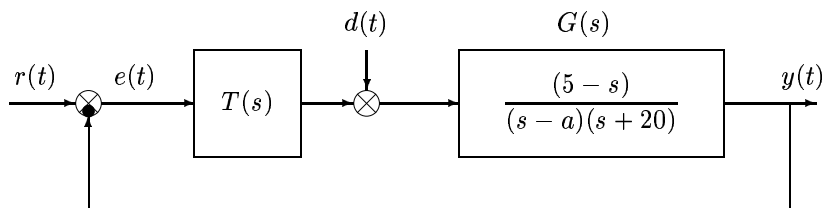


Sia dato il seguente sistema in retroazione:

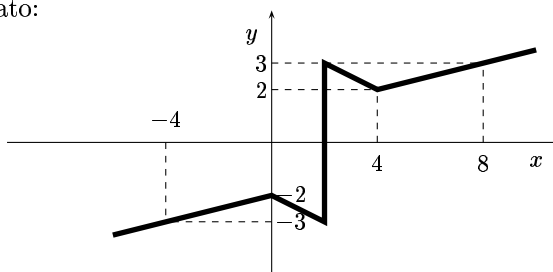
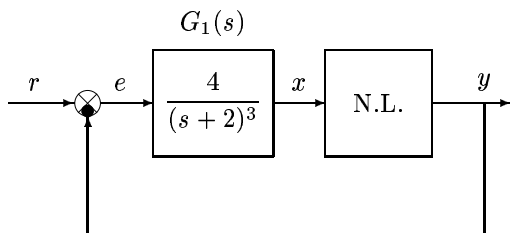


- Posto $T(s) = K$, determinare, in funzione del parametro $a > 0$, per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Per quali valori del parametro a il sistema retroazionato è sempre instabile?
- Posto $T(s) = 10$ e $a = 1$, determinare il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita $y(t)$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo $d(t) = 8$ e il riferimento $r(t) = 2 \cos 5t$.
- Posto $T(s) = 10$ e $a = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma polare di Nyquist del guadagno di anello $T(s)G(s)$. Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse reale, i corrispondenti valori della pulsazione ω e dire se, in base al criterio di Nyquist, il sistema retroazionato è stabile.
- Posto $T(s) = 10$ e $a = 1$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)G(s)$.
- Posto $T(s) = K$ e $a = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Calcolare esattamente i punti di diramazione del luogo delle radici. Indicare qual è il punto del luogo delle radici a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento T_a per il sistema retroazionato.
- Posto $a = 1$ e utilizzando il metodo della cancellazione polo-zero, determinare il valore dei parametri b, c e K della rete correttiva

$$T(s) = K \frac{s+b}{s+c}$$

in modo che i poli $p_{1,2}$ del sistema retroazionato siano reali coincidenti e posizinati in $p_{1,2} = -10$. [Suggerimento: dopo aver operato la cancellazione polo-zero, determinazione il valore dei parametri c e K utilizzando il metodo del luogo delle radici (parametrizzato rispetto a b) al variare del parametro K].

- Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Per quale valore del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato è in $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Tracciare qualitativamente l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della funzione $y = y(x)$ nell'intorno del punto di lavoro e discutere la presenza o meno di oscillazioni autosostenute. Determinare la pulsazione ω^* delle eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema retroazionato.

- Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 30 \frac{s+20}{s+50}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(5-s)}{(s-a)(s+20)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (20-a-K)s + 5K - 20a = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 5K - 20a \\ 1 & 20 - a - K & \\ 0 & 5K - 20a & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow K < 20 - a \\ \rightarrow K > 4a \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile per i seguenti valori di K

$$K_1 = 4a < K < 20 - a = K_2$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore K_2 vale

$$\omega^* = \sqrt{5K_2 - 20a}$$

Il sistema retroazionato è sempre instabile se $K_1 > K_2$ cioè se

$$4a > 20 - a \quad \rightarrow \quad a > 4$$

b) Si ponga $T(s) = 10$ e $a = 1$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'uscita $Y(s)$ può essere espressa come somma dei contributi derivanti dall'ingresso $R(s)$ e dal disturbo $D(s)$:

$$Y(s) = G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) = \frac{G(s)}{1 + T(s)G(s)}D(s) + \frac{T(s)G(s)}{1 + T(s)G(s)}R(s)$$

