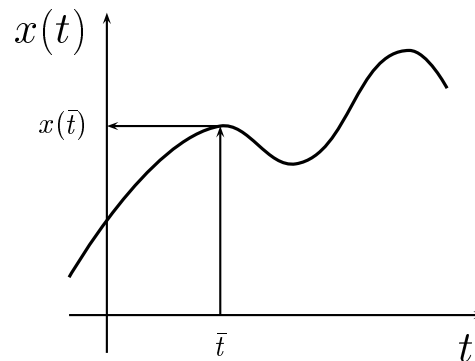


RICHIAMI MATEMATICI

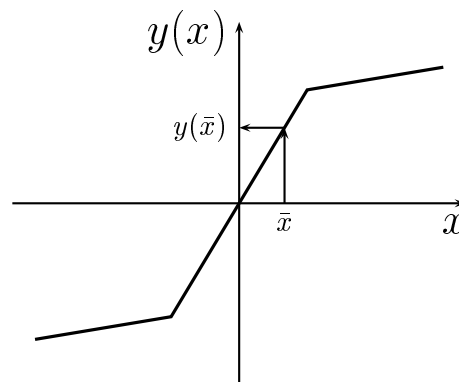
• Funzioni reali del tempo:

$$x(t) : t \rightarrow x(t)$$



• Funzioni reali dell'ingresso:

$$y(x) : x \rightarrow y(x)$$



• Numeri complessi. Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x, y)$$

dove x è la parte reale ed y è la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti di rappresentare i numeri complessi:

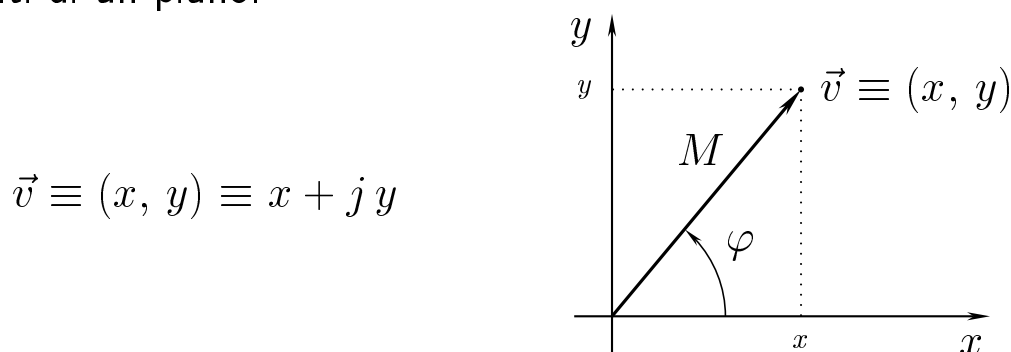
1) Utilizzando il numero immaginario puro j :

$$(x, y) \equiv x + j y$$

Il numero j indica qual'è la parte immaginaria. Il numero soddisfa le seguenti relazioni:

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad j^5 = j$$

- 2) I numeri complessi (x, y) possono essere messi in corrispondenza con i punti di un piano:

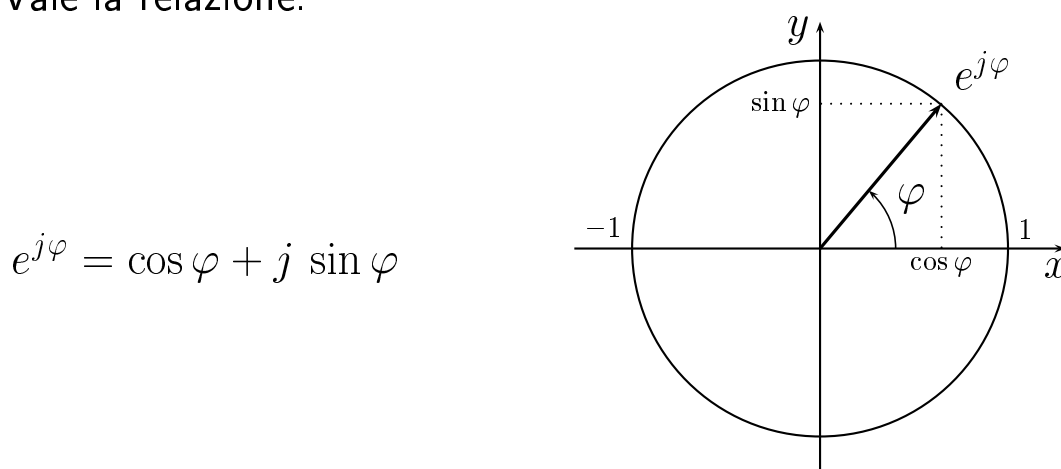


- 3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori $\vec{v}$ che collegano il punto (x, y) all'origine. Il vettore $\vec{v}$ può essere espresso in forma "cartesiana" o in forma "polare":

$$\vec{v} = x + j y = M \angle \varphi = M e^{j\varphi}$$

Con M si è indicato il modulo e con φ la fase del vettore $\vec{v}$.

- Il numero complesso $e^{j\varphi}$ rappresenta un vettore a modulo unitario e fase φ . Vale la relazione:

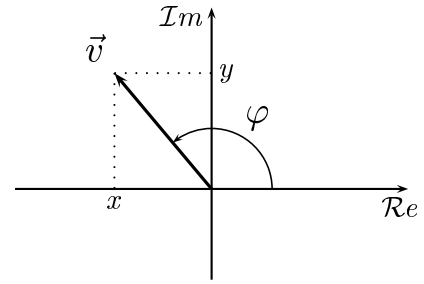


- In qualsiasi momento è possibile passare da una rappresentazione "cartesiana" (x, y) ad una rappresentazione "polare" (e viceversa) del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} M = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = M \cos \varphi \\ y = M \sin \varphi \end{cases}$$

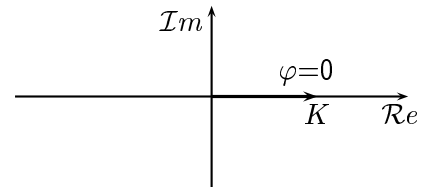
La funzione "arctan" fornisce valori φ compresi nell'intervallo: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Quando x assume valori negativi occorre sommare una fase $\varphi_0 = \pi$.

1) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano, e quindi la fase φ del corrispondente numero complesso $x + jy$, si misura in senso **antiorario** rispetto al **semiasse reale positivo**.



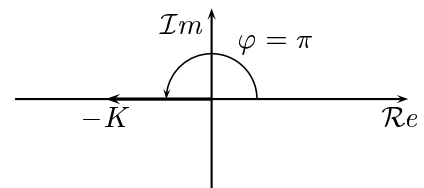
2) La fase dei numeri reali positivi $K > 0$ è nulla:

$$\varphi = \arg[K] = 0$$



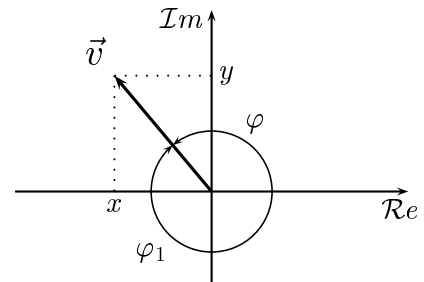
3) La fase dei numeri reali negativi $-K < 0$ è $\varphi = \pi$:

$$\varphi = \arg[-K] = \pi$$



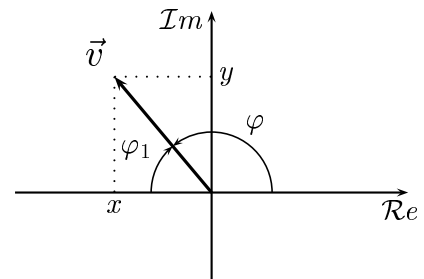
4) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano è definita a meno di un multiplo intero di 2π :

$$\arg[\vec{v}] = \varphi + 2K\pi, \quad \forall K \in \mathbb{Z}$$



5) Per calcolare la fase φ di un vettore $\vec{v} = x + jy$ con parte reale negativa, $x < 0$, utilizzare la formula:

$$\varphi = \arg[\vec{v}] = \pi - \arctan \left[\frac{y}{|x|} \right]$$



6) Il modulo del prodotto di numeri complessi è uguale al **prodotto dei moduli**. Esempio:

$$\left| \frac{(1 + 3j)}{(2 - 5j)(-4 + j)} \right| = \frac{|1 + 3j|}{|2 - 5j| | -4 + j|} = \frac{\sqrt{1^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 5^2} \sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29} \sqrt{17}}$$

