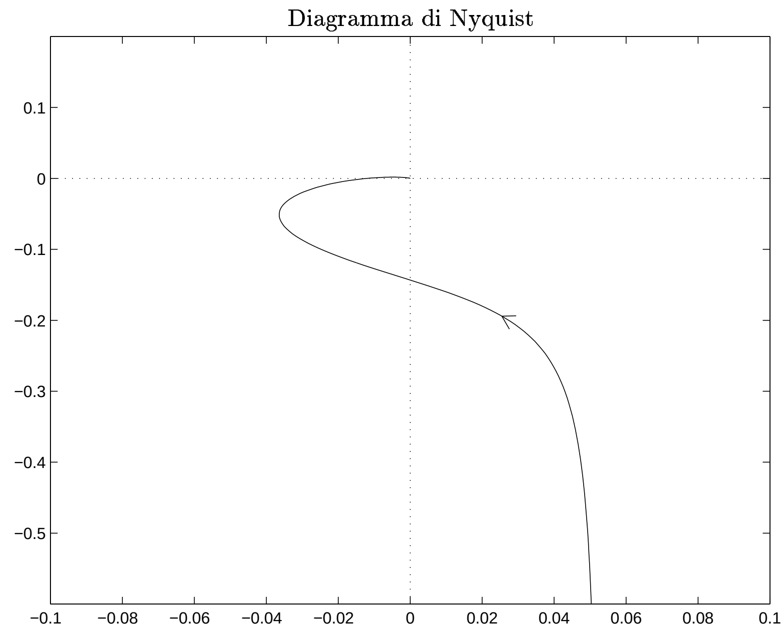


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione D(s)G(s).

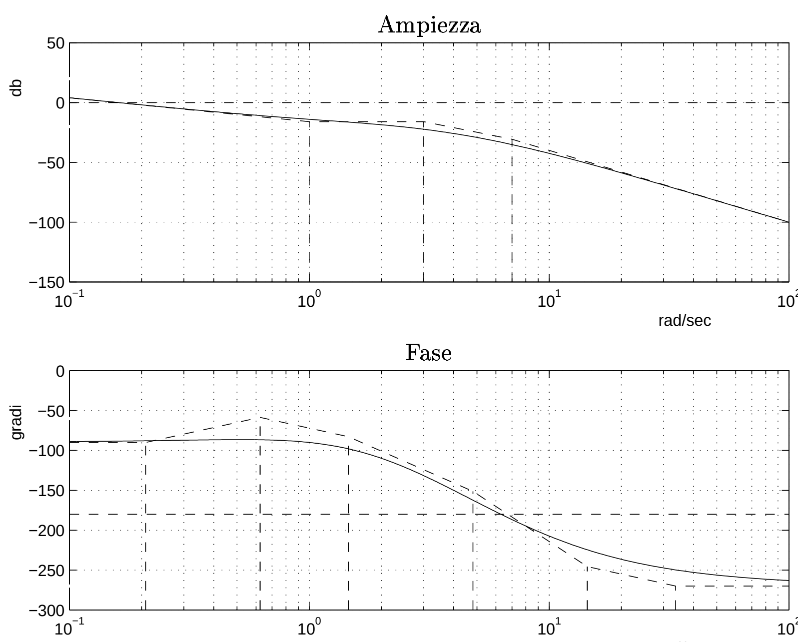


Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$.

