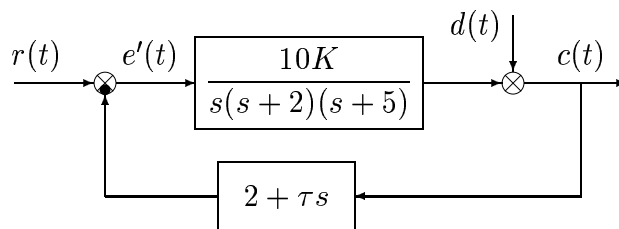
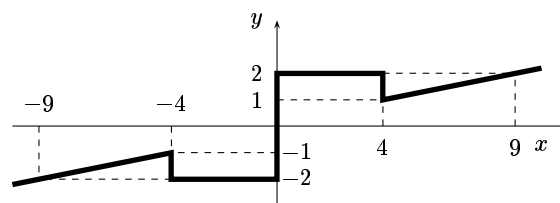
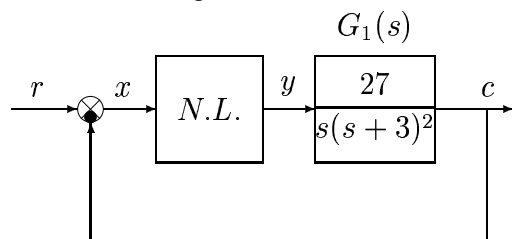


Sia dato il seguente sistema dinamico in retroazione



- Determinare, in funzione del parametro τ , per quali valori di K il sistema retroazionato è stabile.
- Posto $\tau = 0.2$, determinare il valore di K che garantisce un errore a regime $e(\infty) \leq 0.1$ in risposta al segnale d'ingresso $r(t) = 0.5t$. L'errore è definito come segue: $e(t) = r(t) - 2c(t)$. Determinare inoltre, in funzione di K e τ , il valore a regime dell'uscita quando $d(t) = 3$.
- Posto $K = 4$ e $\tau = 0.1$, tracciare qualitativamente il diagramma di Nyquist del guadagno di anello del sistema. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale e le eventuali intersezioni con il semiasse negativo.
- Posto $K = 4$ e $\tau = 0.1$, tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello del sistema.
- Posto $\tau = 0.1$, tracciare qualitativamente i luoghi delle radici del sistema retroazionato sia per valori positivi che per valori negativi del parametro K . Calcolare esattamente la posizione degli asintoti e le intersezioni con l'asse immaginario. La posizione dei punti di diramazione deve essere determinata solo in modo “qualitativo”.
- Posto $K = 1/(1-\tau)$, disegnare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. (Nota: per $\tau = 0$ la posizione dei poli del sistema retroazionato è $p_1 = -5.88$ e $p_{2,3} = -0.56 \pm 1.76j$). Senza eseguire i calcoli, descrivere il procedimento che si dovrebbe seguire per calcolare i valori di τ a cui corrisponde un tempo di assestamento $T_a = 3$.
- Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Determinare il punto di lavoro (x_0, y_0) del sistema retroazionato corrispondente al riferimento costante $r = 3$. Determinare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva della non linearità assegnata. Determinare inoltre se esiste o meno un'oscillazione autosostenuta nell'intorno del punto di lavoro (x_0, y_0) .

- Calcolare la risposta $y(n)$ al gradino unitario del seguente sistema dinamico discreto:

$$G(z) = \frac{1}{(z - 0.5)}$$

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{10K(2 + \tau s)}{s(s+2)(s+5)} = 0 \quad \longrightarrow \quad s^3 + 7s^2 + 10(1 + K\tau)s + 20K = 0$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 1 & 10(1 + K\tau) \rightarrow 1 > 0 \\ 2 & 7 & 20K \rightarrow 7 > 0 \\ 1 & 70(1 + K\tau) - 20K & \rightarrow (7\tau - 2)K > -7 \\ 0 & 20K & \rightarrow K > 0 \end{array}$$

