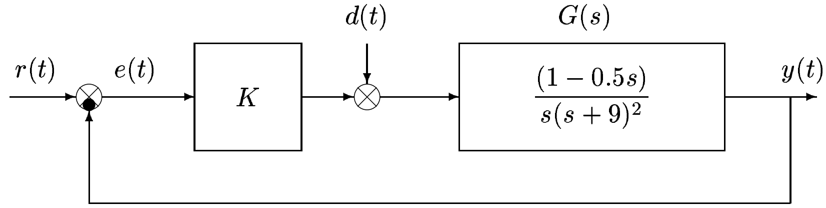
Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

b) Posto $K = 100$, determinare il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita $y(t)$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo $d(t) = 3$ e il riferimento $r(t) = 2 \sin 9t$.

c) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma polare di Nyquist del guadagno di anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse reale ed i corrispondenti valori della pulsazione ω.

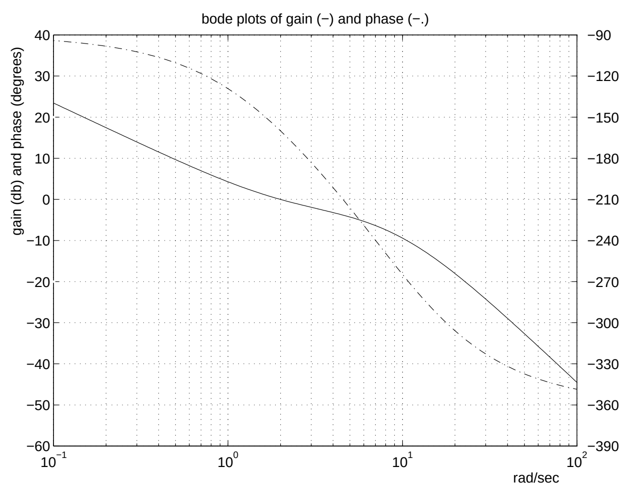
d) Posto $K = 100$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

e) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Calcolare esattamente i punti di diramazione del luogo delle radici. Indicare qual è il punto del luogo delle radici a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento T_a per il sistema retroazionato.

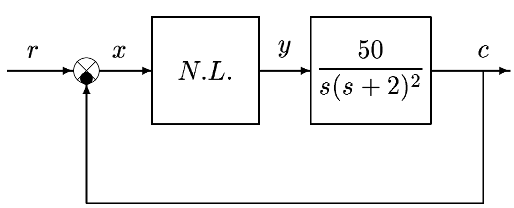
f) Si consideri il diagramma di Bode delle ampiezze (tratto continuo) e delle fasi (tratto e punto) riportato a fianco. Determinare i parametri α e τ_1 e τ_2 della rete a ritardo e anticipo

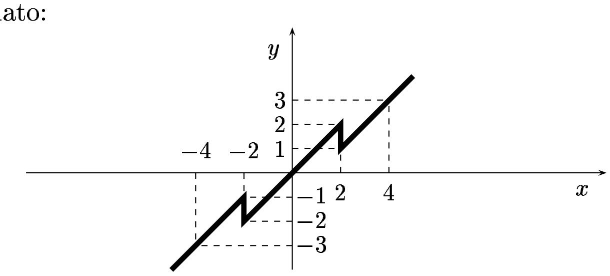
$$R(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha\tau_1 s)(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s)}$$

in modo da imporre al sistema retroazionato un margine di fase $M_F = 60^o$. Si ponga $\tau_2 = 9\tau_1$ e si utilizzi il valore "reale" dell'attenuazione (non quello "asintotico") nel punto centrale della rete correttrice.



g) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





Determinare l'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y = y(x)$ e discutere, in termini di presenza o meno di oscillazioni autosostenute, la stabilità del sistema retroazionato nel punto di origine $(0,\ 0)$.

h) Calcolare la risposta $y(n)$ al gradimo unitario $x(n) = 1$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 0.4y(n) + u(n) \qquad\qquad y(0) = 0$$

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(1-0.5s)}{s(s+9)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 18s^2 + (81-0.5K)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc l}
3 & 1 & 81-0.5K & \\
2 & 18 & K & \\
1 & 18(81-0.5K)-K & & \rightarrow\ K < \frac{9^3}{5} \\
0 & K & & \rightarrow\ K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile per i seguenti valori di K

$$0 < K < \frac{9^3}{5} = 145.8 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 145.8$ vale

$$\omega^* = \sqrt{8.1} \simeq 2.846$$

b) Si ponga $K = 100$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'uscita $Y(s)$ può essere espressa come somma dei contributi derivanti dall'ingresso $R(s)$ e dal disturbo $D(s)$:

$$Y(s) = G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) = \frac{G(s)}{1+K\,G(s)}D(s) + \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)}R(s)$$

Sostituendo si ottiene

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(1-0.5s)}{s(s+9)^2+50(2-s)}}_{G_d(s)} D(s) + \underbrace{\frac{50(2-s)}{s(s+9)^2+50(2-s)}}_{G_r(s)} R(s)$$

Dall'analisi svolta al punto a) sappiamo che per $K = 100$ il sistema è stabile, per cui il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita può essere calcolato semplicemente utilizzando il "concetto" di funzione di risposta armonica:

$$y_\infty(t) = 5G_d(0) + 2|G_r(j9)|\sin(t + Arg[G_r(j9)])$$

dove

$$G_d(0) = \frac{1}{100}, \qquad\qquad G_r(j9) = \frac{-50(2-j9)}{1358+450j}$$

da cui

$$|G_r(j9)| = \frac{50\sqrt{2+81}}{\sqrt{1358^2+450^2}} = 0.32222$$

$$Arg[G_r(j9)] = \pi - \arctan\frac{9}{2} - \arctan\frac{450}{1358} \simeq 1.469\ (\text{rad}) = 84.195^o$$

Il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita è qundi il seguente

$$y_\infty(t) \simeq 0.03 + 0.64444\sin(9t + 1.469)$$

c) Posto $K = 100$, il guadagno di anello del sistema è

$$K\,G(s) = \frac{50(2-s)}{s(s+9)^2}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1. L'asintoto verticale σ_a del

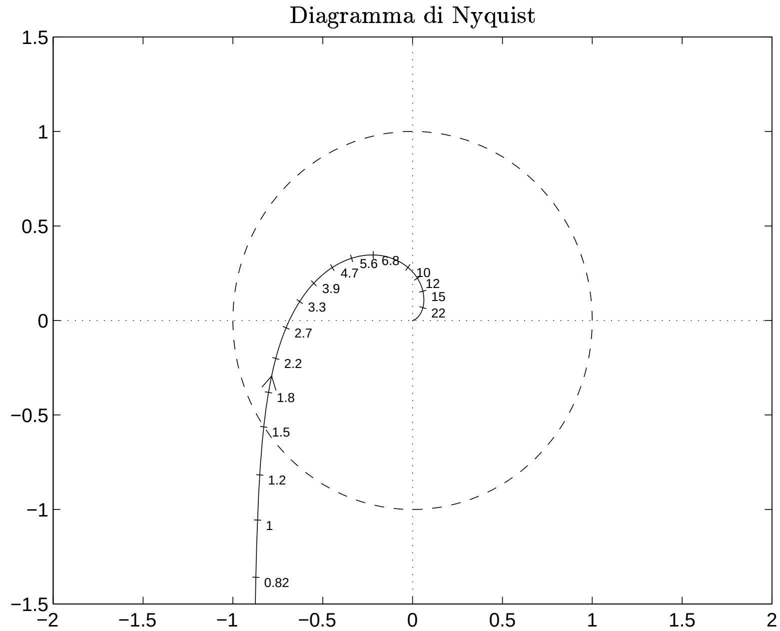


Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $K\,G(s)$.

diagramma di Nyquist è

$$\sigma_a = \frac{100}{81}\left(-0.5 - \frac{2}{9}\right) = -0.8916$$

Dall'analisi di stabilità svolta al punto a) si determina facilmente l'intersezione σ_0 con l'asse reale negativo

$$\sigma_0 = \frac{500}{9^3} \simeq 0.6858$$

Tale intersezioni si ha in corrispondenza della pulsazione $\omega_0 = \sqrt{8.1} = 2.846$.

d) Per $K = 100$, il guadagno di anello $K\,G(s)$ è il seguente

$$K\,G(s) = \frac{50(2-s)}{s(s+9)^2}$$

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Il guadagno asintotico del sistema per $\omega = 2$ è

$$|G_a(2j)| = \frac{50}{81} = 0.6173 = -4.19 \text{ db}$$

e) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(2-s)}{2s(s+9)^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro K è mostrato in Fig. 3 per $K > 0$ e in Fig. 3 per $K < 0$. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente

$$\sigma_a = -\frac{20}{2} = -10$$

I punti di diramazione di determinano uguagliando a zero la derivata dell'equazione caratteristica rispetto ad s:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{(2-s)}{s(s+9)^2}\right] = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+9)[s^2+9s+(2-s)(3s+9)] = 0$$

