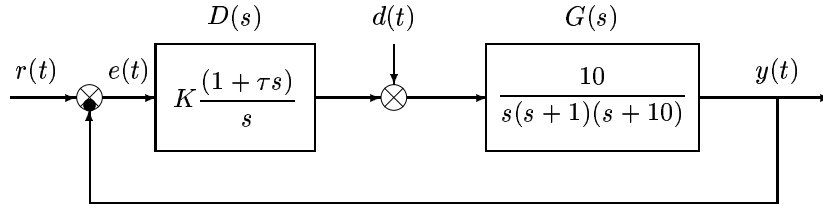


Sia dato il seguente sistema in retroazione:



- Determinare, in funzione di τ , per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- Determinare, in funzione di K e τ , il valore a regime $e_\infty(t)$ della variabile errore $e(t) = r(t) - y(t)$ nei seguenti due casi: 1) ingresso a rampa e disturbo nullo: $r(t) = t$ e $d(t) = 0$; 2) ingresso nullo e disturbo a rampa: $r(t) = 0$ e $d(t) = t$.
- Posto $K = 1$ e $\tau = 2$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno di anello $D(s)G(s)$. Nota: ricordarsi di chiudere il diagramma all’infinito nel modo appropriato.
- Posto $K = 1$ e $\tau = 2$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $D(s)G(s)$.
- Posto $K = 1$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. (Nota: per $\tau = 0$ il contorno delle radici parte dai poli $p_1 \simeq -10$, $p_2 \simeq -1.5$ e $p_{3,4} \simeq 0.25 \pm 0.77j$). Determinare per quali valori di τ si hanno intersezioni con l’asse immaginario.
- Dato il seguente sistema $G(s)$ (cascata di due integratori):

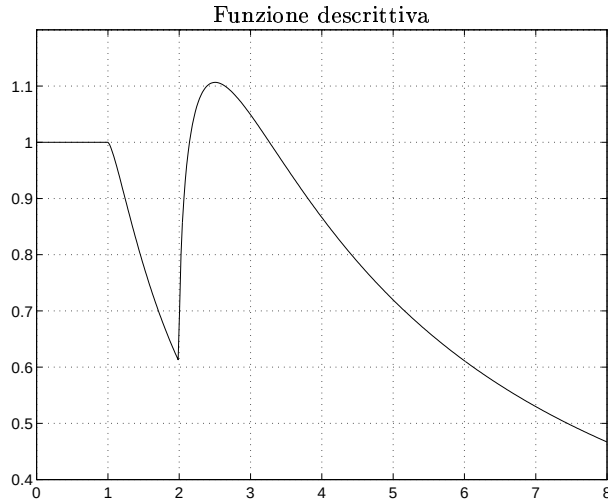
$$G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad D(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

determinare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete anticipatrice $D(s)$ in modo che il sistema complessivo abbia un margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$. Per la sintesi dei parametri τ_1 e τ_2 si utilizzino le formule di inversione.

- Sia dato il seguente sistema

$$G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

posto in retroazione negativa su di una non linearità caratterizzata dalla funzione descrittiva $F(X)$ mostrata in figura. Supponendo che l’ingresso sia nullo, $r(t) = 0$, determinare la pulsazione ω e l’ampiezza X (approssimata) delle eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema retroazionato.



- Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$ e si imponga l’uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{10K(1 + \tau s)}{s^2(s + 1)(s + 10)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 11s^3 + 10s^2 + 10K\tau s + 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 10 & 10K & \rightarrow 1 > 0 \\ 3 & 11 & 10K\tau & & \rightarrow 11 > 0 \\ 2 & 110 - 10K\tau & 110K & & \rightarrow 11 - K\tau > 0 \\ 1 & (110 - 10K\tau)10K\tau - 11^2 10K & & & \rightarrow 10K[(110 - 10K\tau)\tau - 11^2] > 0 \\ 0 & 110K & & & \rightarrow K > 0 \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna siano positivi si ottiene

$$K < \frac{11}{\tau}, \quad K < \frac{11(\tau - 1.1)}{\tau^2} = \frac{11}{\tau} - \frac{12.1}{\tau^2}, \quad K > 0$$