Indicando con τ^* il seguente valore critico

$$\tau^* = \frac{2}{7} = 0.286$$

si ha che il sistema è stabile per

$$\begin{cases} K > 0 & \text{se } \tau > \tau^* \\ 0 < K < \frac{7}{2 - 7\tau} = K^*(\tau) & \text{se } \tau < \tau^* \end{cases}$$

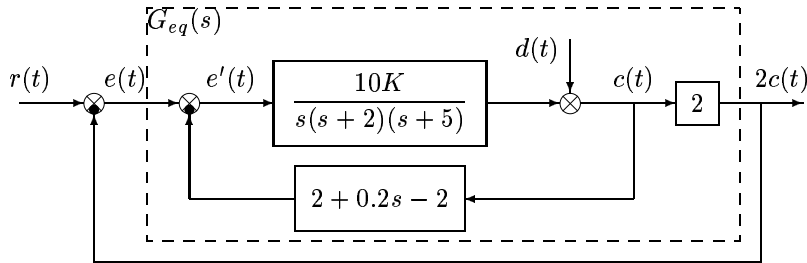
Per $\tau = 0$ il margine di stabilità del sistema è $K = 3.5$. Per $\tau = 0.1$ il margine di stabilità del sistema è $K = 5.385$. La pulsazione $\omega^*(\tau)$ corrispondente al guadagno critico $K^*(\tau)$ si ottiene direttamente dall'equazione ausiliaria:

$$7s^2 + 20K^*(\tau) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^*(\tau) = \sqrt{\frac{K^*(\tau)}{7}} = \sqrt{\frac{20}{2 - 7\tau}}$$

b) Posto $\tau = 0.2$, la funzione di trasferimento equivalente $G_{eq}(s)$ relativa all'errore $e(t) = r(t) - 2c(t)$ è la seguente

$$G_{eq}(s) = \frac{\frac{20K}{s(s+2)(s+5)}}{1 + \frac{2Ks}{s(s+2)(s+5)}} = \frac{20K}{s[(s+2)(s+5) + 2K]}$$

come si ricava dalla seguente elaborazione grafica



La costante di velocità del sistema $G_{eq}(s)$ è

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{eq}(s) = \frac{20K}{10 + 2K} = \frac{2K}{1 + 0.2K}$$

La condizione sull'errore a regime per ingresso a rampa $r = 0.5t$ è soddisfatta se:

$$e(\infty) = \frac{0.5}{K_v} \leq 0.1 \quad \longrightarrow \quad 0.5 \frac{1 + 0.2K}{2K} \leq 0.1 \quad \longrightarrow \quad K \geq \frac{5}{2 - 1} = 5$$

Per quanto riguarda l'influenza del disturbo $d(t)$ sull'uscita, si ha che

$$y_\infty(t) = G_d(s)|_{s=0} 3 = \frac{s(s+2)(s+5)}{s(s+2)(s+5) + 10K(2 + \tau s)} \Big|_{s=0} 3 = 0$$

cioè il disturbo costante $d(t) = 3$ non ha nessuna influenza sul valore a regime dell'uscita.

c) Posto $K = 4$ e $\tau = 0.1$, il guadagno di anello del sistema è

$$G_s = \frac{4(s+20)}{s(s+2)(s+5)}$$

L'andamento del corrispondente diagramma di Nyquist è mostrato in Fig. 1. È presente un asintoto