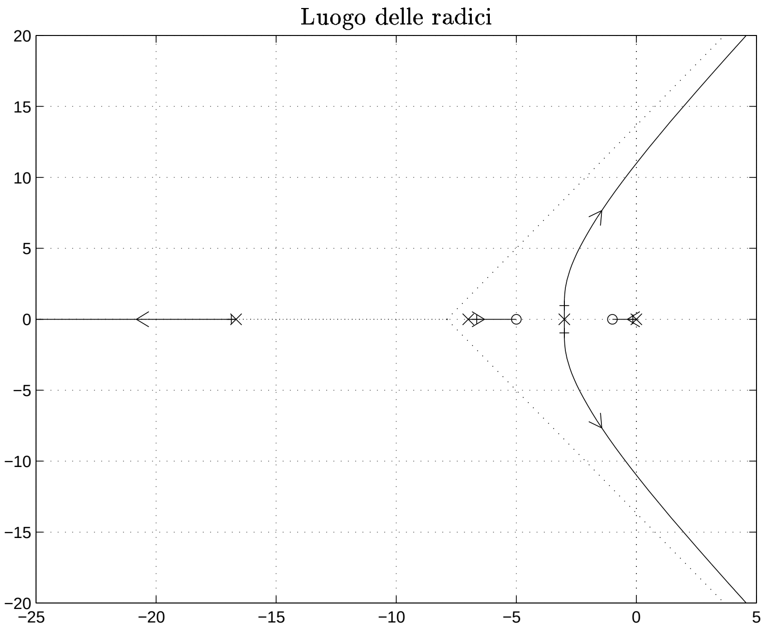


Figura 3: Luogo delle radici della funzione D(s)G(s) al variare del parametro $K > 0$.

e) Posto $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.06$, $K = 1$,l'equazione caratteristica del sistema del sistema è la seguente:

$$1 + \frac{10K(s+1)(1+0.2s)}{s(s+7)(s+3)^2(1+0.06s)} = 0$$

Il corrispondente luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il centro degli asintoti si ha in

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(-7-3-3-16.666+1+5) = -7.88$$

Il luogo delle radici per $K > 0$ è mostrato in Fig. 4.

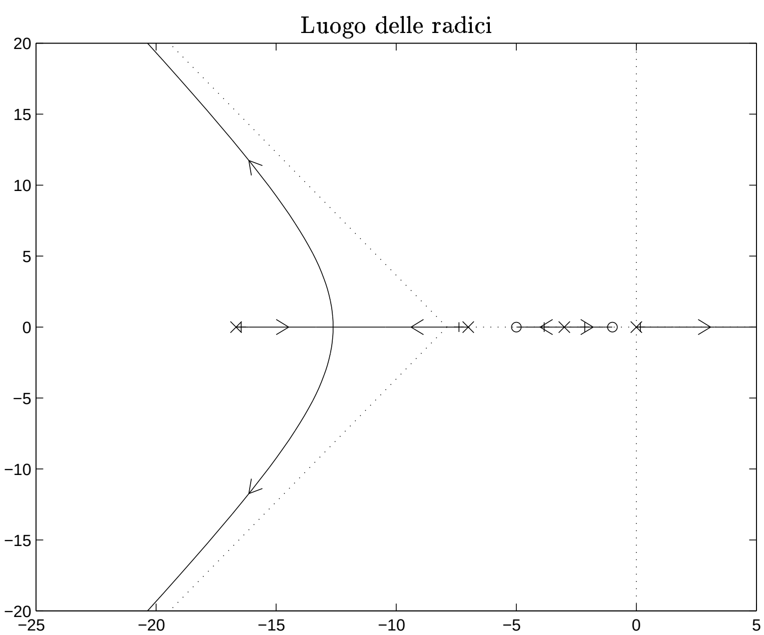


Figura 4: Luogo delle radici della funzione D(s)G(s) per $K < 0$.

f) Si sintetizza una rete anticipatrice e si sceglie il punto A in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$. Le coordinate polari dei punti $A = G_f(j10) = M_A e^{j\varphi_A}$ e B si ricavano direttamente dal diagramma di

Nyquist fornito:

$$M_A \simeq 0.58, \qquad \varphi_A \simeq 185.2^o \qquad\qquad M_B = 1, \qquad \varphi_B = 225^o$$

Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega = 10$ per avere il margine di fase voluto $M_\varphi = 45^o$ valgono

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.58} = 1.724 \qquad\qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225 - 185.2^o = 39.8$$

Utilizzando le formule di inversione si ricavano i seguenti valori di τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 0.1493, \qquad\qquad \tau_2 = 0.0294,$$

Si ottiene quindi la seguente rete anticipatrice:

$$T(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = \frac{1+0.1493s}{1+0.0294s}$$

I diagrammi di Nyquist del guadagno di anello del sistema con e senza rete correttrice sono riportati in Fig. 5.