7) La fase del prodotto di numeri complessi è uguale alla **somma delle fasi** dei singoli elementi. Esempio:

$$\arg \left[\frac{(1 + 3j)}{(2 - 5j)(-4 + j)} \right] = \arctan \frac{3}{1} - \left[\arctan \frac{-5}{2} + \pi - \arctan \frac{1}{4} \right]$$

- **Funzioni complesse di variabile reale.** Si consideri, per esempio, la seguente funzione $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{100}{(4 + j\omega)(13 - \omega^2 + j4\omega)} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ associa ad ogni valore reale di ω un numero complesso $F(\omega)$ avente modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e fase $\varphi(\omega) = \arg[F(\omega)]$.

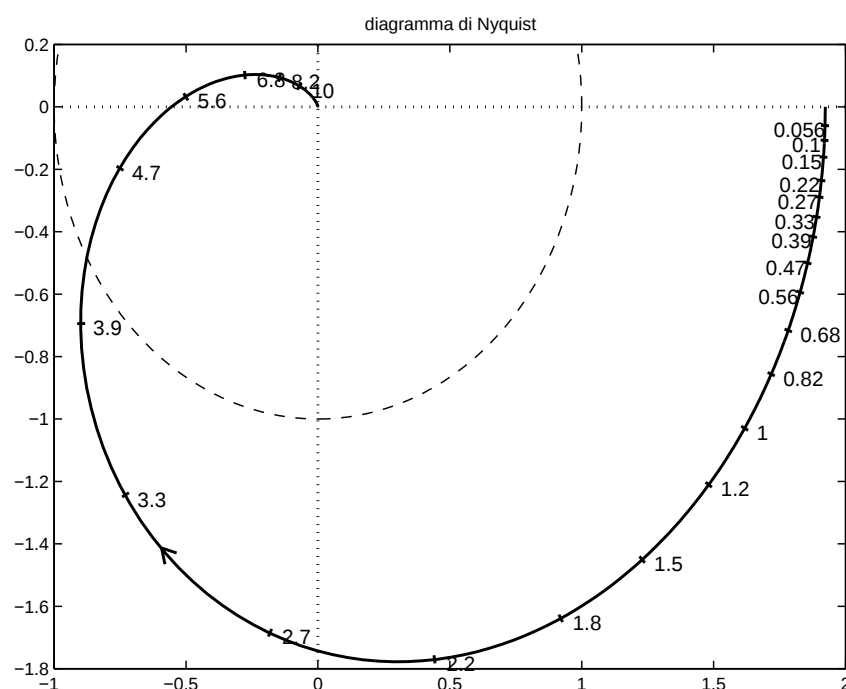
$$F(\omega) : \omega \rightarrow F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ può rappresentare, per esempio, la funzione di risposta armonica di un sistema lineare:

$$x(t) = X \sin \omega t \quad \longrightarrow \quad \boxed{F(\omega)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \underbrace{M(\omega) X}_{Y(\omega)} \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

In questo caso il modulo $M(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$ ha il significato di “guadagno” del sistema alla pulsazione ω , mentre $\varphi(\omega)$ rappresenta lo sfasamento della sinusoide di uscita $y(t) = Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ rispetto a quella di ingresso $x(t) = X \sin \omega t$.