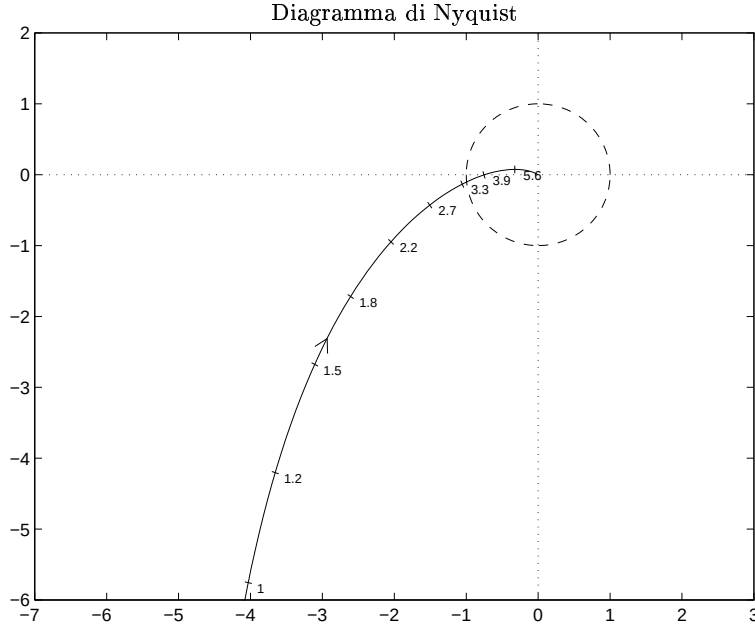


Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $G(s)$.

verticale in

$$\sigma_a = \frac{80}{10} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8(1-10-4)}{20} = -\frac{26}{5} = -5.2$$

Dall'analisi di stabilità fatta al punto a) si ricava che il margine di ampiezza del sistema è

$$M_A = \frac{1}{4} K^*(\tau)|_{\tau=0.1} = \frac{7}{4(2-7\tau)} \Big|_{\tau=0.1} = \frac{35}{26} \simeq 1.346$$

L'intersezione σ_0 con il semiasse negativo e la corrispondente pulsazione ω_0 sono quindi i seguenti:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{M_A} = -\frac{26}{35} = -0.743 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \omega^*(\tau)|_{\tau=0.1} = \sqrt{\frac{20}{2-7\tau}} \Big|_{\tau=0.1} = 3.922$$

d) Posto $K = 4$ e $\tau = 0.1$, il guadagno di anello del sistema è

$$G(s) = \frac{4(s+20)}{s(s+2)(s+5)}$$

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi sono riportati in Fig. 2. Per $\omega = 2$ il diagramma asintotico delle ampiezze ha un guadagno A pari a

$$A = \frac{4(20)}{2(2)(5)} = 4 = 12.04 \text{ db}$$

e) Posto $\tau = 0.1$, il guadagno di anello del sistema è

$$G(s) = \frac{K(s+20)}{s(s+2)(s+5)}$$

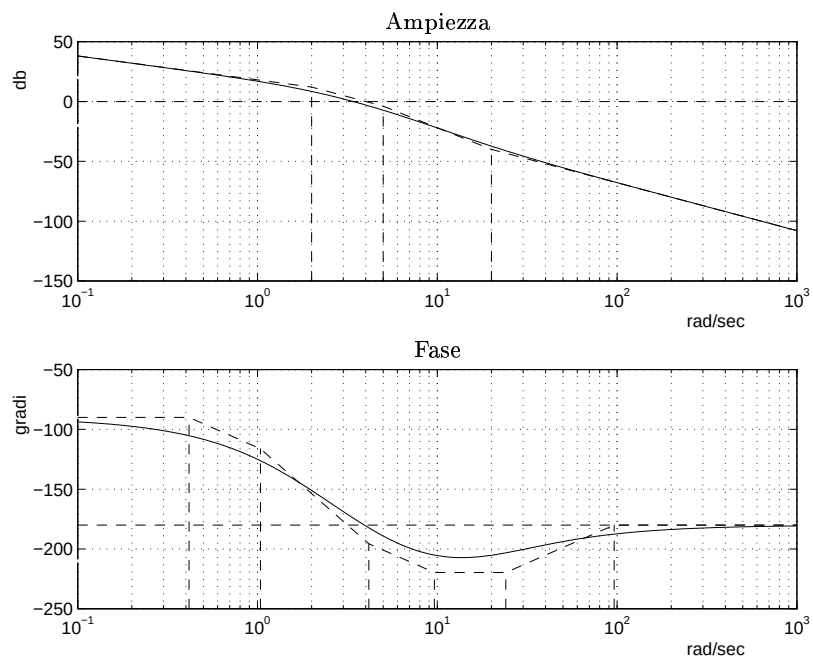


Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode.

