

IL PROGETTO DEI REGOLATORI

Dati di specifica e loco compatibilità

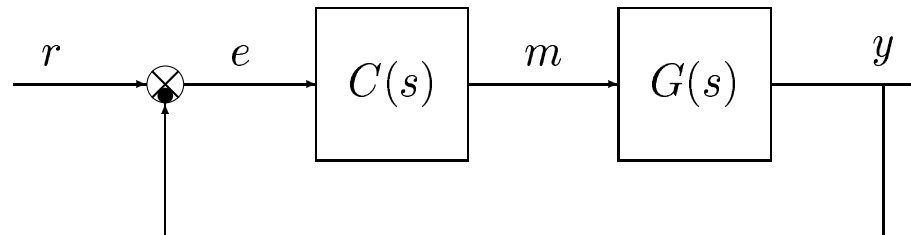
Le principali reti corretttrici

La compensazione mediante reti correttrici

Sintesi di reti corretttrici mediante le formule di inversione

Sintesi di reti correttrici

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove $G(s)$ è il sistema da controllare e $C(s)$ è un'opportuna rete corretttrice aventi la seguente struttura:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

- Si ha una rete anticipatrice quando $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

- Si ha una rete ritardatrice quando $\tau_1 < \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

- Le specifiche dinamiche relative ad un sistema retroazionato vengono date in termini di margine di fase M_φ e di margine di ampiezza M_α .
- Problema di progetto:

Determinare i valori τ_1 e τ_2 della rete corretttrice $C(s)$ in modo che

$$C(j\omega) = \frac{1 + j \tau_1 \omega}{1 + j \tau_2 \omega} = M e^{j\varphi}$$

cioè in modo che la rete amplifichi di M ed anticipi di φ in corrispondenza della pulsazione ω .

- Il problema di progetto è risolto dalle seguenti formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

- Le formule di inversione si ottengono riscrivendo l'equazione

$$C(j\omega) = \frac{1 + j \tau_1 \omega}{1 + j \tau_2 \omega} = M e^{j\varphi} = M \cos \varphi + j M \sin \varphi$$

nella forma

$$(M \cos \varphi + j M \sin \varphi)(1 + j \tau_2 \omega) = 1 + j \tau_1 \omega,$$

trasformando tale equazione nel sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -M \cos \varphi \\ 0 & M \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \omega \\ \tau_2 \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \sin \varphi \\ M \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$$

e risolvendo rispetto alle variabili τ_1 e τ_2

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} M \sin \varphi & -M \cos \varphi \\ M \cos \varphi - 1 & M \sin \varphi \end{vmatrix}}{\omega M \sin \varphi} = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}$$

$$\tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & M \sin \varphi \\ 0 & M \cos \varphi - 1 \end{vmatrix}}{\omega M \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

- Forma unificata per la sintesi di reti correttrici:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{\omega \sin \varphi + (M - \cos \varphi)s}{\omega \sin \varphi + (\cos \varphi - \frac{1}{M})s}$$

- Tale formula è valida sia per reti anticipatrici che ritardatrici:

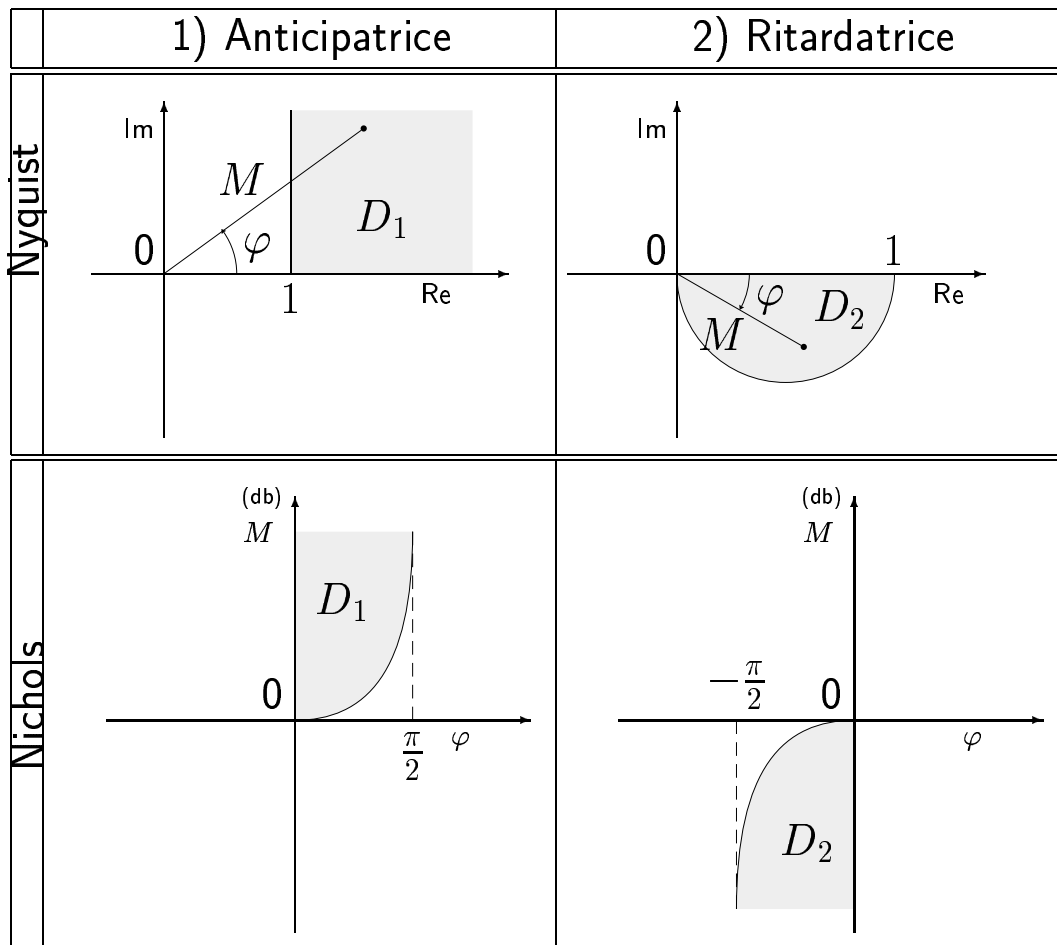
- Per reti anticipatrici deve essere: $M > 1$ e $\varphi > 0$
- Per reti ritardatrici deve essere: $M < 1$ e $\varphi < 0$

- Le formule di inversione possono essere utilizzate solo se il punto (M, φ) appartiene ad uno di questi due domini di ammissibilità:

$$D_1 = \left\{ (M, \varphi) : 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad M \geq \frac{1}{\cos \varphi} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (M, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0, \quad 0 < M \leq \cos \varphi \right\}$$

- D_1 per la rete anticipatrice e D_2 per la rete ritardatrice.
- Rappresentazione dei domini D_1 e D_2 sul piano di Nyquist e sul piano di Nichols:

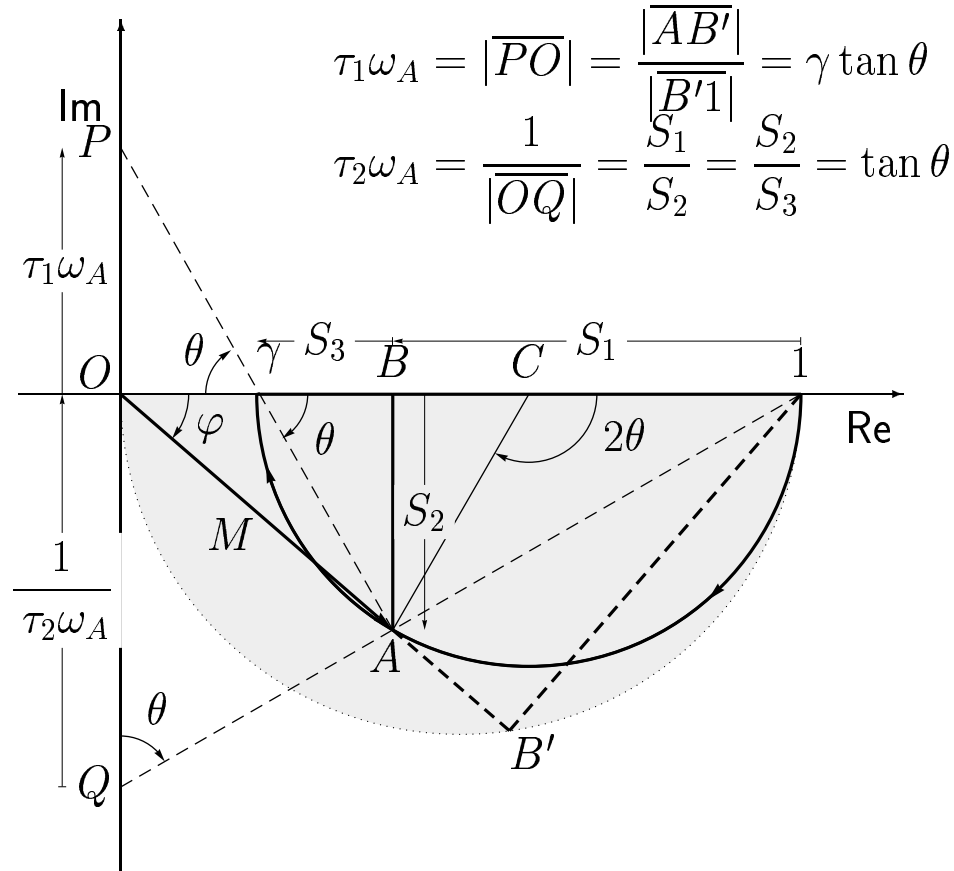


- Il problema di sintesi della rete correttrice $C(s)$ ammette una sola soluzione se il punto (M, φ) appartiene ad uno dei domini di ammissibilità.
- Per verificare l'appartenenza del punto (M, φ) ad uno dei due domini di ammissibilità è sufficiente utilizzare le formule di inversione e verificare che i parametri τ_1 e τ_2 ottenuti siano entrambi positivi. Se uno dei due è negativo il punto (M, φ) scelto non è ammissibile.

- Formule di inversione:

$$\tau_1 \omega_A = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \tau_2 \omega_A = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\sin \varphi}$$

- Interpretazione grafica delle formule di inversione nel caso di una rete ritardatrice.



- Formule di inversione specifiche per la sintesi dei parametri α e τ di una rete anticipatrice:

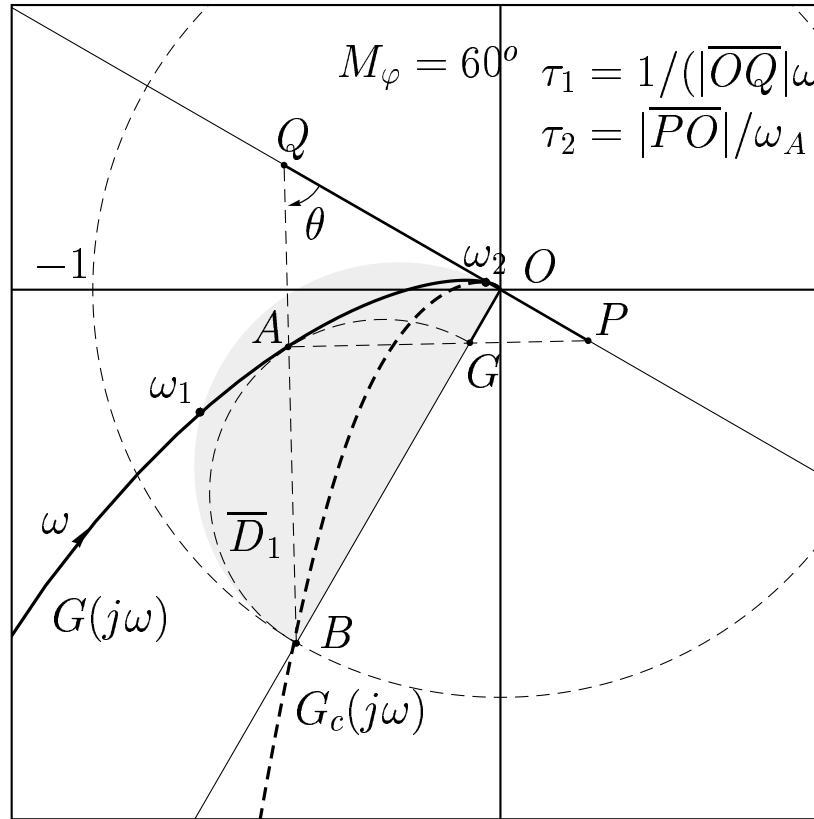
$$\tau = \tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

- Formule di inversione specifiche per la sintesi dei parametri α e τ di una rete ritardatrice:

$$\tau = \tau_2 = \frac{M \cos \varphi - 1}{M \omega \sin \varphi}, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{M(M - \cos \varphi)}{M \cos \varphi - 1}$$

Sintesi sul piano di Nyquist

a) Sintesi di una rete anticipatrice. Specifica: margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$.



- Sistema $G(s)$ e rete corretttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1 + 0.806s)}{(1 + 0.117s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 0.538 \quad \varphi_A = 194.9^\circ$$

nel punto B

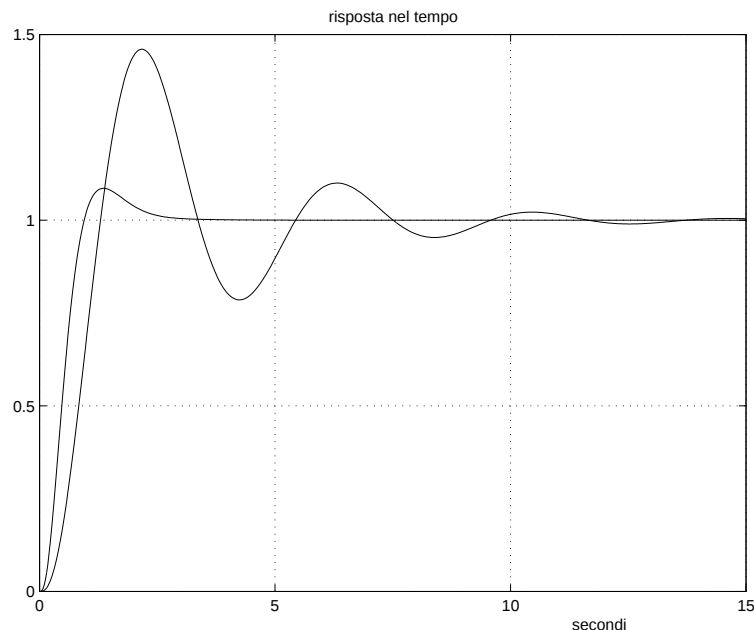
$$B = e^{j(\pi + M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete anticipatrice deve amplificare e anticipare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.538} = 1.8587, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 45.1^\circ$$

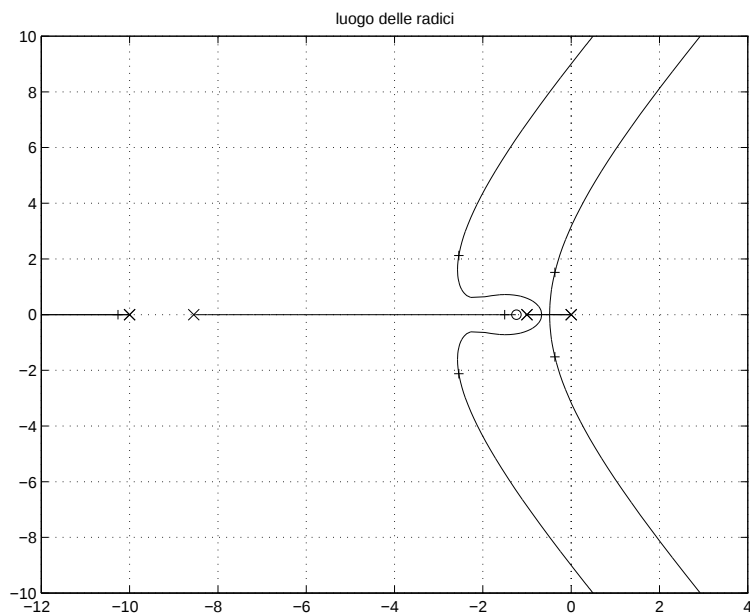
- Sostituendo i parametri M , φ e $\omega_A = 2.02$ nelle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 0.806$ e $\tau_2 = 0.117$.

- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



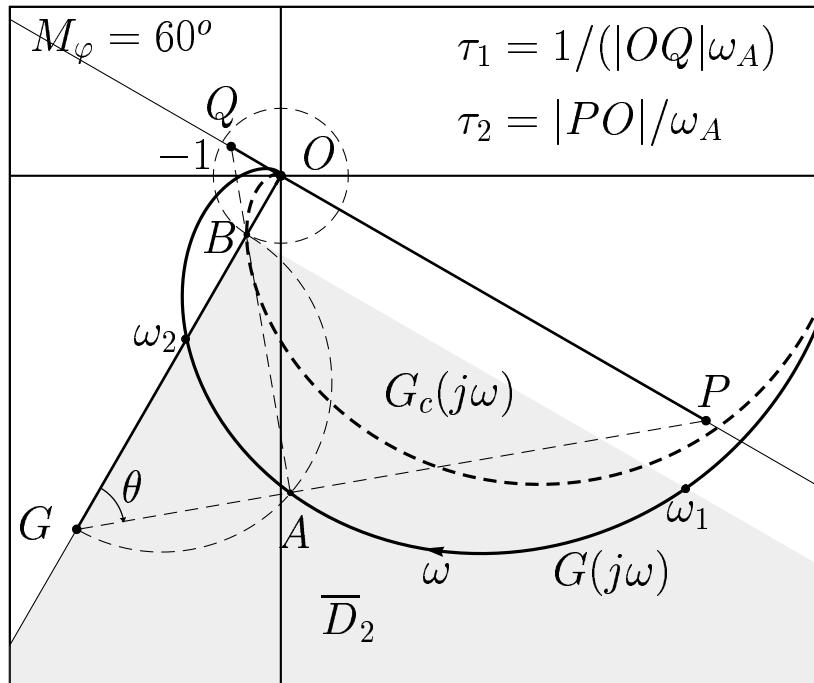
L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovraelongazione) che la prontezza del sistema (il tempo di salita è più basso).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete anticipatrice ha sensibilmente spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato.

b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase: $M_\varphi = 60^\circ$.



- Sistema $G(s)$ e rete corretttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^\circ$$

nel punto B

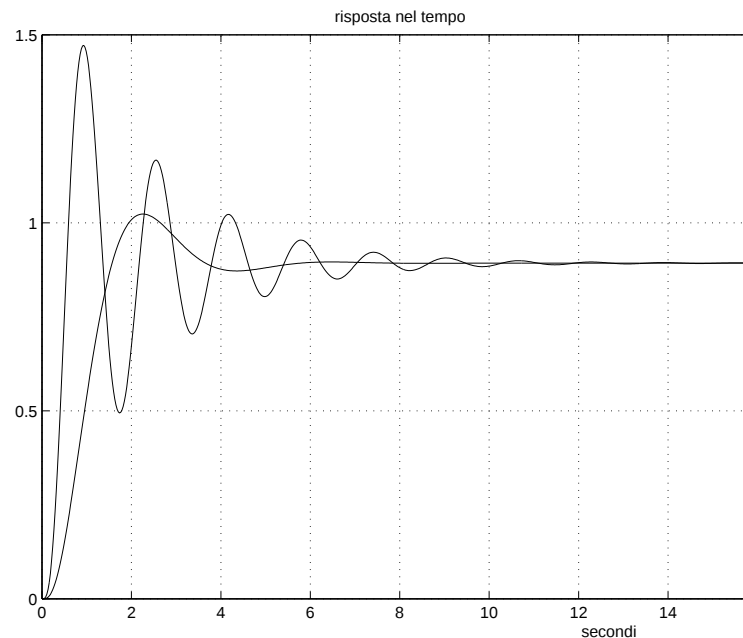
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{4.672} = 0.214, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^\circ$$