Sostituendo si ottiene

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(5-s)}{(s-1)(s+20) + 10(5-s)}}_{G_d(s)} D(s) + \underbrace{\frac{10(5-s)}{(s-1)(s+20) + 10(5-s)}}_{G_r(s)} R(s)$$

cioè

$$Y(s) = \frac{(5-s)}{s^2 + 9s + 30} D(s) + \frac{10(5-s)}{s^2 + 9s + 30} R(s)$$

Dall'analisi svolta al punto a) sappiamo che per $T(s) = 10$ il sistema è stabile, per cui il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita può essere calcolato semplicemente utilizzando il “concetto” di funzione di risposta armonica:

$$y_\infty(t) = 8G_d(0) + 2|G_r(j5)| \cos(t + \text{Arg}[G_r(j5)])$$

dove

$$G_d(0) = \frac{1}{6}, \quad G_r(j5) = \frac{10(1-j)}{(1+j9)}$$

da cui

$$|G_r(j5)| = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{82}} = \frac{10}{\sqrt{41}} = 1.562$$

$$\text{Arg}[G_r(j5)] = -\frac{\pi}{4} - \arctan 9 \simeq -2.245 \text{ rad} = -128.66^\circ$$

Il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita è quindi il seguente

$$y_\infty(t) \simeq \frac{4}{3} + 3.123 \cos(5t - 2.245)$$

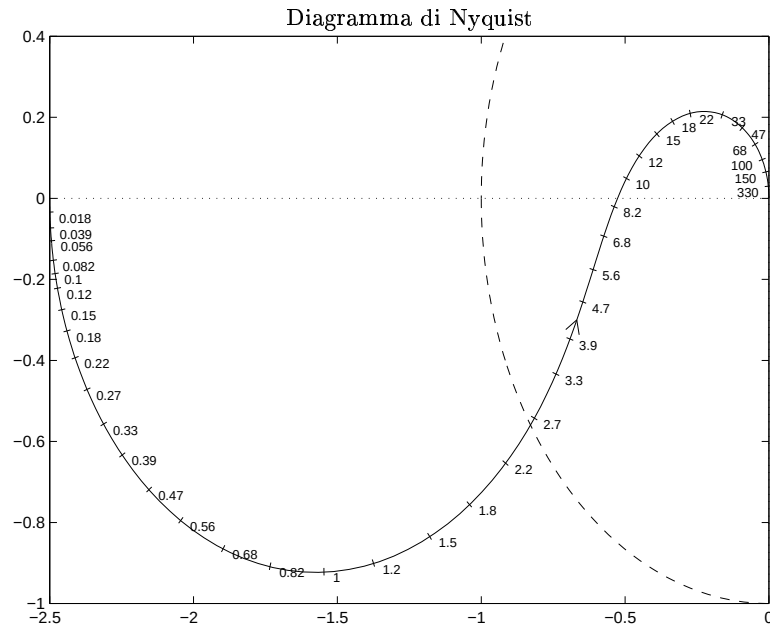


Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $T(s)G(s)$.

c) Posto $T(s) = 10$ e $a = 1$, il guadagno di anello del sistema è

$$T(s)G(s) = \frac{10(5-s)}{(s-1)(s+20)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1. Per $\omega_1 = 0$ il punto di partenza del diagramma è $\sigma_1 = -0.25$. La somma delle costanti di tempo è positiva

$$\sum \tau_i = -\frac{1}{5} + \frac{1}{a} - \frac{1}{20} \Big|_{a=1} = \frac{20-5a}{20a} \Big|_{a=1} = \frac{3}{4}$$

per cui per $\omega = 0^+$ il diagramma di Nyquist parte in anticipo. La fase finale a cui tende il diagramma per $\omega \rightarrow \infty$ è $-\frac{3}{2}\pi$ per cui, necessariamente, è presente un'altra intersezione con il semiasse negativo. Dall'analisi di stabilità svolta al punto a) si determinano facilmente le intersezioni σ_1 e σ_2 con l'asse reale negativo

$$\sigma_1 = -\frac{10}{4} = -2.5, \quad \sigma_0 = -\frac{10}{19} = -\frac{1}{1.9} = -0.526$$