- Funzioni di questo tipo possono essere rappresentate, al variare del parametro ω , come curve sul piano complesso:

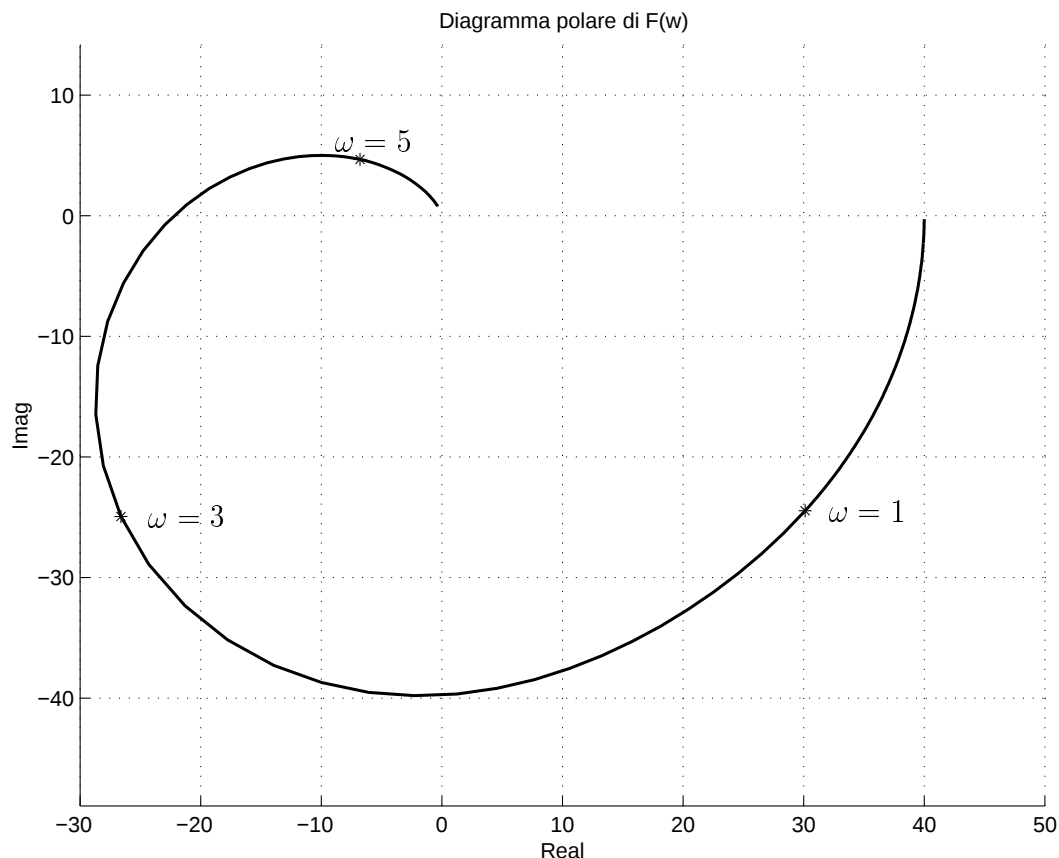


Funzioni complesse di variabile reale: esercizio

Consideriamo la funzione complessa di variabile reale $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{800}{(2 + j \omega)(10 - \omega^2 + 2 j \omega)}$$

Diagramma polare della funzione complessa di variabile reale $F(\omega)$:



- 1) Calcolare modulo e argomento di $F(\omega)$ per $\omega = 1$, $\omega = 3$ e $\omega = 5$.
- 2) Verificare il calcolo al punto 1) tramite lettura diretta sul diagramma polare di $F(\omega)$ riportato in figura.

1) Il modulo di $F(\omega)$ si calcola nel seguente modo:

$$|F(\omega)| = \frac{800}{\sqrt{4 + \omega^2} \sqrt{(10 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2}} = \begin{cases} |F(\omega = 1)| = 38.8 \\ |F(\omega = 3)| = 36.5 \\ |F(\omega = 5)| = 8.24 \end{cases}$$

L'argomento, quando $10 - \omega^2 > 0$, risulta:

$$\angle F(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{atan}\left(\frac{2\omega}{10 - \omega^2}\right) = \begin{cases} \angle F(\omega = 1) = -39.1^\circ \\ \angle F(\omega = 3) = -136.8^\circ \end{cases}$$

Se invece $10 - \omega^2 < 0$ si ottiene:

$$\angle F(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \pi + \text{atan}\left(\frac{2\omega}{\omega^2 - 10}\right) = \angle F(\omega = 5) = -214.5^\circ$$