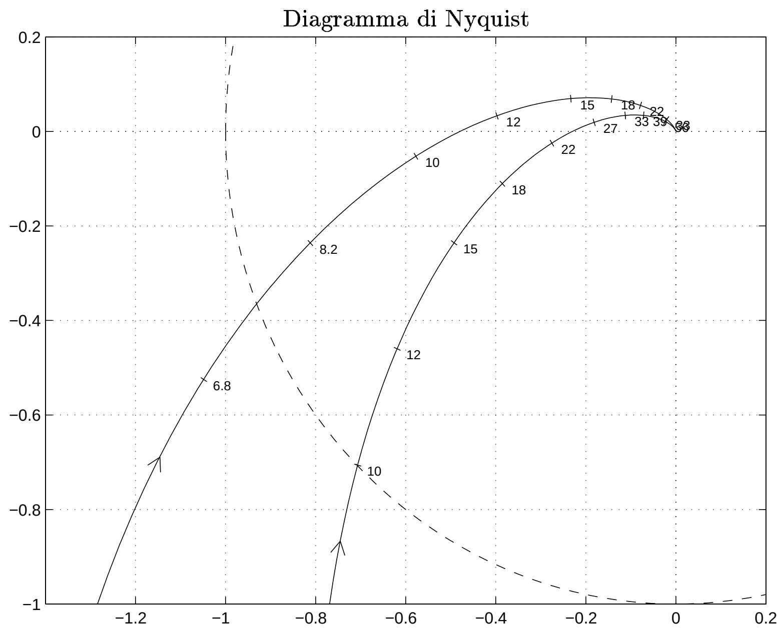


Figura 5: Diagrammi di Nyquist del guadagno di anello del sistema con e senza rete correttrice.

g) La parte lineare del sistema determina la seguente caratteristica lineare

$$x = r - K_2 y \qquad \rightarrow \qquad x = r - \frac{120}{25} y$$

dove $K_2 = G_1(0)$ è il guadagno statico del sistema $G(s)$. Imponendo il passaggio di tale caratteristica per il punto di lavoro $(3, 5)$ si determina il valore di r^* cercato:

$$3 = r^* - \frac{120}{5} \qquad \rightarrow \qquad r^* = 27$$

La caratteristica non lineare è simmetrica rispetto al punto di lavoro $(x_0, y_0) = (3,\ 5)$ per cui è possibile applicare il metodo della funzione descrittiva. La funzione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{120K}{(s+1)(s+5)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 11s^2 + 35s + 25 + 120K = 0$$

Dalla tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 35 \\
2 & 11 & 25+120K \\
1 & 360-120K & 0 \\
0 & 25+120K &
\end{array}
\qquad \rightarrow \qquad K < 3 = K^*
$$

si ricava che il margine di ampiezza del sistema è $M_A = 3$ a cui corrisponde una pulsazione ω^* che si ricava dall'equazione ausiliaria

$$\omega^* = \sqrt{35} = 5.916$$

Certamente è presente nel sistema un'oscillazione autosostenuta di pulsazione ω^* e di ampiezza X^* che si determina utilizzando la funzione descrittiva $F(X)$ di un relè ideale:

$$F(X) = \frac{20}{\pi X^*} = 3 = K^* \qquad \rightarrow \qquad X^* = \frac{20}{3\pi} = 2.12$$

h) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene:

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5\frac{s+1}{s+5} \qquad \rightarrow \qquad D(z) = k\frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-5T}z^{-1}}\bigg|_{T=1} = k\frac{1-e^{-1}z^{-1}}{1-e^{-5}z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = k\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-5}} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{1-e^{-5}}{1-e^{-1}} = 1.5713$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = k\frac{1-e^{-1}z^{-1}}{1-e^{-5}z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1-e^{-5}z^{-1}) = kE(z)(1-e^{-1}z^{-1})$$

cioè

$$m(k) = e^{-5}m(k-1) + ke(k) - ke^{-1}e(k-1)$$

da cui

$$m(k) = 0.00674m(k-1) + 1.5713e(k) - 0.578e(k-1)$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. I due poli di un sistema del 2^o ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ○ coefficiente di smorzamento δ e picco di risonanza M_R
   ⊗ coefficiente di smorzamento δ e pulsazione di risonanza ω_R
   ⊗ picco di risonanza M_R e tempo di assestamento T_a

2. Il sistema $G(s) = \dfrac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ $(K > 0,\, \tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0)$

   ⊗ ha un margine di fase positivo: $M_F > 0$
   ○ ha un margine di ampiezza positivo (maggiore di uno): $M_A > 0$ db $= 1$
   ○ posto in retroazione unitaria negativa può essere instabile