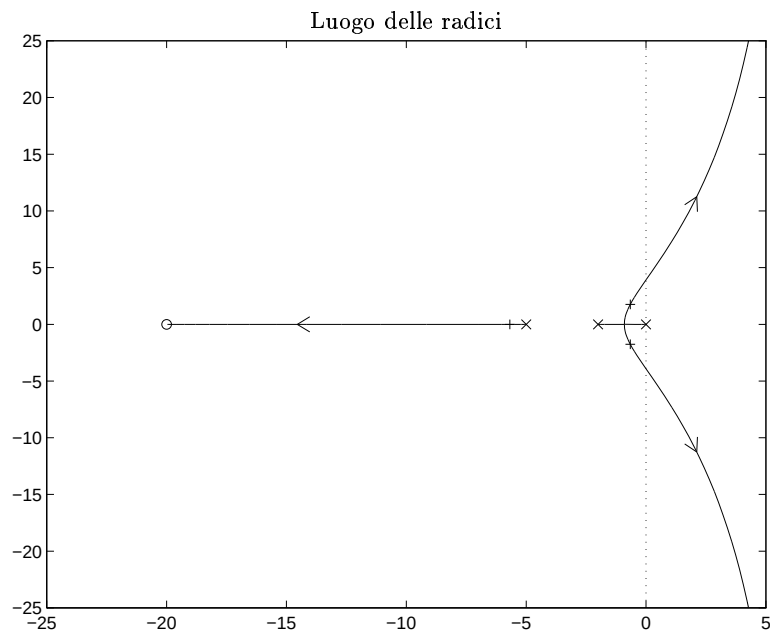


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$.

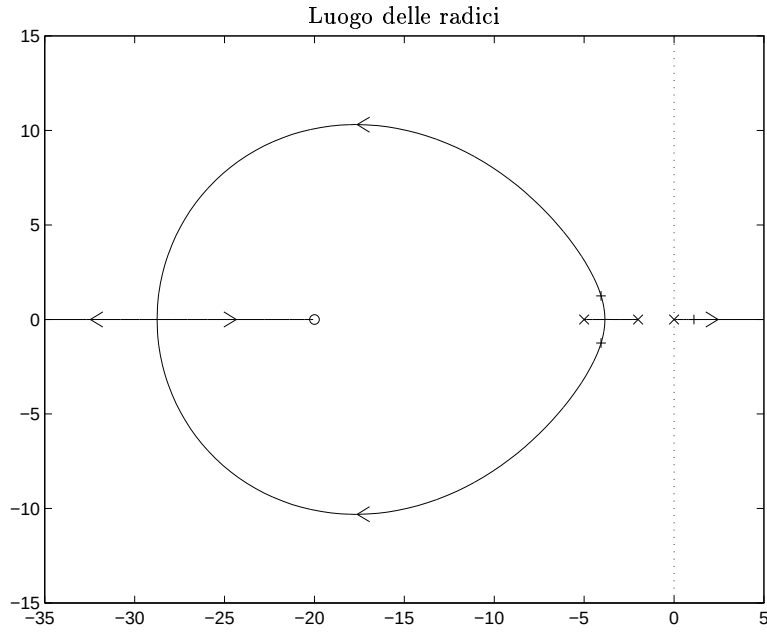


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K < 0$.

