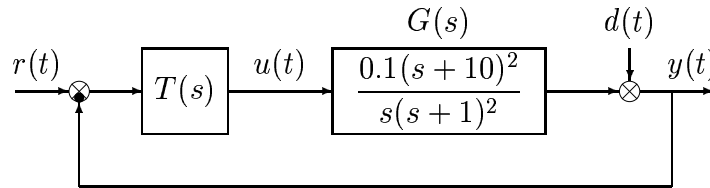


Sia dato il seguente sistema dinamico in retroazione

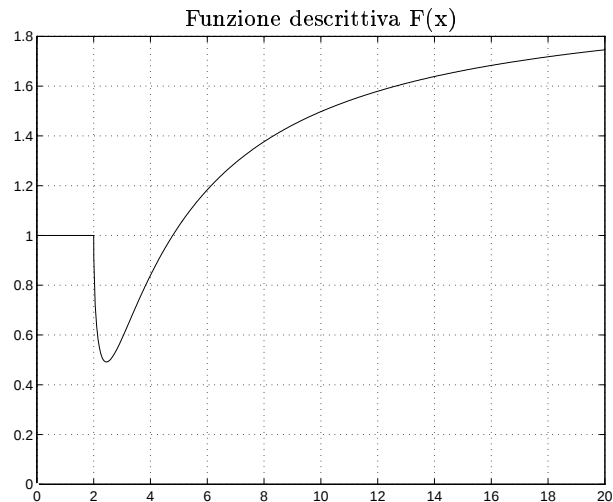


- Posto $T(s) = K$, determinare per quali valori del parametro $K > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- Posto $T(s) = 100$, si determini l'andamento a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita $y(t)$ corrispondente ad un riferimento nullo $r(t) = 0$ e ad un disturbo sinusoidale $d(t) = 100 \sin t$ agente sul sistema.
- Disegnare qualitativamente il diagramma polare “completo” di Nyquist della funzione $G(s)$. Calcolare, se esistono, le intersezioni con l'asse reale e dire se, in base al criterio di Nyquist, il sistema retroazionato è stabile o meno.
- Tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.
- Posto $T(s) = K$, tracciare qualitativamente i luoghi delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Calcolare esattamente la posizione degli asintoti e le intersezioni con l'asse immaginario. La posizione dei punti di diramazione deve essere determinata solo in modo “qualitativo”.
- Posto $T(s) = \frac{1+s}{1+\tau s}$, disegnare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Calcolare inoltre le intersezioni con l'asse immaginario e per quali valori del parametro τ il sistema retroazionato è stabile.

g) Sia dato il seguente sistema

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+3)}$$

posto in retroazione negativa su di una non linearità caratterizzata dalla funzione descrittiva $F(X)$ mostrata in figura. Supponendo che l'ingresso sia nullo, $r(t) = 0$, determinare la pulsazione ω e l'ampiezza X (approssimata) delle eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema retroazionato.



- Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze

$$y(n+1) = -0.5y(n) + x(n)$$

quando in ingresso è presente la successione $x(n) = 3(0.5)^n$.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{0.1K(s+10)^2}{s(s+1)^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad s^3 + (2 + 0.1K)s^2 + (1 + 2K)s + 10K = 0$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$\begin{array}{l|ll} 3 & 1 & (1+2K) \rightarrow 1 > 0 \\ 2 & (2+0.1K) & 10K \rightarrow K > -20 \\ 1 & (2+0.1K)(1+2K) - 10K & \rightarrow 2 - 5.9K + 0.2K^2 > 0 \\ 0 & 10K & \rightarrow K > 0 \end{array}$$

Le soluzioni dell'equazione del secondo ordine sono

$$10 - 29.5K + K^2 > 0 \quad \longrightarrow \quad K_{1,2} = \frac{59 \pm \sqrt{59^2 - 160}}{4} = 14.75 \pm 14.41$$

