

Calcolo del Throughput del TCP

Modello Periodico

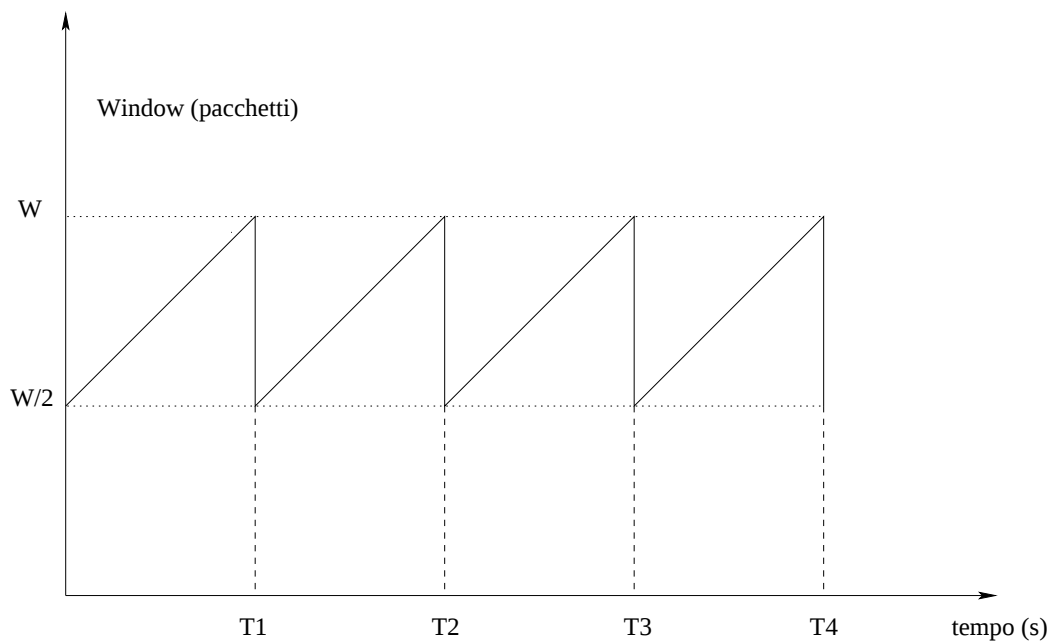
Legge dell'inverso della $\sqrt{p}$

Obiettivo: determinare il throughput $X(t)$ in termini di bit/s di una sorgente che impiega il TCP per trasmettere i suoi dati ad un destinatario.

Siano $W(t)$ la finestra di trasmissione del TCP all'istante t e RTT il Round Trip Time. Allora:

$$X(t) = \frac{W(t)}{T}$$

Se p é la probabilità di perdita del segmento TCP significa che si verifica una perdita ogni $1/p$ segmenti.



Il numero di segmenti o pacchetti trasmessi in un periodo T senza perdite vale:

$$(W + \frac{W}{2}) \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{T}{RTT} \cdot (W + \frac{W}{2})$$

Ma:

$$T = RTT \cdot \frac{W}{2}$$

Da cui:

$$\frac{W}{4} \cdot (W + \frac{W}{2}) = \frac{1}{p}$$

e quindi:

$$W = \sqrt{\frac{8}{3p}}$$

e:

$$\overline{X}(p) = \frac{1/p}{RTT \times \frac{W}{2}} = \frac{1}{RTT} \frac{1/p}{1/2 \sqrt{\frac{8}{3p}}} = \frac{1}{RTT} \sqrt{\frac{3}{2p}}$$

In conclusione:

$$\overline{X}(p) = \frac{1}{RTT} \sqrt{\frac{3}{2p}}$$

Analisi del Throughput con Duplicate Ack

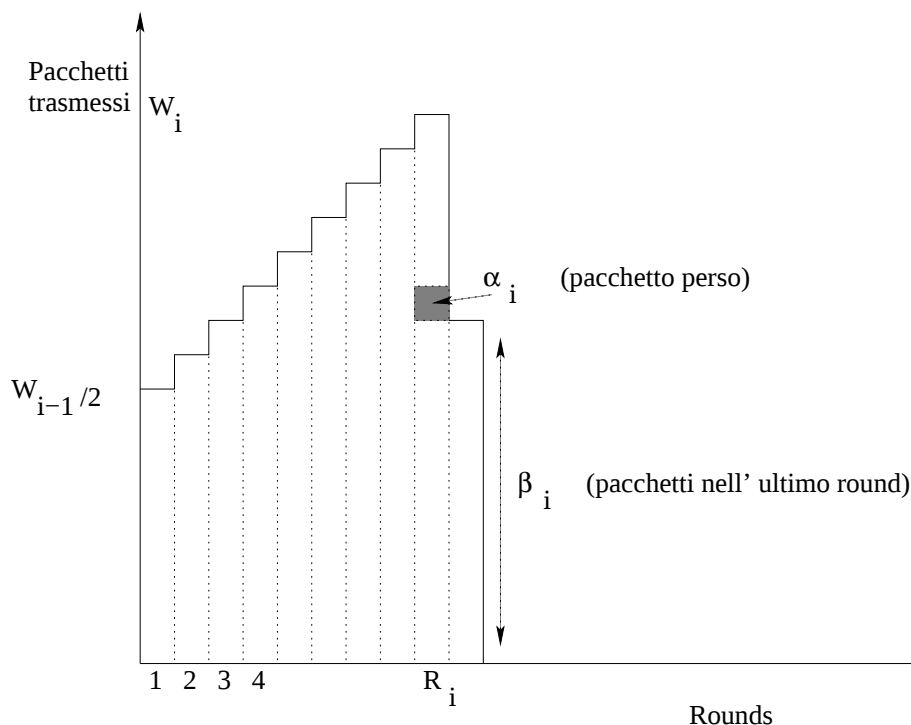
Obiettivo: determinare il throughput $X(t)$ in termini di bit/s di una sorgente che impiega il TCP per trasmettere i suoi dati ad un destinatario considerando anche i duplicate ACK.