Tale intersezioni si hanno in corrispondenza delle pulsazioni $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = \sqrt{75} = 8.66$.

d) Per $T(s) = 10$ e $a = 1$, il guadagno di anello $T(s)G(s)$ è il seguente

$$T(s)G(s) = \frac{10(5-s)}{(s-1)(s+20)}$$

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Il modulo del guadagno statico del sistema per $\omega = 0$ è

$$|T(0)G(0)| = 2.5 = 7.96 \text{ db}$$

e) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 - \frac{K(s-5)}{(s-1)(s+20)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (20-a-K)s + 5K - 20a = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. La graficazione del luogo delle radici viene fatta per $K_1 < 0$. È presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale positivo. I due punti di diramazione σ_1 e σ_2 si possono calcolare in tre modi diversi:

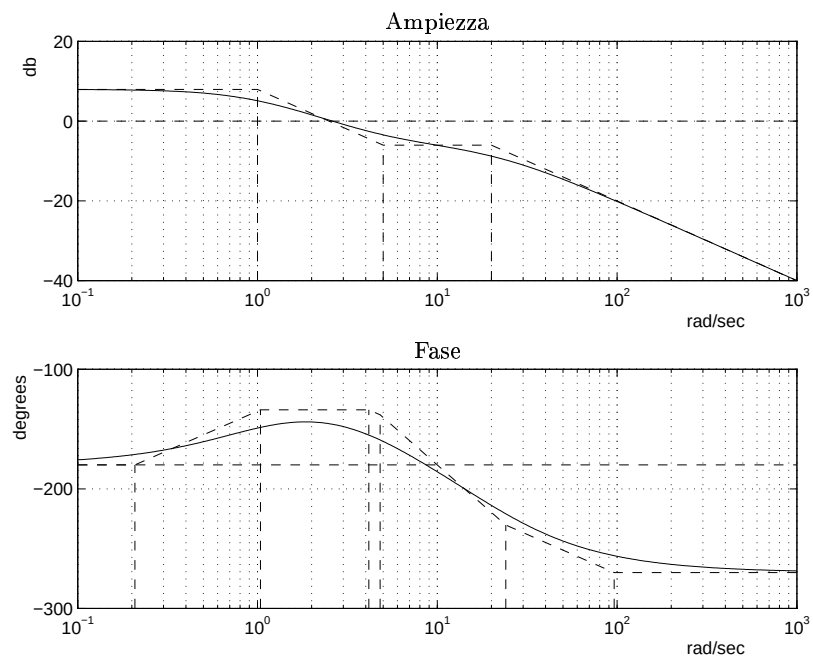


Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)G(s)$.

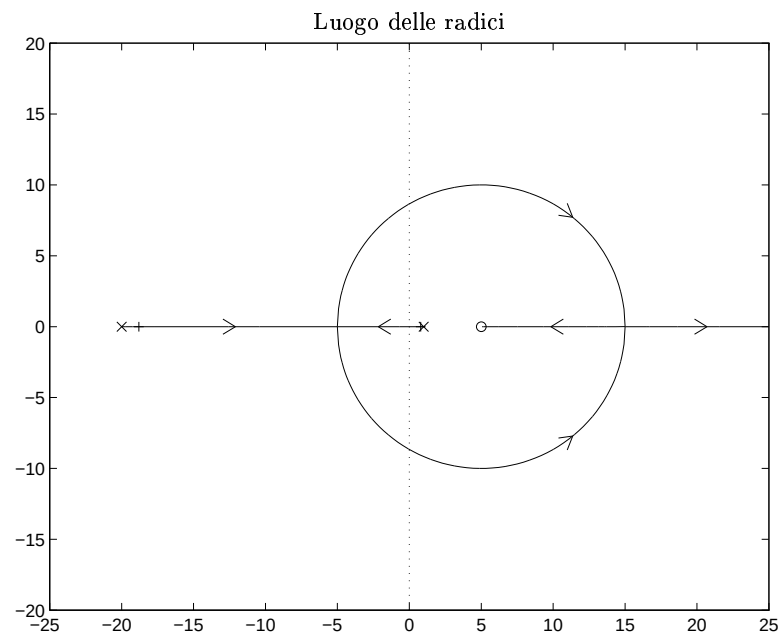


Figura 3: Luogo delle radici del guadagno di anello $T(s)G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