Le condizioni più stringenti sono le ultime due. Si ricava che i valori di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono

$$0 < K < \frac{11(\tau - 1.1)}{\tau^2} \quad (1)$$

b) Nel caso di ingresso a rampa e disturbo nullo, $r(t) = t$ e $d(t) = 0$, l'errore a regime $e_\infty(t)$ è sicuramente nullo, $e_\infty(t) = 0$, in quanto il sistema a valle della variabile $e(t)$ è di tipo 2. Nel caso di ingresso nullo e disturbo a rampa, $r(t) = 0$ e $d(t) = t$, si deve invece procedere utilizzando le trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento che lega l'ingresso $D(s)$ al segnale errore $E(s)$ è la seguente

$$G_d(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{\frac{-110}{s(s+1)(s+10)}}{1 + \frac{10K(1+\tau s)}{s^2(s+1)(s+10)}} = \frac{-10s}{s^2(s+1)(s+10) + 10K(1+\tau s)}$$

In presenza del disturbo a rampa, la trasformata di Laplace $E(s)$ del segnale errore è

$$E(s) = G_d(s)D(s) = G_d(s)\frac{1}{s^2} = \frac{-10}{s[s^2(s+1)(s+10) + 10K(1+\tau s)]}$$

Applicando il teorema del valore finale si ottiene

$$e_\infty(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-10}{s^2(s+1)(s+10) + 10K(1+\tau s)} = -\frac{1}{K}$$

c) Posto $K = 1$ e $\tau = 2$, il guadagno di anello $D(s)G(s)$ del sistema è

$$D(s)G(s) = \frac{10(1+2s)}{s^2(s+1)(s+10)} \quad (2)$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist è mostrato in Fig. 1. L'intersezione con il semiasse negativo si ricava utilizzando i risultati dall'analisi di stabilità svolta al punto a). Sostituendo $\tau = 2$ in (1) si determina il margine di ampiezza M_a del sistema e quindi l'intersezione σ_0 con il semiasse negativo

$$M_a = \frac{11(2 - 1.1)}{4} = \frac{9.9}{4} = 2.475 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{1}{M_a} = -\frac{40}{99} = -0.4040$$

Il diagramma di Nyquist si completa all'infinito con due semicirconferenze percorse in senso orario. Applicando il criterio di Nyquist si può concludere che il sistema retroazionato in esame è asintoticamente stabile.

d) Per $K = 1$ e $\tau = 2$, il guadagno di anello $D(s)G(s)$ del sistema è quello del punto precedente. I corrispondenti diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi sono mostrati in Fig. 2. Per $\omega = 0.5$ il diagramma asintotico delle ampiezze assume il valore $\beta = 4 = 12$ db.

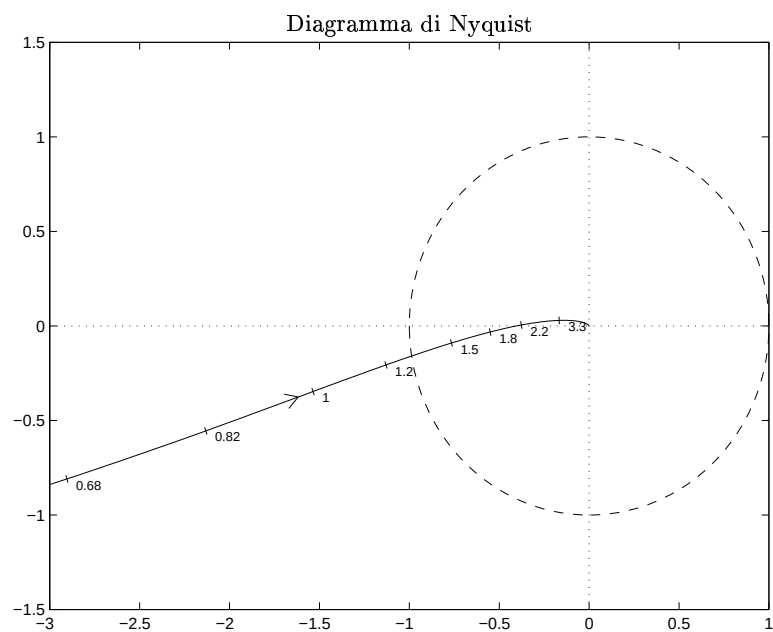


Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $D(s)G(s)$.