Ipotesi: il tempo di trasmissione di un'intera finestra sia minore di RTT .

Sia Y_i il numero di pacchetti trasmessi in un periodo A_i tra due perdite di pacchetto.

Si vuole determinare a regime:

$$\bar{X} = \frac{E[Y]}{E[A]}$$



Se inoltre α_i é il numero del pacchetto perso nell' i -esimo round:

$$Y_i = \alpha_i + w_i - 1$$

Se si ricorda che p é la probabilità di perdita:

$$Prob[\alpha = k] = (1 - p)^{k-1}p$$

Quindi:

$$E[\alpha] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$$

$$E[Y] = \frac{1}{p} + E[W] - 1 = \frac{1 - p}{p} + E[W]$$

Ora se R_i é il numero totale di round nel periodo i :

$$w_i = \frac{w_{i-1}}{2} + R_i$$

da cui:

$$E[W] = \frac{E[W]}{2} + E[R]$$

e:

$$E[W] = 2E[R]$$

Ora:

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_{k=0}^{R_i-1} \left(\frac{w_{i-1}}{2} + k \right) + \beta_i = R_i \frac{w_{i-1}}{2} + \frac{R_i}{2} (R_i - 1) + \beta_i = \\ &= \frac{R_i}{2} (w_{i-1} + R_i - 1) + \beta_i = \frac{R_i}{2} \left(\frac{w_{i-1}}{2} + w_i - 1 \right) + \beta_i \end{aligned}$$

dopo aver usato nell' ultimo passaggio:

$$w_i = \frac{w_{i-1}}{2} + R_i$$

da cui:

$$E[Y] = \frac{E[R]}{2} \left(\frac{E[W]}{2} + E[W] - 1 \right) + E[\beta]$$

ricordando che $E[R] = \frac{E[W]}{2}$ e che $E[\beta] \simeq \frac{E[W]}{2}$, uguagliando:

$$\frac{1-p}{p} + E[W] = \frac{E[W]}{4} \left(\frac{E[W]}{2} + E[W] - 1 \right) + \frac{E[W]}{2}$$

quindi:

$$3(E[W])^2 - 6E[W] + \frac{8(p-1)}{p} = 0$$

Risolvendo e imponendo $E[W] \geq 0$ si trova:

$$E[W] = 1 + \sqrt{\frac{8}{3p} - \frac{5}{3}}$$

$$E[R] = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{3p} - \frac{5}{12}}$$

Infine ci serve $E[A]$:

$$A_i = \sum_{j=1}^{R_i+1} rtt_{ij}$$

da cui:

$$E[A] = (E[R] + 1) \cdot E[r(t)]$$

$$E[A] = RTT \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2}{3p} - \frac{5}{12}} \right)$$

A questo punto possiamo ricavare $\bar{X}(p)$:

$$\bar{X}(p) = \frac{E[Y]}{E[A]} = \frac{\frac{1-p}{p} + 1 + \sqrt{\frac{8}{3p} - \frac{5}{3}}}{RTT \times \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2}{3p} - \frac{5}{12}} \right)}$$

Quindi:

$$\overline{X}(p) = \frac{\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{8}{3p} - \frac{5}{3}}}{RTT \times (\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2}{3p} - \frac{5}{12}})}$$