2) Leggendo direttamente dal grafico si ottiene:

$$F(\omega = 1) \simeq 30 - j \, 24$$

$$|F(\omega = 1)| \simeq \sqrt{30^2 + 24^2} = 38.4$$

$$\angle F(\omega = 1) \simeq \text{atan}\left(\frac{-24}{30}\right) = -38.6^\circ$$

$$F(\omega = 3) \simeq -27 - j \, 25$$

$$|F(\omega = 3)| \simeq \sqrt{27^2 + 25^2} = 36.8$$

$$\angle F(\omega = 3) \simeq 180 - \text{atan}\left(\frac{-25}{27}\right) = 222.8^\circ = -137.2^\circ$$

$$F(\omega = 5) \simeq -7 + j \, 5$$

$$|F(\omega = 5)| \simeq \sqrt{7^2 + 5^2} = 8.6$$

$$\angle F(\omega = 5) \simeq 180 - \text{atan}\left(\frac{5}{7}\right) = 144.5^\circ = -215.5^\circ$$

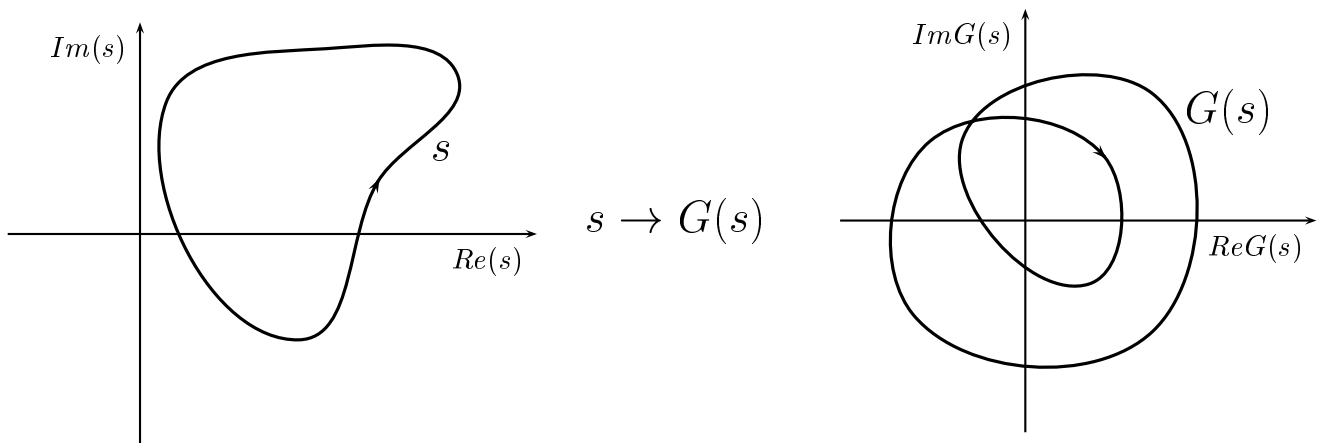
- **Funzioni complesse di variabile complessa.** Ad esempio la trasformata di Laplace $G(s)$ di un segnale continuo $g(t)$:

$$g(t) \quad \leftrightarrow \quad G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

- Per ogni valore della variabile complessa s , la funzione $G(s)$ fornisce un numero complesso $G(s)$:

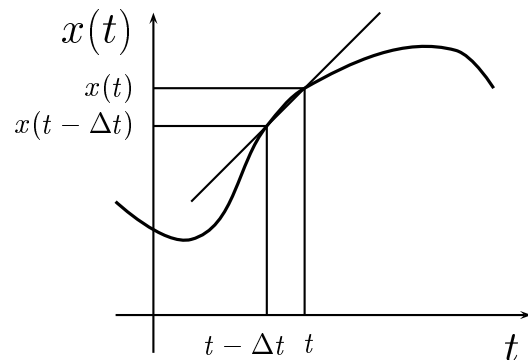
$$G(s) : s \rightarrow G(s) \quad s \in \mathbb{C}, G(s) \in \mathbb{C}$$

Ad ogni curva chiusa del piano complesso s è associata una curva chiusa nel piano complesso $G(s)$:



- Una funzione di questo tipo è in grado di descrivere una “trasformazione” del piano complesso.
- **Derivata di una funzione.** Data la funzione $x(t)$, con $\dot{x}(t)$ si indica la derivata di $x(t)$ rispetto al parametro t , definita come segue:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$



- La derivata $\dot{x}(t)$ descrive la “pendenza” funzione $x(t)$ nell’intorno del punto t .