Il sistema è stabile per

$$0 < K < 0.343 = K_1^* \quad \text{e} \quad K > 29.16 = K_2^*$$

Le pulsazioni ω_1^* e ω_2^* corrispondenti ai guadagni limite K_1^* e K_2^* si ottengono direttamente dall'equazione ausiliaria della tabella di Routh:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^*}{(2+0.1K^*)}} = \sqrt{1+2K^*} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^* = 7.7 \\ \omega_2^* = 1.3 \end{cases}$$

b) Per calcolare il valore a regime $y(\infty)$ occorre calcolare la funzione di trasferimento $G_y(s)$ tra l'ingresso $d(t)$ e l'uscita $y(t)$

$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + 100G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10(s+10)^2}{s(s+1)^2}} = \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2 + 10(s+10)^2}$$

Il valore a regime $y_\infty(t)$ corrispondente al disturbo sinusoidale $d(t) = 100 \sin t$ si determina calcolando modulo e fase del numero complesso $G_y(j)$

$$\begin{aligned} G_y(j) &= \left. \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2 + 10(s^2 + 20s + 100)} \right|_{s=j} = \frac{-2}{-2 + 10(99 + 20j)} = \frac{-1}{494 + 100j} \\ &= \frac{1}{100\sqrt{1+4.94^2}} e^{j(\pi - \arctan \frac{1}{4.94})} = 0.00198 e^{2.942j} = 0.00198 e^{168.6^\circ j} \end{aligned}$$

da cui si ottiene che

$$y_\infty(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4.94^2}} \sin(t + \pi - \arctan \frac{1}{4.94}) = 0.198 \sin(t + 2.942) = 0.198 \sin(t + 168.6^\circ)$$

c) L'andamento del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$

$$G_s = \frac{0.1(s+10)^2}{s(s+1)^2}$$

è mostrato in Fig. 1. Un dettaglio del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ in prossimità dell'origine è mostrato in Fig. 2. È presente un asintoto verticale in

$$\sigma_a = 10 \left(\frac{2}{10} - 2 \right) = -18$$

Dall'analisi di stabilità svolta al punto a) risulta chiaro che vi sono due intersezioni σ_1 e σ_2 con l'asse reale negativo:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{K_1^*} = -\frac{1}{0.343} = -2.915 \quad \sigma_2 = -\frac{1}{K_2^*} = -\frac{1}{29.16} = 0.0343$$

Le corrispondenti pulsazioni ω_1^* e ω_2^* sono quelle riportate al punto a).