Il luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Quello per $K < 0$ è mostrato in Fig. 4. Il centro stella degli asintoti è

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-2 - 5 + 20) = \frac{13}{2} = 7.5$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno per

$$K^* = \frac{7}{(2 - 7\tau)} \Big|_{\tau=0.1} = \frac{140}{26} \simeq 5.385$$

in corrispondenza della pulsazione

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{2 - 7\tau}} \Big|_{\tau=0.1} = 3.922$$

f) Posto $K = 1/(1 - \tau)$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{10(2 + \tau s)}{s(s + 2)(s + 5)(1 - \tau)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s + 2)(s + 5) + 20 - \tau s[(s + 2)(s + 5) - 10] = 0$$

Tale equazione può essere trasformata nel seguente modo:

$$1 - \frac{\tau s^2(s + 7)}{s(s + 2)(s + 5) + 20} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\tau s^2(s + 7)}{(s + 5.878)[(s + 0.5612)^2 + 1.7572]} = 0$$

Il corrispondente contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ è riportato in Fig. 5. Nel grafico le tre crocette indicano la p[osizione delle tre radici nel caso $\tau = 0.5$. Il grado relativo è nullo per cui non vi sono asintoti. Per $\tau \rightarrow 1$, due rami del contorno delle radici tendono all'infinito lungo un asintoto verticale di ascissa $\sigma_a = -2.5$. Per $\tau = 1$ i due rami si incontrano all'infinito dove si ha un punto di diramazione. Per $\tau > 1$ i due rami proseguono sull'asse reale fino a giungere negli zeri quando $\tau \rightarrow \infty$.

Si ha un tempo di assestamento $T_a = 3s$ quando la parte reale σ dei poli dominanti del sistema retroazionato vale

$$T_a = 3 = \frac{3}{|\sigma|} \quad \rightarrow \quad \sigma = -1$$

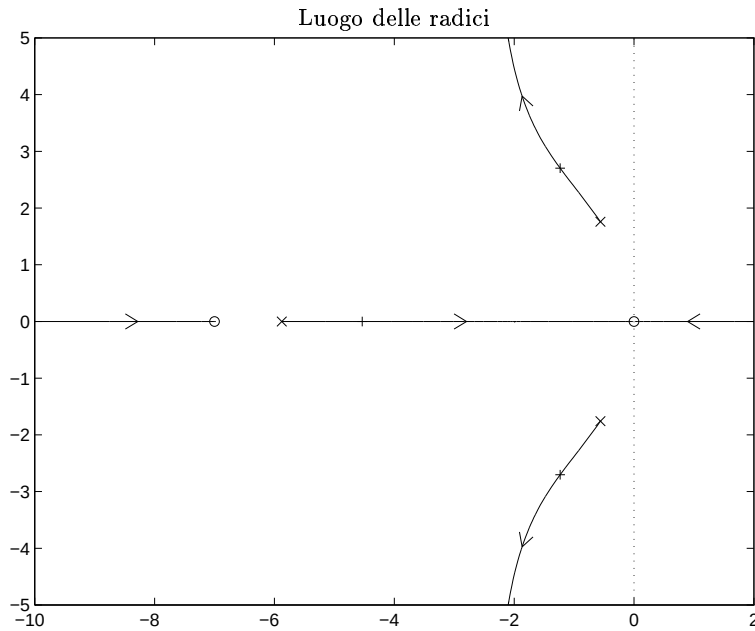


Figura 5: Contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$.

Per determinare i valori di τ cercati occorre fare un cambiamento di coordinate $w = s + 1$ in modo da portare l'asse immaginario in corrispondenza della retta verticale $\sigma = -1$. L'equazione caratteristica si trasforma come segue:

$$w = s + 1 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\tau(w-1)^2(w+6)}{(w-1)(w+1)(w+4)+20} = 0$$

Applicando poi il criterio di Routh si determinano i valori di τ che garantiscano il tempo di assestamento desiderato.