Equazioni differenziali

- **Equazioni differenziali**. Sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio $x(t)$, $y(t)$, ecc., e le loro derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, ecc.
- Le equazioni differenziali possono essere:

1) non lineari:

$$f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots) = 0$$

2) lineari tempo varianti (i coefficienti $a_i(t)$ e $b_i(t)$ variano nel tempo):

$$b_2(t)\ddot{y}(t) + b_1(t)\dot{y}(t) + b_0(t)y(t) = a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$$

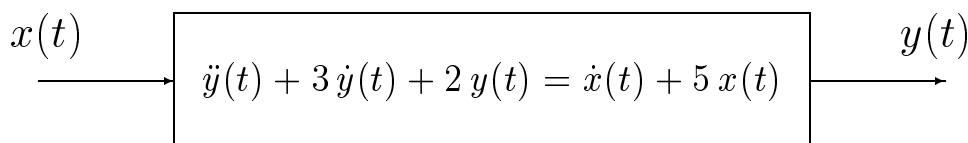
3) lineari tempo-invarianti (i coefficienti a_i e b_i sono costanti):

$$b_2\ddot{y}(t) + b_1\dot{y}(t) + b_0y(t) = a_1\dot{x}(t) + a_0x(t)$$

- Nel seguito si farà riferimento solamente ad equazioni differenziali lineari tempo-invarianti. Esempio:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)$$

- Vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.
- Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) quale sarà l'andamento futuro dell'uscita $y(t)$ del sistema, noto che sia l'andamento dell'ingresso $x(t)$.



- Noto $x(t)$, l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione $y(t)$. Eseguire questo calcolo vuol dire “risolvere” l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso $x(t)$.
- Dall'equazione differenziale è possibile ricavare anche la descrizione “statica” del sistema, basta mettere a zero tutte le derivate ($\dot{y}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0$, $\dots$, $\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$, $\dots$):

$$2y(t) = 5x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{5}{2}x(t)$$

- È possibile anche tenere conto, eventualmente, delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell'energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).
- Nei problemi di controllo, le condizioni iniziali vengono spesso trascurate in quanto, per sistemi controllati stabili, la loro influenza tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.
- Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli, è quello di utilizzare le **Trasformate di Laplace**.
- Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse $X(s)$ ed $Y(s)$ della variabile complessa s messe in corrispondenza *biunivoca* con i corrispondenti segnali temporali $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$y(t) \quad \leftrightarrow \quad Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

- Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle trasformate di Laplace è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in una semplice equazione algebrica facilmente risolubile.
- Una proprietà importante della trasformata di Laplace è la seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

- Nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle, $x(0^-) = 0$, si ha:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s X(s)$$

cioè in ambito trasformato per derivare un segnale basta moltiplicare per “s” la sua trasformata di Laplace.

- Esempio. Applicando la trasformata di Laplace alla seguente equazione differenziale (se le condizioni iniziali sono nulle)

$$\ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) + 2 y(t) = \dot{x}(t) + 5 x(t)$$

si ottiene la seguente relazione algebrica

$$s^2 Y(s) + 3 s Y(s) + 2 Y(s) = s X(s) + 5 X(s)$$

$$(s^2 + 3 s + 2) Y(s) = (s + 5) X(s)$$

dalla quale si ricava il seguente legame tra la funzione di ingresso $X(s)$ e la funzione di uscita $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s + 5)}{s^2 + 3 s + 2}}_{G(s)} X(s) = G(s) X(s)$$

- La funzione $G(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema. Essa caratterizza completamente il sistema in esame e si ricava direttamente e in modo biunivoco dalla corrispondente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) + 2 y(t) = \dot{x}(t) + 5 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{(s + 5)}{s^2 + 3 s + 2}$$

- La relazione $Y(s) = G(s) X(s)$ indica che la risoluzione di equazioni differenziali in ambito trasformato è molto semplice: la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita si ricava semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema per la trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso:

$$Y(s) = G(s) X(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s) X(s)]$$

Per ricavare $y(t)$ sarà sufficiente antitrasformare la funzione $Y(s)$.