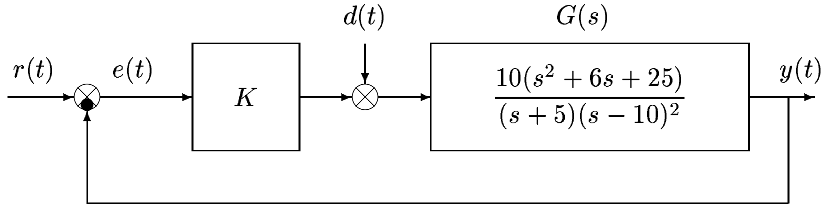
Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

b) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 0.1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 3$ e il riferimento costante $r(t) = 2$.

c) Disegnare qualitativamente il diagramma polare di Nyquist della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse reale. In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile.

d) Tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

e) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K: tracciare il luogo sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse immaginario. Individuare solo qualitativamente la posizione degli eventuali punti di diramazione sull'asse reale.

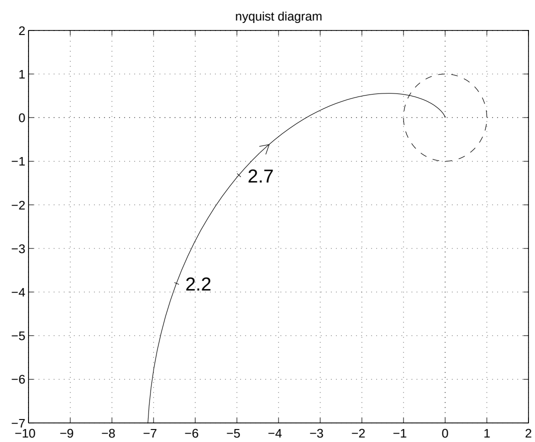
f) Si consideri il diagramma di Nyquist riportato a fianco. Utilizzando le seguenti formule di inversione valide per una rete anticipatrice

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}, \qquad \omega\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

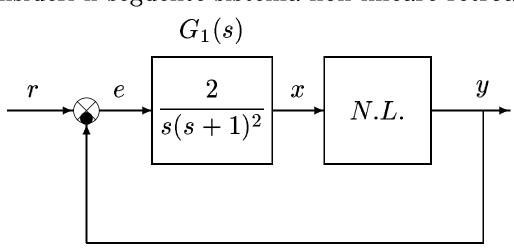
calcolare i parametri α e τ di una rete ritardatrice

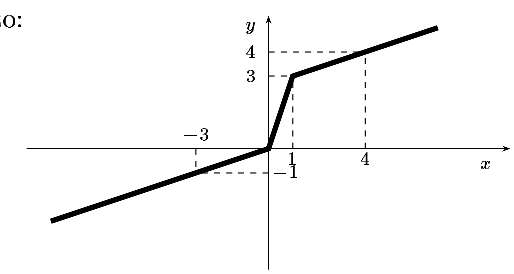
$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di ampiezza $M_A = 5$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2.2$.



g) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





In base al criterio di Popov, determinare per quali valori del riferimento costante r il sistema retroazionato è sicuramente stabile. (Nota: il diagramma di Popov della funzione $G_1(s)$ è convesso).

h) Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$G(z) = \frac{K}{z(z - 0.5)}$$

Si determini per quali valori del parametro K il corrispondente sistema retroazionato (retroazione unitaria negativa) è stabile.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{10K(s^2+6s+25)}{(s+5)(s-10)^2}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+(10K-15)s^2+60Ks+250(K+2)=0$$

La corrispondente tabella di Routh ha la seguente struttura

$$\begin{array}{c|cc l} 3 & 1 & 60K & \\ 2 & 10K-15 & 250(K+2) & \text{divido questa riga per 5} \\ 2' & 2K-3 & 50(K+2) & \\ 1 & 60K(2K-3)-50(K+2) & & \\ 0 & 60K & & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile se e solo se valgono le disuguaglianze

$$K>1.5, \qquad 12K^2-23K-10>0 \qquad K>0$$

I valori limite che si ricavano dalla seconda diseguaglianza sono:

$$\frac{23\pm\sqrt{23^2+480}}{24}=\frac{23\pm\sqrt{1009}}{24}=\begin{cases} K^*=2.282 \\ K'=-0.365 \end{cases}$$