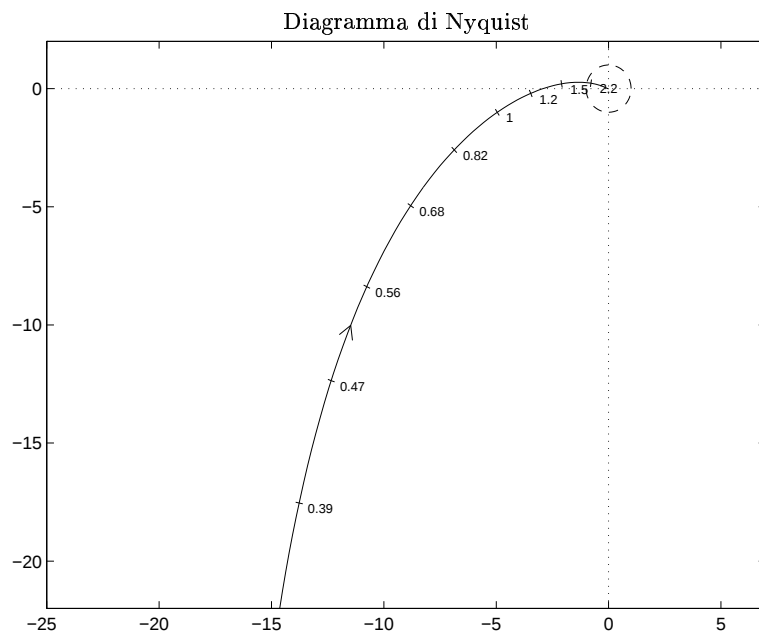


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

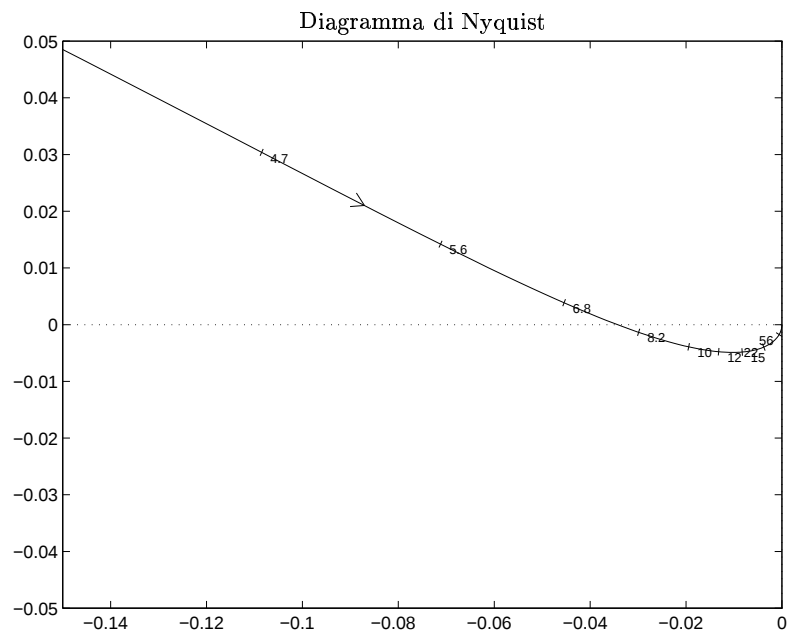


Figura 2: Dettaglio del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ in prossimità dell'origine.

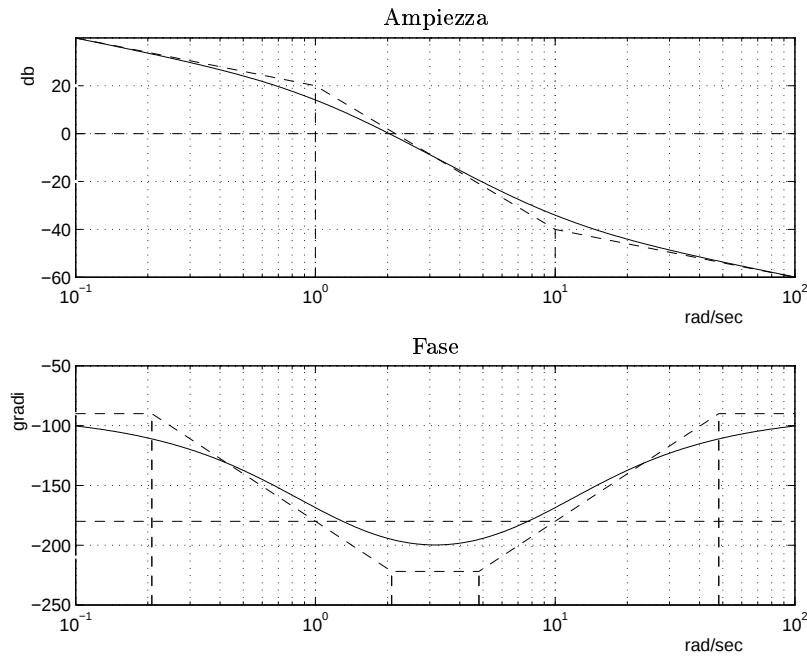


Figura 3: Diagrammi asintotici di Bode.