1) uguagliando a zero la derivata dell'equazione caratteristica fatta rispetto ad s :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{(s-5)}{(s-1)(s+20)} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 - 10s - 75 = 0$$

da cui

$$\sigma_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 75} = 5 \pm 10 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = -5 \\ \sigma_2 = 15 \end{cases}$$

2) sapendo che al di fuori dell'asse reale il luogo delle radici è una circonferenza centrata nello zero il cui raggio è

$$R = \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$$

per cui i punti di diramazione sono posizionati in $\sigma_{1,2} = 5 \pm R = 5 \pm 10$.

3) imponendo che il discriminante dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato sia nullo

$$\Delta^2 = (19 - K)^2 - 4(5K - 20) = 0 \quad \rightarrow \quad K^2 - 58K + 19^2 + 80$$

da cui si ricavano i valori di K corrispondenti ai due punti di diramazione

$$K_{1,2} = 29 \pm \sqrt{29^2 - 19^2 - 80} = 29 \pm 20 = \begin{cases} 9 \\ 49 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione caratteristica si determinano i due punti di diramazione cercati.

Il minimo tempo di assestamento T_a si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_2 = -5$. Il valore di K ad esso corrispondente è

$$K = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-5} = \frac{(s-1)(s+20)}{(s-5)} \Big|_{s=-5} = 9$$

f) Non essendo possibile cancellare un polo o uno zero instabile, l'unica possibilità di operare una cancellazione polo-zero è quella di posizionare lo zero della rete in corrispondenza del polo stabile del sistema, cioè si deve porre $b = 20$. Operata tale scelta, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa

$$1 - \frac{K(s-5)}{(s-1)(s+c)} = 0$$

Il luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è, qualitativamente, simile a quello riportato in Fig. 3. Perchè il sistema retroazionato abbia poli coincidenti in $p_{1,2} = -10$ occorre portare il punto di diramazione σ_2 in -10 . Questo è possibile solo se il raggio R del luogo delle radici assume il valore $R = 15$, cioè se

$$R = \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{4(5+c)} = 15 \quad \rightarrow \quad c = \frac{255}{4} - 5 = \frac{205}{4} = 51.25$$

Il corrispondente valore di K è

$$K = \frac{(s-1)(s+c)}{s-5} \Big|_{s=-10} = \frac{121}{4} = 30.25$$

La rete correttiva cercata è quindi la seguente:

$$T(s) = 30.25 \frac{s+20}{s+51.25}$$

In presenza della rete correttiva $T(s)$, l'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ diventa quello mostrato in Fig. 4.

g) Il punto di lavoro del sistema retroazionato è in $(x_0, y_0) = (2, 0)$ se

$$K_1 r = 2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{K_1} = 4$$

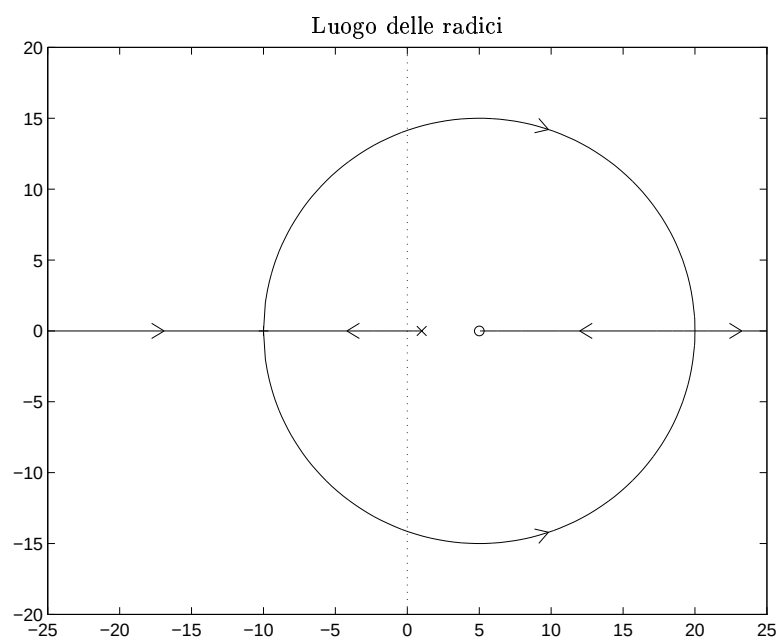


Figura 4: Luogo delle radici del guadagno di anello $K T(s) G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