L'intervallo di valori di K per il quale si ha stabilità è quindi il seguente:

$$K>K^*=2.282$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore K^* è

$$\omega^*=\sqrt{60K^*}=11.7$$

b) Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il valore a regime $e_\infty(t)$ dell'errore di inseguimento $e(t)$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t)=3$ e il riferimento costante $r(t)=2$ è il seguente:

$$e_\infty(t)=\frac{r_0-G(0)d_0}{1+K\,G(0)}$$

dove $r_0=2$, $d_0=3$ e $G(0)$ è il guadagno statico della funzione $G(s)$. Essendo $K_v=K$ e $G(0)=0.5$, dalla precedente relazione si ricava

$$e_\infty(t)=\frac{2-3/2}{1+K/2}=\frac{1}{2+K} \qquad \rightarrow \qquad \left|\frac{1}{2+K}\right|<e_0$$

Risolvendo rispetto al parametro K si ottiene

$$K>\frac{1}{e_0}-2 \qquad \rightarrow \qquad K>8$$

c) Il diagramma di Nyquist della funzione

$$G(s)=\frac{10(s^2+6s+25)}{(s+5)(s-10)^2}$$

è mostrato in Fig. 1 per $\omega\in[0,\ \infty]$. Per $\omega=0$ si ha la prima intersezione con l'asse reale: $\sigma_1=0.5$. Per $\omega=0^+$ il diagramma di Nyquist lascia l'asse reale in senso antiorario. Infatti, la somma delle costanti di tempo è positiva:

$$\sum\tau_i'-\sum\tau_i=\frac{6}{25}-\frac{1}{5}+\frac{2}{10}=\frac{6-5+5}{25}=\frac{6}{25}>0$$

Il sistema quindi anticipa per tutti i valori positivi della pulsazione ω in quanto l'unico polo stabile che può introdurre uno sfasamento nel sistema ha una pulsazione che coincide con la pulsazione naturale $\omega_n=5$

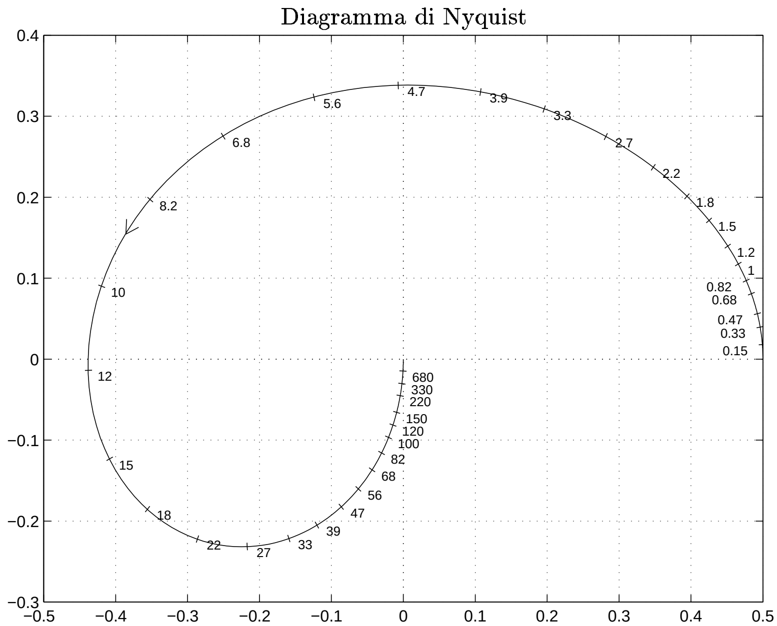


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

della coppia di zeri stabili; inoltre il contributo in anticipo dei due zeri è maggiore di quello introdotto dal polo.