- d) I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono riportati in Fig. 3. Per $\omega = 1$ il diagramma asintotico delle ampiezze ha un guadagno A pari a

$$A = \frac{0.1(10)^2}{1(1)^2} = 10 = 20 \text{ db}$$

- e) Il luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. È presente un solo asintoto coincidente con il semiasse negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza dei valori di K^* e di ω^* calcolati al punto a):

$$\begin{cases} K_1^* = 0.343 \\ K_2^* = 29.16 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^* = 7.7 \\ \omega_2^* = 1.3 \end{cases}$$

- f) Posto $T(s) = \frac{1+s}{1+\tau s}$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa

$$1 + \frac{0.1(s+10)^2}{s(s+1)(1+\tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1.1s^2 + 3s + 10 + \tau s^2(s+1) = 0$$

Tale equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$1 + \frac{\tau s^2(s+1)}{1.1s^2 + 3s + 10} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau s^2(s+1)}{1.1(s+1.364)^2 + 2.689^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \tau G_1(s) = 0$$

Il corrispondente contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ è riportato in Fig. 5. Nel grafico le tre crocette indicano la posizione delle tre radici del sistema per $\tau = 1$. Il grado relativo della funzione $G_1(s)$ è $r = -1$. Nel contorno delle radici è quindi presente un asintoto (che coincide con il semiasse reale negativo) percorso in senso inverso, cioè dall'infinito al finito.

Per calcolare le intersezioni con l'asse immaginario è bene utilizzare di nuovo il criterio di Routh all'equazione caratteristica seguente

$$1.1s^2 + 3s + 10 + \tau s^2(s+1) = 0 \quad \rightarrow \quad \tau s^3 + (\tau + 1.1)s^2 + 3s + 10 = 0$$

La tabella di Routh è

3	τ	3	$\rightarrow \tau > 0$
2	$\tau + 1.1$	10	$\rightarrow \tau > -1.1$
1	$3(\tau + 1.1) - 10\tau$		$\rightarrow 3.3 - 7\tau > 0$
0	10		$\rightarrow 10 > 0$

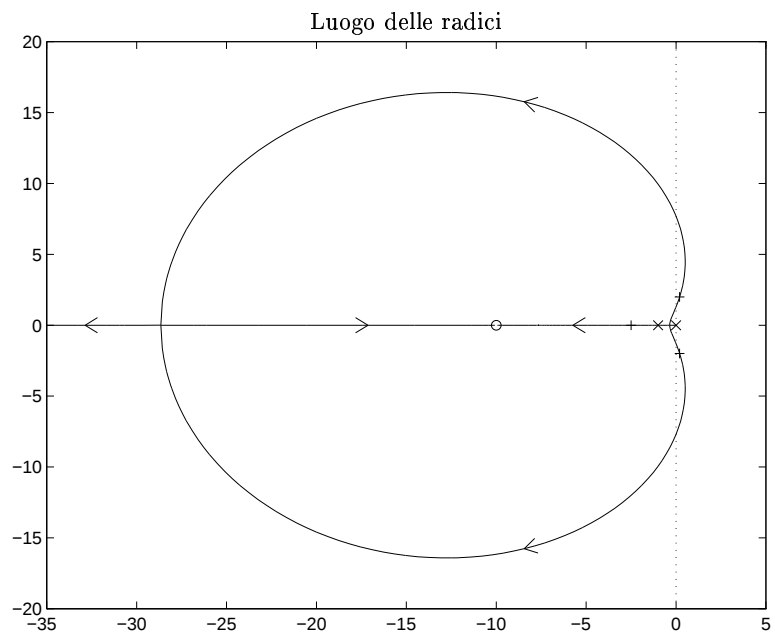


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$.