- g) Essendo presente un integratore a valle della non linearità, la retta di carico coincide con l'asse dell'ascisse per cui il punto di lavoro è l'origine: $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

La funzione descrittiva della non linearità assegnata è mostrata in Fig. 6. Per $X \rightarrow \infty$ la funzione descrittiva tende a 0.2. Il margine di ampiezza del sistema lineare assegnato è $K^* = 2$. Nel sistema si instaura sicuramente un'oscillazione autosostenuta alla pulsazione $\omega^* = 3$ caratterizzata da un'ampiezza X che si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{8}{\pi X} = K^* \quad \rightarrow \quad X = \frac{8}{\pi K^*} = \frac{4}{\pi} = 1.273$$

- h) La risposta $Y(z)$ al gradino unitario del sistema $G(z)$ è:

$$Y(z) = G(z)R(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)}$$

Per calcolare l'antitrasformata, si utilizza il metodo della scomposizione in fratti semplici

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2}{(z-1)} - \frac{2}{(z-0.5)}$$

da cui

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)} - \frac{2z}{(z-0.5)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 2[1 - (0.5)^n]$$

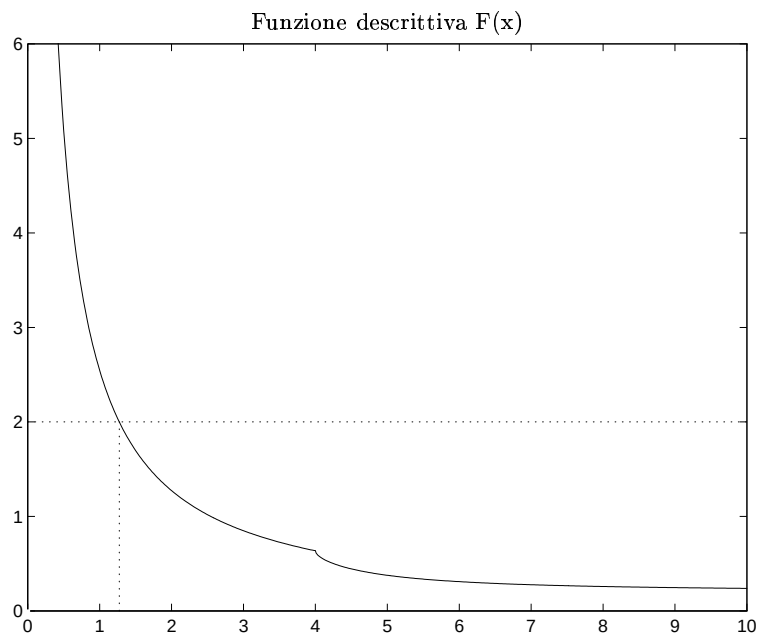


Figura 6: Funzione descrittiva della non linearità assegnata.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati
 - ☒ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni con parametri costanti nel tempo
 - ☐ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni con parametri che variano nel tempo
 - ☒ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
 - ☒ permette di calcolare la risposta libera del sistema
2. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace
 - ☒ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$
 - ☒ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow 0$
 - ☐ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$
 - ☐ del segnale $x(t) = t^2e^{-3t}$
3. Il sistema dinamico $G(s) = \frac{3}{1+3s}$
 - ☐ ha un guadagno statico unitario
 - ☐ ha una larghezza di banda $\omega_f = 3$
 - ☒ ha un picco di risonanza unitario $M_R = 1$
 - ☐ ha un tempo di assestamento $T_a = 3$
4. La funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema lineare a fase minima è completamente nota
 - ☒ se è nota l'equazione differenziale del sistema
 - ☒ se è noto il diagramma di Bode delle ampiezze
 - ☐ se è nota la posizione di tutti i poli e di tutti gli zeri del sistema
5. Sapendo che il diagramma di Nichols di un sistema $G(s)$ a fase minima passa per i punti $(-140^\circ, 0 \text{ db})$, $(-160^\circ, -8 \text{ db})$, e $(-180^\circ, -20 \text{ db})$, è possibile affermare che
 - ☒ il margine di fase del sistema è $M_F = 40$
 - ☐ il margine di fase del sistema è $M_F = 60$
 - ☒ il margine di ampiezza del sistema è $M_A = 10$
 - ☒ il margine di ampiezza del sistema è $M_A = 20 \text{ db}$
6. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari in s . Utilizzando la tabella di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica
 - ☐ ha sicuramente almeno una radice a parte reale positiva
 - ☒ ha sicuramente un polo nell'origine
 - ☒ ha lo stesso numero di radici a parte reale positiva e a parte reale negativa
 - ☐ ha tutti i poli sull'asse immaginario