La seconda intersezione con l'asse reale è quella che determina il margine di stabilità per cui si ricava facilmente dell'analisi di stabilità svolta al punto a). L'intersezione con il semiasse reale negativo si ha per

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2.282} = -0.4382 \qquad\qquad \omega^* = \sqrt{\frac{1-K^*}{17}} = 11.7$$

Il sistema $G(s)$ ha due poli a parte reale positiva e il suo diagramma polare completo non circonda ne tocca il punto critico -1, per cui in base al criterio di Nyquist si può affermare che il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è intabile.

d) I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Il valore α_0 del guadagno statico del sistema $G(s)$ è il seguente

$$\alpha_0 = G(0) = 0.5 = -6 \text{ db}$$

e) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{10K(s^2+6s+25)}{(s+5)(s-10)^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici per $K < 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici presenta un solo asintoto che coincide con l'asse reale negativo per $K > 0$ e con l'asse reale positivo per $K < 0$. Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza dei punti di intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale:

$$(K^* = 2.282,\ \ \omega^* = 11.7), \qquad\qquad (K' = -2,\ \ \omega' = 0),$$

f) L'ampiezza A e la fase ϕ della funzione di risposta armonica $G_f(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2.2$:

$$A = 7.482 \qquad\qquad \psi = -149.5$$

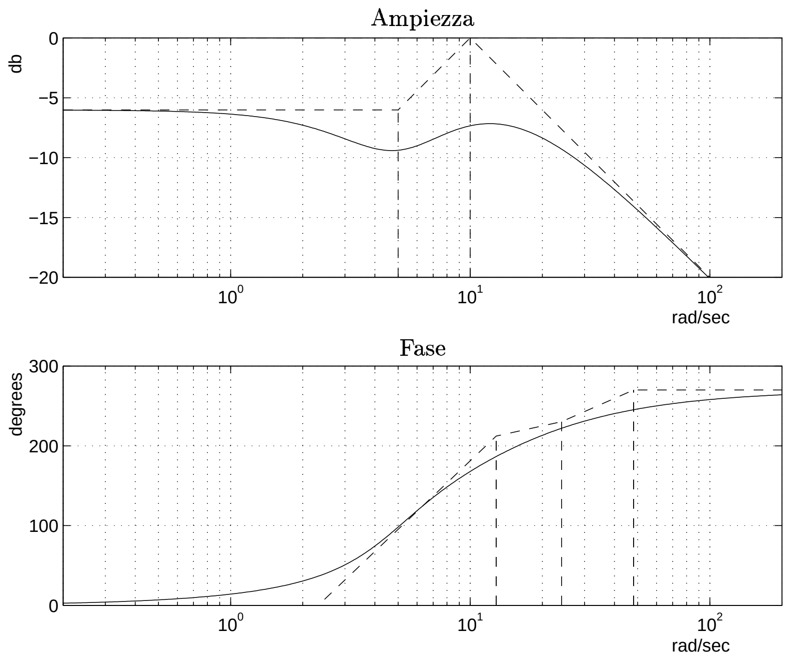


Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

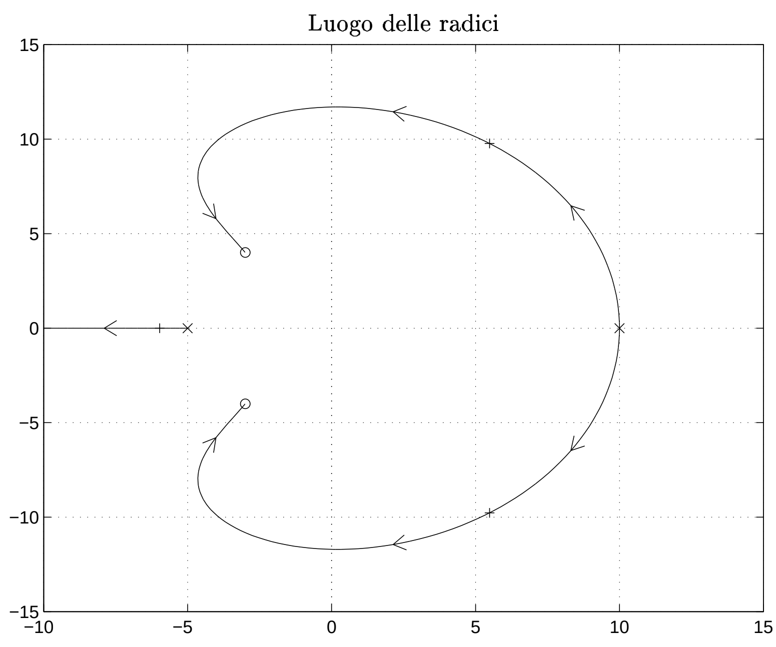


Figura 3: Luogo delle radici della funzione $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

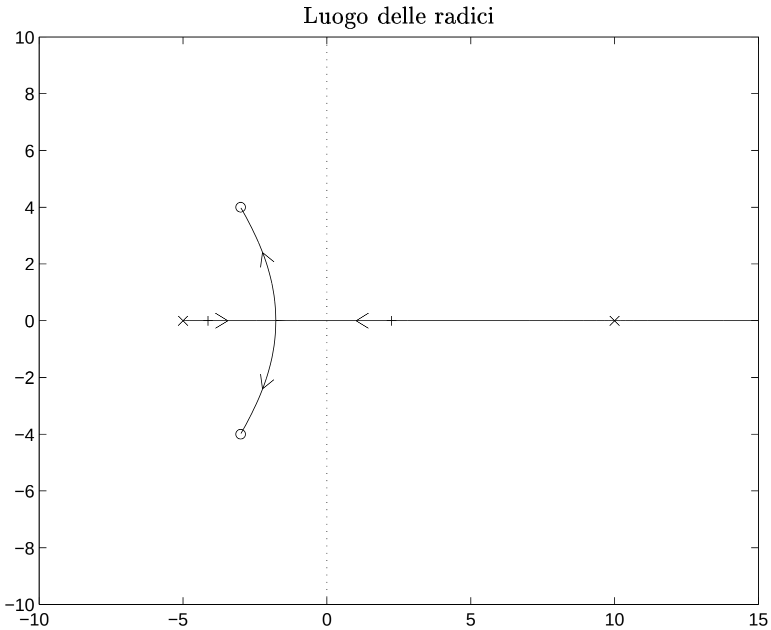


Figura 4: Luogo delle radici della funzione $G(s)$ al variare del parametro $K < 0$.

Per poter imporre al sistema retroazionato un margine di ampiezza $M_A = 5$ occorre attenuare e sfasare delle seguenti quantità

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{5 \cdot 7.482} = \frac{1}{37.41} \qquad -\varphi = -180 + 149.5 = -30.5$$

da cui si ricava

$$M = 37.41 \qquad \varphi = 30.5$$

Sostituendo nelle formule di inversione si ottiene

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0.0228, \qquad \tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 32.7323$$

La rete ritardatrice ha quindi la seguente forma

$$R(s) = \frac{1 + 0.7477s}{1 + 32.732s}$$

I diagrammi di Nyquist della funzione $G_f(s)$ con e senza rete correttrice sono mostrati in Fig. 5.

g) La presenza di un integratore a monte della non linearità indica che il punto di lavoro corrispondente al riferimento costante r è la retta orizzontale $y = r$ (essendo $K_2 = K_3 = 1$).