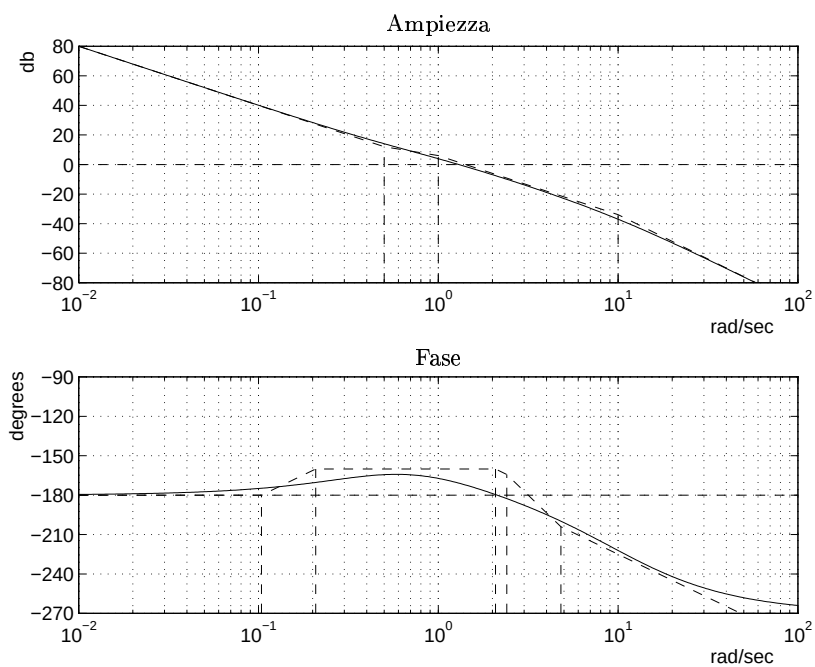


Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $D(s)G(s)$.

e) Posto $K = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{10(1 + \tau s)}{s^2(s + 1)(s + 10)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 11s^3 + 10s^2 + 10\tau s + 10 = 0$$

Esplicitando rispetto al parametro τ si ottiene la seguente equazione

$$1 + \tau \frac{10s}{s^4 + 11s^3 + 10s^2 + 10} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau \frac{10s}{(s + 9.989)(s + 1.514)[(s - 0.2515)^2 + 0.7733^2]} = 0$$

Il contorno delle radici ha quindi uno zero nell'origine $z_1 = 0$ e quattro poli:

$$p_1 = -9.989, \quad p_2 = -1.514, \quad p_{3,4} = 0.2515 \pm j0.7733$$

L'andamento del contorno delle radici della funzione $D(s)G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ è mostrato in Fig. 3.

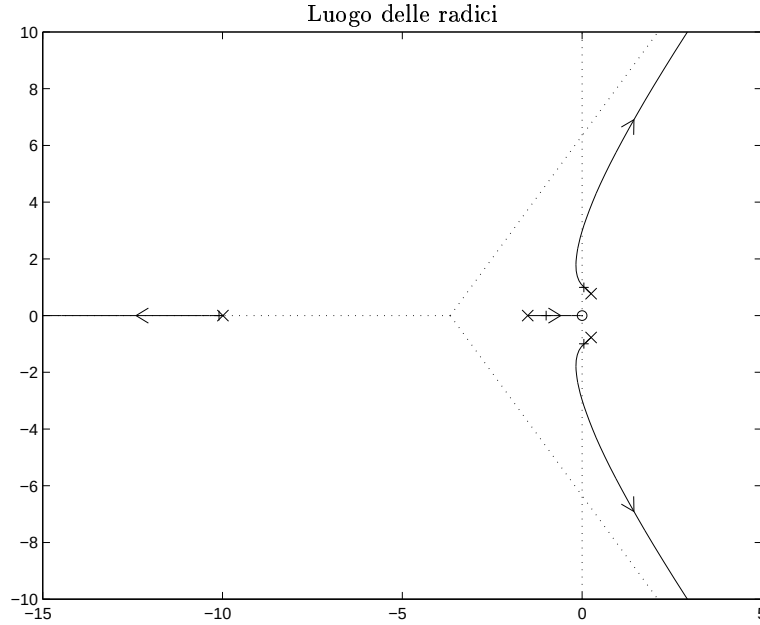


Figura 3: Contorno delle radici della funzione $D(s)G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$.

Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando ancora una volta i risultati dell'analisi di stabilità svolta al punto a). Posto $K = 1$ in (1) si ricava la seguente condizione di stabilità

$$1 < \frac{11(\tau - 1.1)}{\tau^2} \quad \leftrightarrow \quad \tau^2 - 11\tau + 12.1 < 0$$

dalla quale si ricavano i due valori limite di τ per i quali si ha intersezione con l'asse immaginario:

$$\tau_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{72.6}}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tau_1 = 1.24 \\ \tau_2 = 9.76 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è stabile solo per $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Sostituendo τ_1 e τ_2 nell'equazione ausiliaria ottenuta dalla riga 2 della tabella di Routh si ricavano i valori ω_1 e ω_2 delle due intersezioni con l'asse immaginario.

$$(110 - 10\tau)s^2 + 110 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{11}{11 - \tau}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = 1.062 \\ \omega_2 = 2.978 \end{cases}$$

f) Il sistema $G(s)$ da stabilizzare (doppio integratore) ha una fase costante $(-\pi)$ ed un modulo decrescente in modo monotono in funzione della pulsazione ω :

$$G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2}, \quad \text{Arg}[G(j\omega)] = -\pi$$

Per imporre al sistema retroazionato un margine di fase $M_a = 45^\circ$ occorre inserire una rete corretttrice che introduca un anticipo di fase φ_m esattamente uguale al margine di fase

$$\varphi_m = 45, \quad \leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 0.1716 = -15.31 \text{ db}$$

L'anticipo $\varphi_m = 45$ viene raggiunto nel punto centrale della rete anticipatrice. In tale punto l'amplificazione introdotta dalla rete corretttrice è pari a -0.5α quando α è espresso in db:

$$-\frac{\alpha_{db}}{2} = 7.655 \text{ db} = 2.414 = \frac{1}{0.4142} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Il centro ω_0 della rete anticipatrice si determina imponendo che l'attenuazione del sistema compensi esattamente l'amplificazione della rete corretttrice

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{2.414} = 0.4142 = \sqrt{\alpha}, \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \alpha^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2.414} = 1.5537$$

Imponendo che il centro della rete corretttrice sia uguale ad ω_0 si determina il parametro τ

$$\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = \omega_0 = \alpha^{-\frac{1}{4}} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\omega_0\sqrt{\alpha}} = \alpha^{-\frac{1}{4}} = 1.5537$$

La rete corretttrice cercata ha quindi la seguente forma

$$D(s) = \frac{1 + 1.5537s}{1 + 0.2666s}$$

La soluzione ottenuta in questo modo è quella che massimizza il valore di α . In realtà esistono infinite altre coppie di valori α, τ che permetterebbero, a frequenze diverse, di soddisfare la specifica $M_\varphi = 45^\circ$ sul margine di fase.

g) Per calcolare il margine di ampiezza del sistema $G_1(s)$ si può procedere in due modi diversi:

1) Ricavando l'equazione caratteristica

$$1 + \frac{10K}{(s+1)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 10K = 0$$

e utilizzando la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1+10K \\ 1 & 8-10K & 0 \\ 0 & 1+10K & \end{array}$$

Da questa tabella si ricava

$$M_a = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \omega_0 = \sqrt{3} = 1.732$$

2) Si calcola la pulsazione ω_0 per la quale il sistema ha fase $-\pi$

$$\text{Arg}[G_1(j\omega_0)] = -\pi \quad \leftrightarrow \quad -3 \arctan \omega_0 = -\pi \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

e poi in ω_0 si calcola il modulo della funzione $G(s)$

$$|G(j\omega_0)| = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega_0^2})^3} = \frac{5}{4} \quad \leftrightarrow \quad M_a = \frac{4}{5}$$

Entrando nel grafico della funzione descrittiva $F(X)$ con il valore $M_a = 0.8$ si individuano 3 intersezioni con la funzione descrittiva e quindi tre possibili oscillazioni autosostenute. Le ampiezze X di queste autooscillazioni sono

$$X_1 = 1.456, \quad X_2 = 2.027, \quad X_3 = 4.416$$

Solo i valori X_1 e X_3 corrispondono a cicli limite stabili. La pulsazione ω_0 di tutti e tre i cicli limite è quella determinata in precedenza: $\omega_0 = \sqrt{3} = 1.732$.

h) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s} \quad \rightarrow \quad D(z) = k \frac{1 - e^{-T}z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{T=0.2} = k \frac{1 - 0.8187z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle elevate frequenze

$$D(s)|_{s \rightarrow \infty} = D(z)|_{z=-1} \quad \leftrightarrow \quad 1 = k \frac{1 + e^{-T}}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{1.8187} = 1.1$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1 - z^{-1}) = kE(z)(1 - 0.8187z^{-1})$$

ottenendo

$$m(k) = m(k-1) + ke(k) - k0.8187e(k-1)$$

da cui si ricava

$$m(k) = m(k-1) + 1.1e(k) - 0.9e(k-1)$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = \sin(2t)$ è