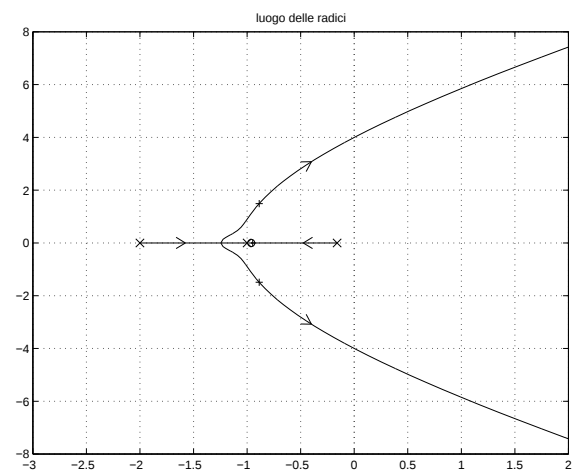
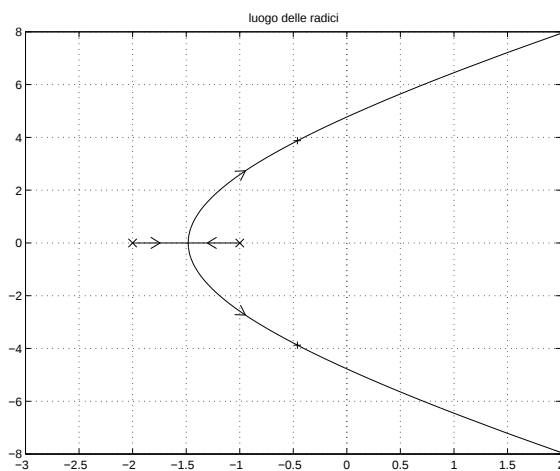
- Sostituendo i parametri M , φ e $\omega_A = 1.16$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 1.04$ e $\tau_2 = 6.25$.

- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



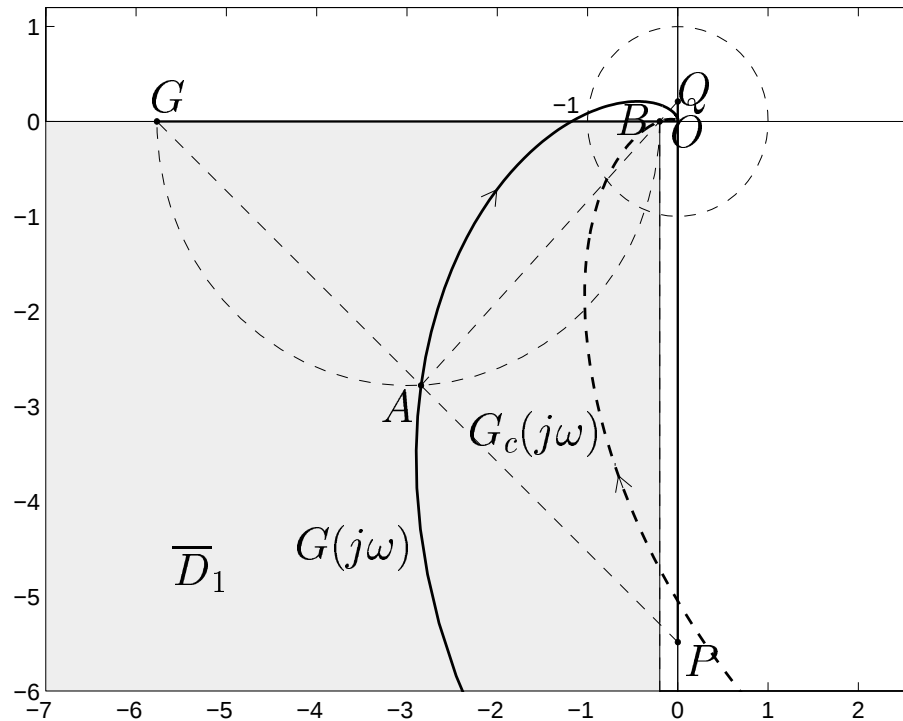
L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il transitorio diminuendo la sovraelongazione, però ha reso il sistema meno pronto (tempo di salita più elevato).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete corretttrice ha spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato aumentando contemporaneamente il coefficiente di smorzamento δ .

c) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di ampiezza $M_\alpha = 5$.



- Sistema $G(s)$ e rete corretttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A} \quad \rightarrow \quad M_A = 3.978, \quad \varphi_A = 224.4^\circ$$

nel punto B

$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_B = -\pi$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

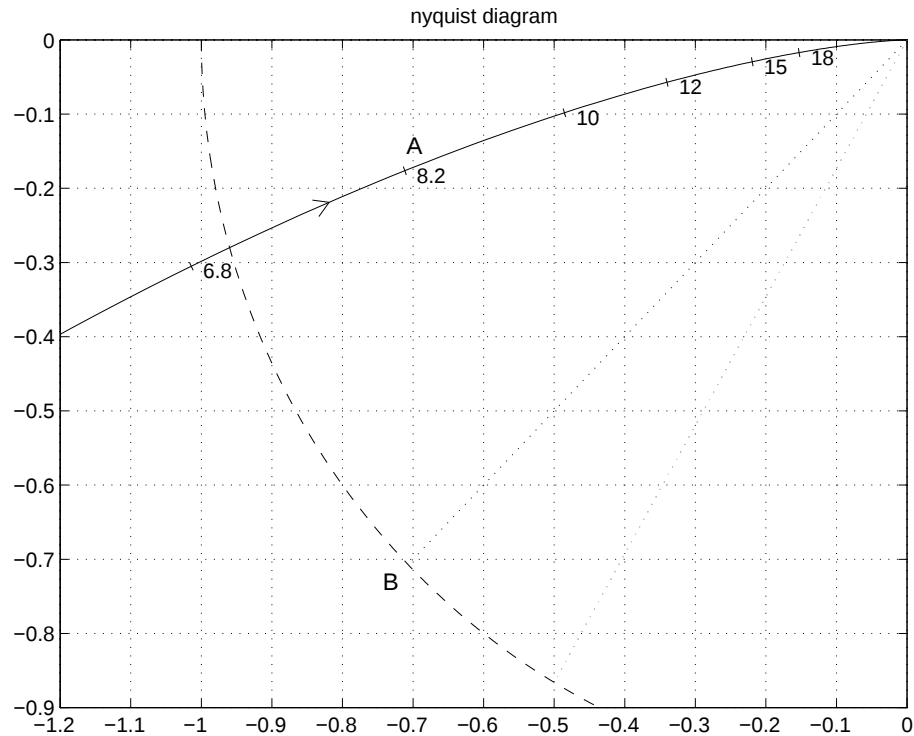
$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^\circ$$

- Sostituendo i parametri M , φ e $\omega_A = 2.4$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 0.396$ e $\tau_2 = 11.42$.

Sintesi di reti corretttrici mediante le formule di inversione

Esercizi di sintesi di un regolatore

- *Esempio.* Si consideri il seguente diagramma di Nyquist.



Calcolare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete anticipatrice ($\tau_1 > \tau_2$)

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da portare il punto A in B , cioè in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8.2$.

- L'ampiezza M_A e la fase φ_A del punto A si ottengono dal diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega) = M_A e^{j\varphi_A}$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8.2$:

$$M_A \simeq \sqrt{0.71^2 + 0.176^2} = 0.73$$

$$\varphi_A \simeq \arctan \frac{0.176}{0.71} - 180 = 14 - 180 = -166^\circ = 194^\circ$$

- Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega = 8.2$ per portare il punto A in B sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225^\circ - 194^\circ = 31^\circ$$

- Sostituendo questi valori nelle formule di inversione (??) si ricava

$$\tau_1 = \frac{1.37 - \cos 31^\circ}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.1214, \quad \tau_2 = \frac{\cos 31^\circ - \frac{1}{1.37}}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.0301$$

per cui la rete anticipatrice cercata è

$$T(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.1214s}{1 + 0.0301s}$$

- L'andamento del diagramma di Nyquist del sistema originario $G(s)$ e del sistema compensato $T(s)G(s)$.