Poicheè il diagramma di Popov della funzione $G_1(s)$ è convesso, il valore β^* massimo coincide con il margine di ampliezza K^* del sistema

$$\beta^* = K^* = 1$$

Si consideri ora un punto generico (x_0, y_0) della caratteristica non lineare $y = y(x)$ e centrato in tale punto si disegni un settore delimitato dalle due rette $y = 0$ e $y = x$. I punti (x_0, y_0) a cui corrisponde un settore che racchiude al proprio interno tutta la non linearità $y = y(x)$ sono quelli caratterizzati da un'ordinata

$$y > 4, \qquad y < -1$$

I valori del riferimento r a cui corrisponde un punto di lavoro certamente stabile in base al criterio di Popov sono

$$r > 4, \qquad \text{ed} \qquad r < -1$$

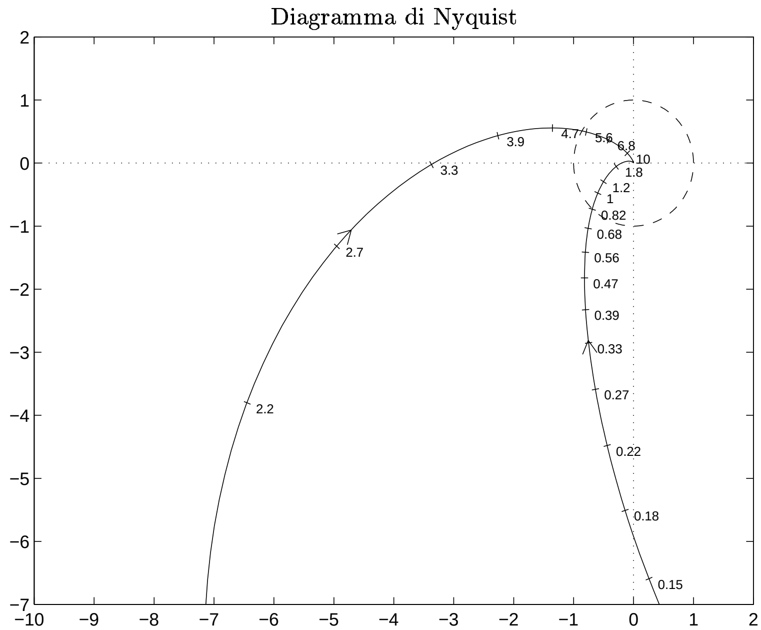


Figura 5: Diagrammi di Nyquist della funzione $G_f(s)$ e del corrispondente sistema con rete ritardatrice.

h) La stabilità del sistema lineare discreto $G(z)$ posto in retroazione unitaria negativa è completamente determinata dalla seguente equazione caratteristica

$$1 + G(z) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{K}{z(z-0.5)} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad z^2 - 0.5z + K = 0$$

Si ha stabilit‘a se i poli di tale equazione sono a modulo minore di 1.

$$z_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 - 4K}}{2}$$

Utilizzando la trasformazione bilineare

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

si ottiene

$$\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} - 0.5\frac{(1+w)}{(1-w)} + K = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad (1+w)^2 - 0.5(1-w^2) + K(1-w)^2 = 0$$

da cui si ha

$$(1.5+K)w^2 + 2(1-K)w + 0.5 + K = 0$$

Applicando Routh, si ha che il sistema retroazionato è stabile per

$$-0.5 < K < 1$$

Infatti, solo per tali valori di K tutti e tre i coefficienti del polinomio caratteristico in w sono positivi.

Esame scritto di "Controlli Automatici" - Modena - 16 Settembre 1998 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. La largezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$

   ⊗ aumenta all'aumentare di ω_n
   ⊗ è proporzionale ad ω_n
   ○ aumenta all'aumentare di δ
   ○ è proporzionale a δ

2. Si ponga la funzione $\sin 2t$ in ingresso al sistema $G(s) = \frac{2}{s+2}$. A regime, l'ampiezza A e la fase φ della sinusoide $A\sin(2t+\varphi)$ in uscita valgono

   ○ $A = 1/2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$
   ○ $A = 1/2$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$
   ○ $A = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$
   ⊗ $A = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

3. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$ vale

   ○ $g(0^+) = 0$
   ○ $g(0^+) = 1$
   ⊗ $g(0^+) = 2$
   ○ $g(0^+) = 3$

4. Il diagramma di Nichols del sistema $G(s) = \frac{1}{s-a}$ $(a > 0)$

   ○ è una curva crescente in modulo con fase $\varphi \in [-\frac{3\pi}{2},\ -\pi]$
   ○ è una curva crescente in modulo con fase $\varphi \in [-\pi,\ -\frac{\pi}{2}]$
   ⊗ è una curva decrescente in modulo con fase $\varphi \in [-\frac{3\pi}{2},\ -\pi]$
   ○ è una curva decrescente in modulo con fase $\varphi \in [-\pi,\ -\frac{\pi}{2}]$

5. L'asintoto verticale σ_a per $\omega \to 0^+$ del diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = 4\frac{(1+2s)}{s(2+s)}$ vale

   ○ $\sigma_a = -3$
   ○ $\sigma_a = -2$
   ○ $\sigma_a = +2$
   ⊗ $\sigma_a = +3$

6. Tra i luoghi ad M costante relativi ai diagrammi polari, quello relativo ad $M = 2$

   ○ è una circonferenza avente l'origine al proprio interno
   ⊗ è una circonferenza avente il punto -1 al proprio interno
   ○ è una circonferenza passante per i punti 0 e -1
   ○ è una retta verticale

7. In corrispondenza di un polo multiplo di ordine h del luogo delle radici della funzione $G(s) = N(s)/D(s)$, le tangenti agli h rami entranti

   ○ sono simmetriche rispetto all'asse reale
   ○ sono simmetriche rispetto all'asse immaginario
   ⊗ dividono il piano in parti uguali

8. Il criterio del Cerchio per lo studio della stabilità di sistemi non lineari

   ○ è un criterio necessario e sufficiente
   ○ è un criterio solo necessario
   ⊗ è un criterio solo sufficiente

9. Una rete correttrice a ritardo e anticipo caratterizzata dai parametri τ_1, τ_2 e α ha sfasamento nullo per

   ○ $\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$
   ○ $\omega = \frac{1}{\alpha\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$
   ⊗ $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$
   ⊗ $\omega \to \infty$

10. Nella sintesi di un regolatore $D(s)$, la cancellazione polo-zero è applicabile

   ⊗ agli zeri stabili del sistema
   ⊗ ai poli stabili del sistema
   ○ anche agli zeri instabili del sistema
   ○ anche ai poli instabili del sistema

11. L'uso della retroazione tachimetrica nel controllo di un servomeccanismo di posizione

   ○ introduce un polo nel controllore
   ⊗ introduce uno zero nel controllore
   ○ modifica la costante di posizione K_p del sistema retroazionato
   ⊗ modifica la costante di velocità K_v del sistema retroazionato

12. Il diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \dfrac{e^{-t_0 s}(1-\tau s)}{(1+\tau s)}$ ($t_0 > 0$ e $\tau > 0$)

   ⊗ è una circonferenza percorsa infinite volte
   ○ è una spirale descrescente in modulo
   ○ è una spirale divergente in modulo

13. Il sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ posto in retroazione unitaria negativa può essere stabilizzato con

   ○ un regolatore standard PI
   ⊗ una rete anticipatrice
   ○ una rete ritardatrice
   ⊗ una rete a ritardo e anticipo

14. La $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ della successione $x(k) = a^k$ è

   ○ $X(z) = \frac{1}{z-a}$
   ⊗ $X(z) = \frac{z}{z-a}$
   ○ $X(z) = \frac{1}{z+a}$
   ○ $X(z) = \frac{z}{z+a}$

15. Nel piano z i luoghi dei punti a pulsazione naturale ω_n costante

   ○ sono circonferenze centrate nell'origine
   ○ sono circonferenze centrate in z=1
   ○ sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine
   ⊗ nessuna delle precedenti

16. Nel metodo di descretizzazione per "corrispondenza poli/zeri" applicato alla funzione $D(s)$, la compensazione del guadagno k alle alte frequenze prevede l'utilizzo della relazione

   ○ $\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{z\to 1} G(z)$
   ⊗ $\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{z\to -1} G(z)$
   ○ $\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{z\to\infty} G(z)$