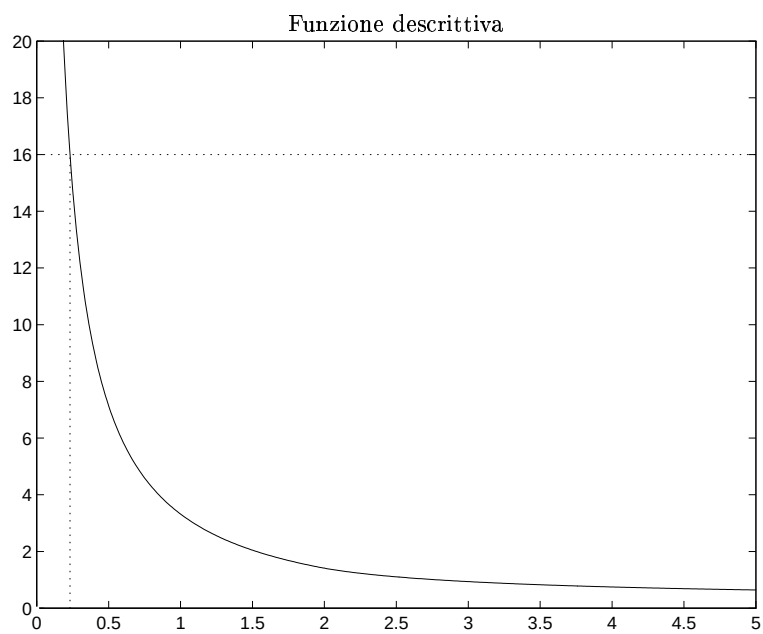


Figura 5: Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$.

dove $K_1 = 0.5$ è il guadagno statico del sistema $G_1(s)$. La pendenza della retta di carico è $K = -0.5$. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (2, 0)$ è mostrato in Fig. 5. Per $X < 2$ la $F(x)$ vale

$$F(X) = \frac{12}{\pi X} - \frac{1}{2}$$

Per $X \rightarrow \infty$ la funzione descrittiva $F(X) \rightarrow 0.25$. La parte lineare del sistema ha un margine di ampiezza $M_A = 16$ come si ricava dalla seguente analisi. L'equazione caratteristica di un sistema che abbia un polo triplo in $-a$ è la seguente

$$1 + \frac{K}{(s+a)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3a s^2 + 3a^2 s + a^3 + K = 0$$

Utilizzando la tabella di Routh si determina facilmente che il valore massimo K^* e la corrispondente pulsazione ω^* valgono

$$K^* = 8a^3 \quad \omega^* = a\sqrt{3}$$

Nel caso in esame si ha $a = 2$ per cui

$$K^* = 64 \quad \rightarrow \quad M_A = \frac{K^*}{4} = 16 \quad \omega^* = 2\sqrt{3} = 3.464$$

Il sistema retroazionato è caratterizzato da un solo ciclo limite stabile la cui ampiezza X^* si determina risolvendo l'equazione $F(X) = M_A$:

$$\frac{12}{\pi X^*} - \frac{1}{2} = 16 \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{24}{33\pi} = 0.2315$$

h) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 30 \frac{2(1-z^{-1}) + 20T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 50T(1+z^{-1})} \Big|_{T=0.2} = 30 \frac{6+2z^{-1}}{12+8z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(12+8z^{-1}) = 30E(z)(6+2z^{-1})$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{12}[-8m(k-1) + 180e(k) + 60e(k-1)]$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{3}[-2m(k-1) + 45e(k) + 15e(k-1)]$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Il metodo della Trasformata Zeta nella risoluzione delle equazioni alle differenze lineari a parametri concentrati
 - ☐ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni lineari tempo-varianti
 - ☒ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
 - ☒ permette di calcolare la risposta libera del sistema
2. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento $\delta = 0.6$ presenta un picco di risonanza M_R :
 - ☒ $M_R > 1$
 - ☐ $M_R = 1$
 - ☐ $M_R < 1$
3. Siano y_m e y_∞ , rispettivamente, il valore massimo e il valore a regime della risposta temporale di un sistema lineare stabile in risposta al gradino unitario. La massima sovraelongazione percentuale $S\%$ è definita come segue
 - ☐ $S\% = 100(y_M - y_\infty)$
 - ☒ $S\% = 100 \frac{(y_M - y_\infty)}{y_\infty}$
 - ☐ $S\% = 100 \frac{y_M}{y_\infty}$
4. Il luogo dei punti del piano complesso per $M = 2$ è
 - ☐ la retta verticale $x = -0.5$
 - ☐ una circonferenza posizionata a destra della retta verticale $x = -0.5$
 - ☒ una circonferenza posizionata a sinistra della retta verticale $x = -0.5$
5. Il diagramma di Nichols del sistema $G(s) = \frac{1}{s(\tau s - 1)}$ ($\tau > 0$) all'aumentare di ω
 - ☐ è una curva a modulo crescente e fase crescente
 - ☐ è una curva a modulo crescente e fase decrescente
 - ☒ è una curva a modulo decrescente e fase crescente
 - ☐ è una curva a modulo decrescente e fase decrescente
6. Un sistema $G(s)$ stabile ingresso limitato - uscita limitata
 - ☐ può avere poli a parte reale positiva
 - ☒ può avere zeri a parte reale positiva
 - ☐ è un sistema certamente a fase minima
7. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica
 - ☐ ai soli sistemi con retroazione unitaria
 - ☐ ai soli sistemi con retroazione algebrica
 - ☒ ai sistemi con retroazione qualunque
8. Due sistemi di tipo 1 (entrambi asintoticamente stabili), aventi la stessa costante di velocità K_v , se vengono posti in retroazione negativa unitaria
 - ☐ generano sistemi retroazionati di tipo 1
 - ☒ presentano lo stesso errore a regime per ingresso a gradino
 - ☒ presentano lo stesso errore a regime per ingresso a rampa

9. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo)
- ☒ quando $r = 2$ e K_1 è positiva
 - ☐ quando $r = 2$ e K_1 è negativa
 - ☐ quando $r = 4$ e K_1 è positiva
 - ☒ quando $r = 4$ e K_1 è negativa
10. Nella sintesi diretta di reti corretttrici, le formule di inversione possono essere utilizzate
- ☒ nel caso di sintesi di una rete anticipatrice
 - ☒ nel caso di sintesi di una rete ritardatrice
 - ☐ nel caso di sintesi di una rete a ritardo e anticipo
11. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID
- ☐ richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
 - ☐ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
 - ☒ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
 - ☒ è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari
12. Per poter applicare il criterio del Cerchio ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$
- ☐ il sistema $G(s)$ deve essere a fase minima
 - ☒ la non linearità $y = f(x)$ deve passare per l'origine
 - ☐ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine
13. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello alle basse pulsazioni risulta poco sensibile
- ☐ alle variazioni parametriche di $H(s)$
 - ☒ alle variazioni parametriche di $G(s)$
 - ☐ ai disturbi additivi ad alta frequenza agenti sul sistema
14. Da un punto di vista "frequenziale", nella banda $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$ il ricostruttore di ordine zero $H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$
- ☒ è un passabasso
 - ☐ è un passabanda
 - ☐ ha guadagno statico unitario $H_0(j0) = 1$
 - ☒ ha guadagno nullo per $\omega = \frac{\pi}{T}$: $H_0(j\frac{\pi}{T}) = 0$
15. Il metodo di discretizzazione per "trasformazione bilineare con precompensazione frequenziale" applicato alla funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_1$ opera la seguente sostituzione
- ☒ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 - ☐ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
16. Sia $X(z)$ la Z-trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore finale afferma che
- ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} zX(z)$
 - ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} zX(z)$
 - ☐ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z^{-1})X(z)$
 - ☒ $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$