3. Il diagramma di Nyquist di un sistema stabile $G(s)$ presenta un asintoto verticale in $\sigma = -1$. Pensando ai luoghi ad M costante, è possibile affermare che il sistema retroazionato $G_0(s)$

   ○ ha un picco di risonanza unitario: $M_R = 1$
   ⊗ ha un picco di risonanza maggiore di uno: $M_R > 1$
   ⊗ ha un guadagno statico unitario: $G_0(0) = 1$
   ○ ha un guadagno statico minore di uno: $G_0(0) < 1$

4. Il diagramma di Nichols del sistema $G(s) = \frac{1}{s(1-\tau s)}$ $(\tau > 0)$ all'aumentare di ω

   ○ è una curva a modulo crescente e fase crescente
   ○ è una curva a modulo crescente e fase decrescente
   ⊗ è una curva a modulo decrescente e fase crescente
   ○ è una curva a modulo decrescente e fase decrescente

5. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva
   ○ può avere sia un polo che uno zero a parte reale positiva

6. Un sistema di tipo 0 con guadagno statico minore di 1 e chiuso in retroazione negativa

   ○ è sempre stabile
   ⊗ può essere instabile

7. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema a fase minima in cascata con un ritardo puro di valore t_0 noto

   ⊗ si può determinare il diagramma delle fasi
   ○ non si può determinare il diagramma delle fasi

8. Dato il sistema $G(s) = N(s)/D(s)$ in retroazione unitaria negativa, le radici "doppie" del corrispondente luogo delle radici

   ○ sono sempre tutte sull'asse reale
   ○ possono essere esterne all'asse reale solo se $n = grado[D(s)] \geq 2$
   ⊗ possono essere esterne all'asse reale solo se $n = grado[D(s)] \geq 4$

9. Per $K > 0$, il luogo delle radici del sistema $G(s)$ "strettamente proprio" ed avente poli e zeri che si alternano tutti sul semiasse reale negativo

   ⊗ è tutto compreso nel semipiano negativo
   ○ non ha asintoti
   ⊗ ha un solo asintoto orizzontale
   ○ ha un solo asintoto verticale

10. Il massimo ritardo di fase φ_m introdotto da una rete ritardatrice con attenuazione α è:

   ○ $\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
   ○ $\varphi_m = \arcsin \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$
   ⊗ $\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
   ○ $\varphi_m = -\arcsin \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$

11. Un sistema del 2^o ordine che presenta un coefficiente di smorzamento minore di zero e maggiore di -1 $(-1 < \delta < 0)$ è caratterizzato da:

   ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa
   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva
   ○ due poli reali distinti a parte reale negativa
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva

12. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+3)}$, il valore finale $(t \to \infty)$ della corrispondente risposta impulsiva $g(t)$ è:

   ○ $g(\infty) = 0$
   ○ $g(\infty) = 1$
   ⊗ $g(\infty) = \frac{2}{3}$
   ○ $g(\infty) = \infty$

13. Il criterio del Cerchio per determinare la stabilità di un sistema non lineare retroazionato

   ○ è un criterio necessario
   ⊗ è un criterio sufficiente
   ○ è un criterio necessario e sufficiente nel caso in cui il sistema sia a fase minima

14. La risposta impulsiva $g(n)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{1}{(z+1)(z+0.5)}$

   ○ tende a 0 per $n \to \infty$: $g(\infty) = 0$
   ○ tende a 1 per $n \to \infty$: $g(\infty) = 1$
   ⊗ ha valore iniziale nullo : $g(0) = 0$
   ○ ha valore iniziale non nullo : $g(0) = 2$

15. Nel piano z i luoghi dei punti a decadimento costante

   ⊗ sono circonferenze centrate nell'origine
   ○ sono rette uscenti dall'origine
   ○ sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine

16. La $\mathcal{Z}$-trasformata $HG(z)$ della funzione $HG(s) = H_0(s)G(s)$ dove $H_0(s)$ è il ricostruttore di ordine zero può essere calcolata nel seguente modo

   ⊗ $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)\, G(s)]$
   ○ $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s) + G(s)]$
   ⊗ $HG(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s}\, G(s)]$
   ○ $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)]\, \mathcal{Z}[G(s)]$