Se ora $p \rightarrow 0$:

$$\overline{X}(p) \simeq \frac{1}{RTT} \sqrt{\frac{3}{2p}}$$

esattamente come prima

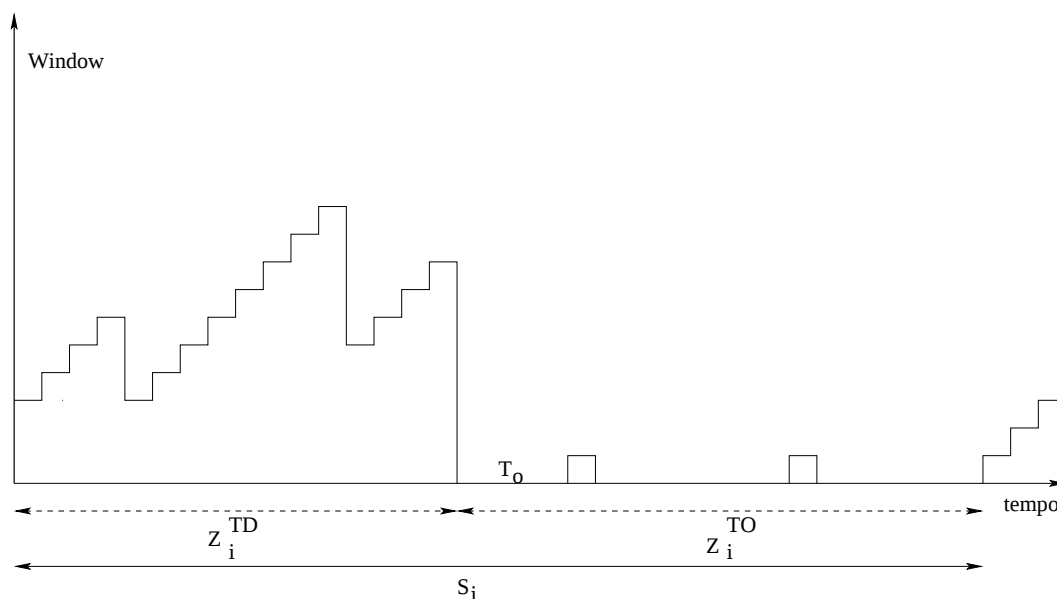
Analisi del Throughput con Duplicate Ack e Timeouts

Obiettivo: determinare il throughput $X(t)$ in termini di bit/s di una sorgente che impiega il TCP per trasmettere i suoi dati ad un destinatario considerando i duplicate ACK e gli eventi time out.

Si definisce un periodo S_i :

$$S_i = Z_i^{TD} + Z_i^{TO}$$

dove Z_i^{TD} è un intervallo di tempo in cui le perdite sono recuperate con duplicate ACK mentre Z_i^{TO} è un intervallo di tempo in cui le perdite sono recuperate con time outs.



Sia M_i il numero totale di pacchetti trasmessi nel periodo S_i , per cui la velocità media della sorgente TCP $\bar{X}$ sarà:

$$\overline{X} = \frac{E[M]}{E[S]}$$

Si definiscono inoltre Y_{ij} e A_{ij} rispettivamente il numero dei pacchetti inviati e la durata del sottointervallo j -esimo in Z_i^{TD} .

Y_i^{TO} sia il numero di pacchetti trasmessi nel periodo Z_i^{TO} .

Ora, essendo n_i il numero dei duplicate ACKs:

$$M_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} + Y_i^{TO}$$

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij} + Z_i^{TO}$$

Si ha che:

$$E[M] = E[n] \cdot E[Y] + E[Y^{TO}]$$

$$E[S] = E[n] \cdot E[A] + E[Z^{TO}]$$

Ora se $\forall S_i \exists !$ periodo di time out $\Rightarrow$ la probabilità Q che una perdita origini un time out è pari a $1/E[n]$, da cui:

$$\overline{X} = \frac{E[Y] + Q \cdot E[Y^{TO}]}{E[A] + Q \cdot E[Z^{TO}]}$$

Occorre adesso ricavare le quantità Q , $E[Y^{TO}]$ e $E[Z^{TO}]$.

Si può ricavare che:

$$Q(w) \approx \min(1, \frac{3}{w})$$

$$E[Y^{TO}] = \frac{1}{1-p}$$

$$E[Z^{TO}] = T_o \cdot \frac{f(p)}{1-p}$$

dove $f(p) = 1 + p + 2p^2 + 4p^3 + 8p^4 + 16p^5 + 32p^6$ e T_o é il valore del time out.

Ricordando ora che:

$$E[Y] = \frac{1-p}{p} + E[w]$$

e:

$$E[A] = RTT \cdot (E[R] + 1)$$

Si ha:

$$\overline{X}(p) = \frac{\frac{1-p}{p} + E[w] + Q \cdot (E[w]) \frac{1}{1-p}}{RTT(E[R] + 1) + Q \cdot (E[w]) T_o \frac{f(p)}{1-p}}$$

Se introduciamo infine la MAXIMUM RECEIVER WINDOW SIZE W_m , otteniamo la formula finale approssimata del throughput di una sorgente TCP:

$$\overline{X}(p) \simeq \left(\frac{W_m}{RTT}, \frac{1}{RTT \sqrt{\frac{2p}{3}} + T_o \cdot \min(1, 3\sqrt{\frac{3p}{8}}) \cdot p \cdot (1 + 32p^2)} \right)$$