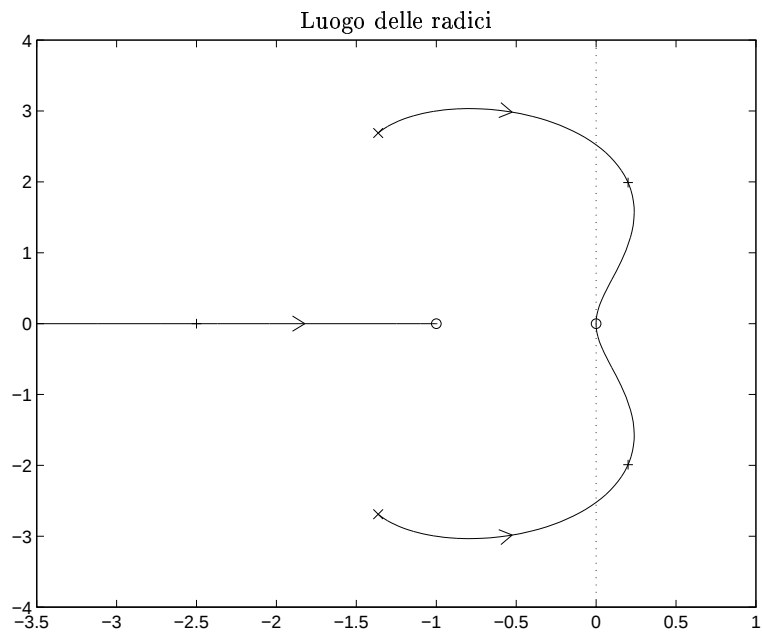


Figura 5: Contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$.

Il sistema è stabile per i seguenti valori di τ

$$0 < \tau < \frac{3.3}{7} = 0.471 = \tau^*$$

Il contorno delle radici interseca l'asse immaginario in corrispondenza della pulsazione

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3}{\tau^*}} = \sqrt{\frac{7}{1.1}} = 2.52$$

- g) Per poter risolvere il problema occorre calcolare il margine di ampiezza del sistema $G_1(s)$. Utilizzando la tabella di Routh è possibile dimostrare che un sistema $G(s)$ avente la seguente struttura

$$G(s) = \frac{c}{s(s+a)(s+b)}$$

è caratterizzato da un margine di ampiezza K^* e da una pulsazione critica ω^* che valgono

$$K^* = \frac{a b (a + b)}{c}, \quad \omega^* = \sqrt{a b}$$

Applicando queste formule al caso in esame, si ha

$$K^* = 1.2 \quad \omega^* = \sqrt{3}$$

Si ha un'oscillazione autosostenuta quando $K^* = F(X)$. Utilizzando il grafico della funzione descrittiva si determina che, approssimativamente, l'ampiezza dell'oscillazione autosostenuta è $X^* \simeq 6.1$. Si nota però che al crescere di X la funzione $-1/F(X)$ tende ad entrare all'interno del diagramma polare completo della funzione $G_1(s)$, per cui tale ciclo limite è instabile. Non esistono altri cicli limite. In funzione della condizione iniziale, il sistema ammette due possibili funzionamenti: 1) punto di lavoro stabile nell'origine, oppure 2) instabilità. La funzione descrittiva che è stata fornita è relativa ad una non linearità simmetrica rispetto all'origine passante per i punti (2, 2), (2, 0) e (4, 4).

- h) Dall'equazione alle differenze data si ricava la corrispondente funzione di trasferimento discreta $G(z)$:

$$y(n+1) = -0.5y(n) + x(n) \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z+0.5}$$

La Z-trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 3(0.5)^n$ è

$$X(z) = \frac{3z}{z-0.5}$$

La Z-trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{3z}{(z+0.5)(z-0.5)}$$

da cui, mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici, si ricava

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3}{(z+0.5)(z-0.5)} = \frac{3}{(z-0.5)} - \frac{3}{(z+0.5)}$$