7. Per avere errore a regime nullo a fronte del segnale di ingresso $R(s) = \frac{R_0}{s^2}$ il guadagno di anello del sistema retroazionato
 - ☐ deve avere almeno un polo nell'origine
 - ☒ deve avere almeno due poli nell'origine
 - ☐ deve avere una costante di velocità K_v finita
8. Posto $b > a > 0$, il sistema dinamico $G(s) = \frac{b(s+a)}{a(s+b)}$
 - ☐ è una rete ritardatrice
 - ☒ è una rete anticipatrice a guadagno unitario
 - ☐ non è una rete corettrice

9. Il diagramma di Nyquist di un sistema stabile $G(s)$ presenta un asintoto verticale in $\sigma = -1$. Pensando ai luoghi ad M costante, è possibile affermare che il sistema retroazionato
- ☐ ha un picco di risonanza unitario: $M_R = 1$
 - ☒ ha un picco di risonanza maggiore di uno: $M_R > 1$
 - ☐ ha pulsazione di risonanza nulla: $\omega_R = 0$
 - ☒ ha pulsazione di risonanza positiva: $\omega_R > 0$
10. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno sull'asse reale, presenta un luogo delle radici
- ☒ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale
 - ☒ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale
 - ☐ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale
11. Il sistema $G(s)$, supposto a fase minima e privo di zeri, ha un diagramma di Bode delle ampiezze che interseca l'asse a guadagno unitario nel punto centrale di un tratto a pendenza -2. Una stima del margine di fase M_F del sistema è la seguente
- ☐ $M_F \simeq \frac{\pi}{2}$
 - ☒ $M_F \simeq 0$
 - ☐ $M_F \simeq -\frac{\pi}{2}$
12. Sia $F(X)$, reale monotona e crescente, la funzione descrittiva di una non linearità posta in retroazione negativa su un sistema $G(s)$ del quarto ordine a fase minima e privo di zeri. Se nel piano di Gauss le traiettorie $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ si intersecano, allora
- ☐ nel sistema è presente una sola autoscillazione stabile
 - ☒ nel sistema è presente una sola autoscillazione instabile
 - ☐ possono essere presenti anche più punti di intersezione
13. Il regolatore standard PID: $D(s) = K_p(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s})$
- ☐ è un sistema fisicamente realizzabile
 - ☒ non è un sistema fisicamente realizzabile
 - ☐ è sempre caratterizzato da una coppia di zeri reali distinti
14. Da un punto di vista “frequenziale”, nella banda $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$ il ricostruttore di ordine zero $H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$
- ☒ è un passabasso
 - ☐ è un passabanda
 - ☐ ha guadagno statico unitario $H_0(j0) = 1$
 - ☒ ha guadagno nullo per $\omega = \frac{\pi}{T}$: $H_0(j\frac{\pi}{T}) = 0$
15. Il metodo di discretizzazione per “trasformazione bilineare con precompensazione frequenziale” applicato alla funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_1$ opera la seguente sostituzione
- ☒ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
16. Sia $X(z)$ la Z -trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore finale afferma che
- ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} zX(z)$
 - ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} zX(z)$
 - ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z^{-1})X(z)$
 - ☒ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$