☐ $X(s) = \frac{s}{s^2+4}$

☒ $X(s) = \frac{2}{s^2+4}$

☐ $X(s) = \frac{4}{s^2+4}$

2. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2}{s(s^2+0.8s+1)}$

☐ tende a 0 per t tendente all'infinito: $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$

☐ tende a 1 per t tendente all'infinito: $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 1$

☒ presenta una sovraelongazione rispetto al valore finale

☒ è nulla per t tendente a 0: $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$

3. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi, allora è possibile affermare che il sistema retroazionato

☐ è stabile

☒ può essere stabile

☒ può essere instabile

4. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)}$ ha un asintoto verticale nel punto

☐ $\sigma_0 = 0$

☒ $\sigma_0 = 2$

☐ $\sigma_0 = -2$

5. Il diagramma di Nichols di un ritardo finito $G(s) = e^{-t_0 s}$

☐ è una retta verticale

☒ è una retta orizzontale

☐ è un cerchio

6. La funzione $G(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$, che rappresenta un regolatore standard PID,

☐ è fisicamente realizzabile

☒ non è fisicamente realizzabile

☒ è un modello ideale semplificato dei PID realizzati fisicamente

7. La stabilità di un sistema lineare tempo-invariante

☐ è funzione delle condizioni iniziali del sistema

☐ è funzione del valore degli ingressi

☒ è funzione della posizione dei poli del sistema

8. Nel caso di sistemi a retroazione non unitaria, per il calcolo dell'errore a regime $e(t) = r(t) - 2c(t)$ è possibile utilizzare le stesse formule trovate per il caso a retroazione unitaria se si utilizza al posto di $G(s)$ la funzione

☐ $G_e(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-2]}$

☒ $G_e(s) = \frac{2G(s)}{1+G(s)[H(s)-2]}$

☐ $G_e(s) = \frac{2G(s)}{1+G(s)[2H(s)-1]}$

9. Nella seconda formulazione del criterio di Nyquist, quella valida anche per sistemi “instabili”, si fa l’ipotesi che il sistema, oltre a poter avere un polo semplice o doppio nell’origine,
- ☐ sia a fase minima
 - ☐ abbia poli semplici sull’asse immaginario
 - ☒ non abbia poli sull’asse immaginario
 - ☐ non si fanno altre ipotesi
10. Una rete ritardatrice $D(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$
- ☒ sfasa a tutte le pulsazioni $\omega \in]0, \infty[$
 - ☐ amplifica alle basse frequenze
 - ☒ è utile per stabilizzare sistemi fortemente instabili
 - ☐ rende “più pronto” il sistema retroazionato
11. In corrispondenza della pulsazione centrale $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$, una rete a ritardo e anticipo $D(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha}s)}$
- ☒ attenua ma non sfasa
 - ☐ sfasa di $-\pi$
 - ☐ attenua di α
12. Dato un sistema $G(s)$, per calcolare il guadagno statico del sistema retroazionato $G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ utilizzando i luoghi ad M costante si deve determinare il valore M
- ☐ della più piccola circonferenza esterna e tangente al diagramma polare completo $G(j\omega)$
 - ☐ della più grande circonferenza interna e tangente al diagramma polare completo $G(j\omega)$
 - ☒ della circonferenza che passa per il punto $G(0)$
 - ☐ della circonferenza che passa per il punto $G(j)$
13. La funzione descrittiva $F(X)$ di un relè con isteresi
- ☐ è una funzione reale positiva
 - ☒ è una funzione complessa
 - ☒ è una funzione definita solo per $X > X_1$ dove X_1 è l’ampiezza dell’isteresi
14. Sul piano z i luoghi dei punti a cui corrisponde un coefficiente di smorzamento δ costante:
- ☐ sono rette uscenti dall’origine
 - ☐ sono circonferenze centrate nell’origine
 - ☒ sono curve a spirale
15. La trasformazione bilineare $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
- ☒ è una corrispondenza biunivoca tra il piano s e il piano z
 - ☐ genera “aliasing”
 - ☒ determina “compressione spettrale” della corrispondente funzione di risposta armonica discreta
16. La $\mathcal{Z}$ -trasformata $G(z)$ della funzione $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ può anche essere calcolata nel seguente modo
- ☒ $G(z) = \mathcal{Z}[G_1(s) G_2(s)]$
 - ☐ $G(z) = \mathcal{Z}[G_1(s) + G_2(s)]$
 - ☐ $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s}G_1(s) G_2(s)]$
 - ☐ $G(z) = \mathcal{Z}[G_1(s)] \mathcal{Z}[G_2(s)]$