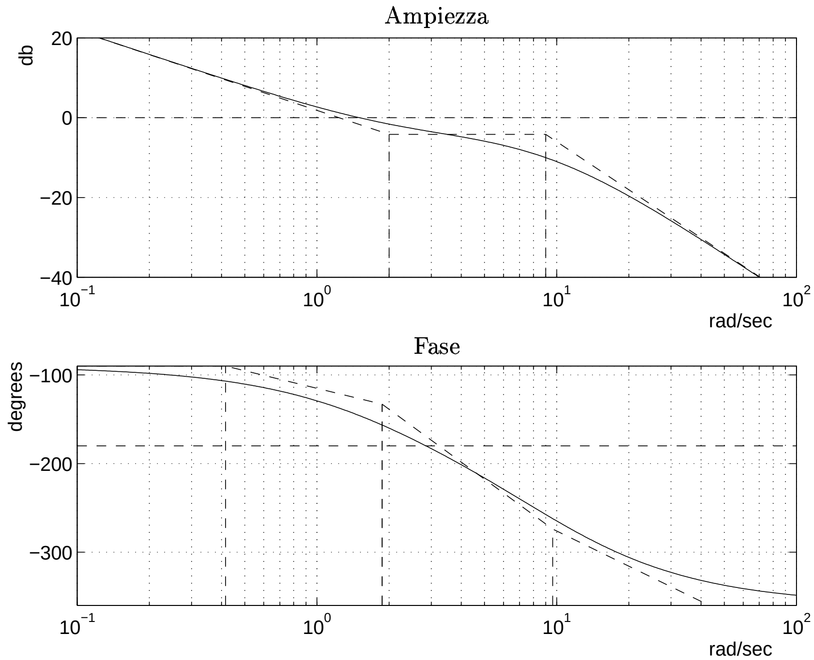


Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

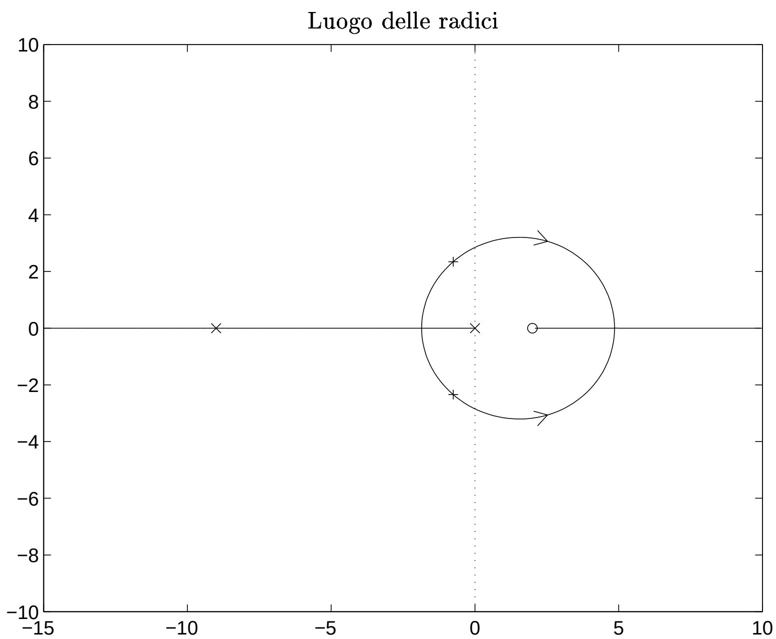


Figura 3: Luogo delle radici della funzione $K\,G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

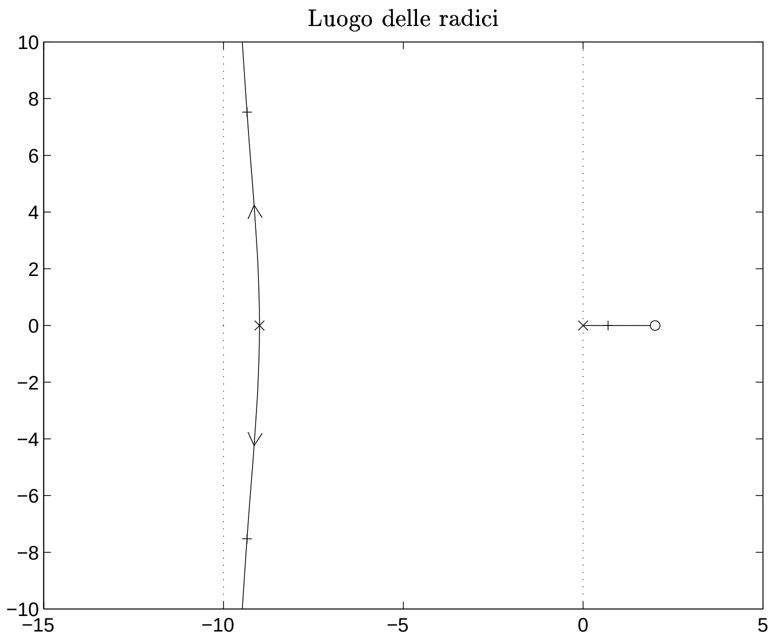


Figura 4: Luogo delle radici della funzione $K\,G(s)$ al variare del parametro $K<0$.

da cui

$$(s+9)(s^2-3s-9)=0$$

I tre punti di diramazione sono posizionati in

$$p_1=-9, \qquad p_2=\frac{3+\sqrt{45}}{2}=4.854 \qquad p_3=\frac{3-\sqrt{45}}{2}=-1.854$$

Il minimo tempo di assestamento T_a si ha in corrispondenza del punto di diramazione p_3. Ad esso corrisponde il valore $K=49.13$

f) Il sistema ha un margine di fase $M_F=60^o$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^*=0.75$. Il centro della rete a ritardo e anticipo viene posto in ω^0 per non introdurre ulteriori sfasamenti in quel punto.

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}=\omega^*, \qquad \tau_2=9\tau_1 \qquad \rightarrow \qquad \tau_1=\frac{1}{\omega^*\sqrt{10}}=0.4216$$

L'attenuazione A necessaria per imporre il margine di fase voluto è $A=1/2.24=-7$ db. Tale velore viene posto uguale all'attenuazione della rete corretrice nel punto centrale:

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\alpha\tau_1+\frac{\tau_2}{\alpha}}=\frac{1}{2.24} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\alpha(1+\frac{\tau_2}{\tau_1})}{\alpha^2+\frac{\tau_2}{\tau_1}}=A^{-1}$$

da cui

$$\alpha^2-10A^{-1}\alpha+9=0 \qquad \rightarrow \qquad \alpha=\frac{10}{2}A^{-1}-\sqrt{\frac{100}{4}A^{-2}-9}$$

g) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 5. La parte lineare del sistema ha un margine di ampiezza $M_A=0.32$. Il sistema retroazionato può essere caratterizzato da due cicli limite, uno stabile e uno instabile, se la relazione $F(X)=0.32$ ha delle soluzioni. Non essendovi intersezioni non vi possono essere cicli limite. Il sistema retroazionato è instabile in quanto tutta la funzione descrittiva è contenuta all'interno del diagramma polare completo della funzione

h) La funzione di trasferimento discreta associata all'equazione alle differenze data è la seguente

$$y(n+1)=0.5y(n)+u(n) \qquad \rightarrow \qquad G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{z-0.5}$$

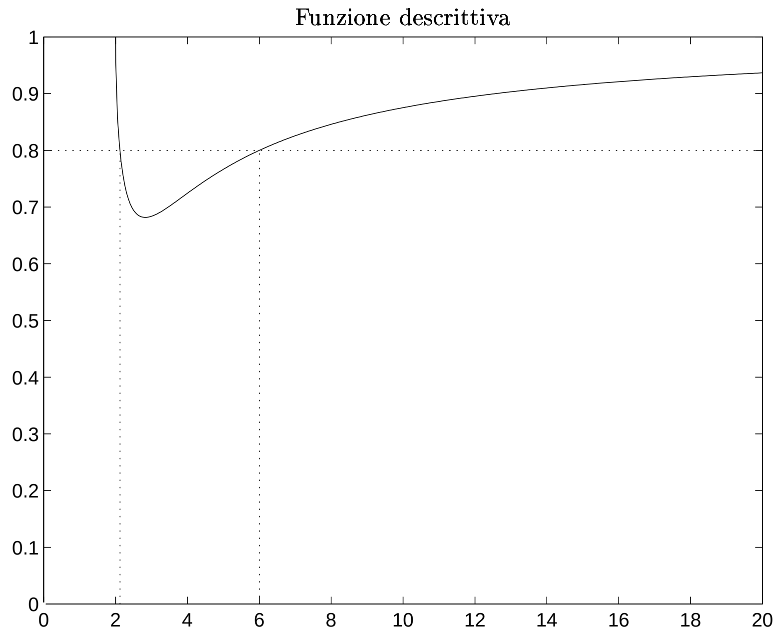


Figura 5: Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$.

La riposta al gradino di questo sistema è

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

Applicando la scomposizione in fratti semplici si ha

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-0.5} \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5}$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(n) = 2 - 2(0.5)^n$$

Esame scritto di "Controlli Automatici" - Modena - 24 Ottobre 1997 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni con parametri costanti nel tempo
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema

2. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento $\delta = 0.9$ presenta un picco di risonanza M_R:

   ○ $M_R > 1$
   ⊗ $M_R = 1$
   ○ $M_R < 1$

3. Il sistema $G(s) = \dfrac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ $(K > 0,\ \tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0)$

   ⊗ ha un margine di fase positivo: $M_F > 0$
   ○ ha un margine di ampiezza positivo (maggiore di uno): $M_A > 0$ db $= 1$
   ○ posto in retroazione unitaria negativa può essere instabile

4. Il diagramma di Nyquist di un sistema stabile $G(s)$ presenta un asintoto verticale in $\sigma = -1$. Pensando ai luoghi ad M costante, è possibile affermare che il sistema retroazionato $G_0(s)$

   ○ ha un picco di risonanza unitario: $M_R = 1$
   ⊗ ha un picco di risonanza maggiore di uno: $M_R > 1$
   ⊗ ha un guadagno statico unitario: $G_0(0) = 1$
   ○ ha un guadagno statico minore di uno: $G_0(0) < 1$

5. Il diagramma di Nichols del sistema $G(s) = \frac{1}{s(1-\tau s)}$ $(\tau > 0)$ all'aumentare di ω

   ○ è una curva a modulo crescente e fase crescente
   ○ è una curva a modulo crescente e fase decrescente
   ⊗ è una curva a modulo decrescente e fase crescente
   ○ è una curva a modulo decrescente e fase decrescente

6. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva
   ○ può avere sia un polo che uno zero a parte reale positiva

7. Il metodo del luogo delle radici si applica

   ○ ai soli sistemi con retroazione unitaria
   ○ ai soli sistemi con retroazione algebrica
   ⊗ ai sistemi con retroazione qualunque

8. Due sistemi di tipo 0 (entrambi asintoticamente stabili), aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria

   ○ generano sistemi retroazionati stabili
   ⊗ presentano lo stesso errore a regime per ingresso a gradino
   ○ presentano errore a regime nullo per ingresso a rampa

9. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto reale ($n - m > 0$ è il grado relativo)

   ⊗ quando K_1 è positiva e $n - m$ è dispari
   ○ quando K_1 è positiva e $n - m$ è pari
   ⊗ quando K_1 è negativa e $n - m$ è dispari
   ⊗ quando K_1 è negativa e $n - m$ è pari

10. L'uso della rete di ritardo e anticipo in alternativa alla rete anticipatrice presenta i vantaggi

   ⊗ di semplificare il progetto quando venga imposto il margine di fase
   ⊗ di semplificare il progetto quando venga imposto il margine di ampiezza
   ○ di migliorare la banda passante

11. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

   ○ richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
   ○ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
   ⊗ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
   ○ è applicabile solamente per sistemi lineari

12. Per poter applicare il criterio del Popov ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$

   ○ il sistema $G(s)$ deve essere a fase minima
   ○ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine
   ⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve essere di tipo "a settore"

13. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello risulta poco sensibile

   ○ alle variazioni parametriche di $H(s)$
   ⊗ alle variazioni parametriche di $G(s)$
   ⊗ ai disturbi additivi agenti sul sistema

14. Da un punto di vista "frequenziale", nella banda $\omega \in [0,\ \frac{\pi}{T}]$ il ricostruttore di ordine zero $H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$

   ⊗ è un passabasso
   ○ è un passabanda
   ○ ha guadagno statico unitario $H_0(j0) = 1$
   ⊗ ha guadagno nullo per $\omega = \frac{\pi}{T}$: $H_0(j\frac{\pi}{T}) = 0$

15. Il metodo di discretizzazione per "trasformazione bilineare" applicato alla funzione $G(s)$ opera la seguente sostituzione

   ○ $s = \frac{2}{T}\frac{1-z}{1+z}$
   ⊗ $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
   ○ $s = \frac{T}{2}\frac{1+z}{1-z}$
   ○ $s = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$

16. Sia $X(z)$ la Z-trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore finale afferma che

   ○ $x(\infty) = \lim_{z\to 1} zX(z)$
   ○ $x(\infty) = \lim_{z\to 0} zX(z)$
   ⊗ $x(\infty) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$
   ○ $x(\infty) = \lim_{z\to 0}(1 - z^{-1})X(z)$