e quindi

$$Y(z) = \frac{3z}{(z-0.5)} - \frac{3z}{3(z+0.5)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 3[(0.5)^n - (-0.5)^n]$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Sia dato il diagramma di Nichols della funzione $G(j\omega)$. Il diagramma di Nichols della funzione $-G(j\omega)$ si ottiene da quello di $G(j\omega)$
 - ☐ ribaltando il diagramma di $G(j\omega)$ rispetto all'asse delle ascisse
 - ☒ spostando il diagramma di $G(j\omega)$ a sinistra di $-\pi$.
 - ☐ ribaltando il diagramma di $G(j\omega)$ rispetto all'asse delle ordinate
2. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da
 - ☒ 2 poli nulli
 - ☐ 2 poli complessi coniugati
 - ☐ grado relativo $n - m = 2$
3. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito
 - ☒ con una circonferenza percorsa in senso orario
 - ☐ con una circonferenza percorsa in senso antiorario
 - ☐ con una semicirconferenza percorsa in senso orario
 - ☐ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario
4. L'equazione differenziale $\ddot{y} = -t^2 y + x$ (dove x e y sono i segnali di ingresso e di uscita) è
 - ☐ stazionaria
 - ☒ è lineare
5. Per un sistema lineare, la stabilità ingresso limitato-uscita limitata implica la stabilità asintotica
 - ☒ sempre
 - ☐ solo se l'errore a regime per un ingresso a gradino è nullo
 - ☐ solo quando il sistema ha poli reali
6. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli
 - ☐ su di una retta uscente dall'origine
 - ☒ su di una retta parallela all'asse immaginario
 - ☐ su di una circonferenza con centro nell'origine
7. Il criterio di Routh applicato all'equazione caratteristica ed eventualmente esteso derivando l'equazione ausiliaria
 - ☒ fornisce il numero dei poli a parte reale negativa
 - ☒ fornisce il numero dei poli a parte reale positiva
 - ☒ fornisce il numero totale dei poli a parte reale nulla
8. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi
 - ☐ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle
 - ☒ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa
 - ☐ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa

9. Un sistema di “tipo 1” chiuso in retroazione unitaria negativa
- ☒ ha guadagno statico unitario
 - ☒ ha errore a regime nullo per ingresso a gradino
 - ☐ ha errore a regime nullo per ingresso a rampa
10. Per poter applicare il criterio di Popov ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$
- ☐ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine
 - ☒ la non linearità $y = f(x)$ deve essere di tipo “a settore”
 - ☐ il sistema $G(s)$ deve essere a fase minima
11. Sia $y(t) \simeq Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$ l'armonica fondamentale del segnale di uscita di una non linearità simmetrica rispetto all'origine quando in ingresso è presente la sinusoide $X \sin \omega t$. La corrispondente funzione descrittiva $F(X)$ è
- ☐ $F(X) = \frac{a_1 + j b_1}{X}$
 - ☒ $F(X) = \frac{b_1 + j a_1}{X}$
 - ☐ $F(X) = \frac{Y_1}{X} e^{-j\varphi_1}$
 - ☒ $F(X) = \frac{Y_1}{X} e^{j\varphi_1}$
12. I luoghi ad N costante relativi ai diagrammi polari
- ☐ si intersecano tutti nel punto +1
 - ☒ si intersecano tutti nel punto 0
 - ☒ si intersecano tutti nel punto -1
 - ☐ non si intersecano al finito
13. Posto $b > a > 0$, il sistema dinamico $G(s) = \frac{b(s+a)}{a(s+b)}$
- ☒ è una rete anticipatrice a guadagno unitario
 - ☐ è una rete ritardatrice
 - ☐ non è una rete corretttrice
-
14. La trasformata Z della sequenza $x(kT)$ è definita nel seguente modo:
- ☐ $X(z) = \sum_{k=1}^{k=\infty} x(kT) z^{-k}$
 - ☐ $X(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x^k(kT) z^{-k}$
 - ☐ $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(kT) z^{-k}$
 - ☒ $X(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(kT) z^{-k}$
15. Sia $X(z)$ la Z -trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore iniziale afferma che
- ☒ $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
 - ☐ $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z)$
 - ☐ $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - z)X(z)$
16. Nel piano z i luoghi dei punti a decadimento costante
- ☒ sono circonferenze centrate nell'origine
 - ☐ sono rette uscenti dall'origine
 - ☐ sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine