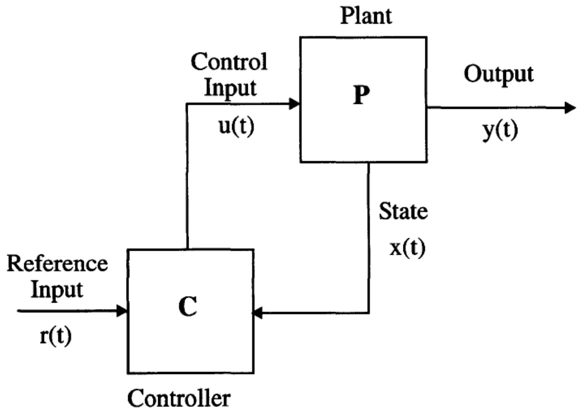
Controllo ottimo

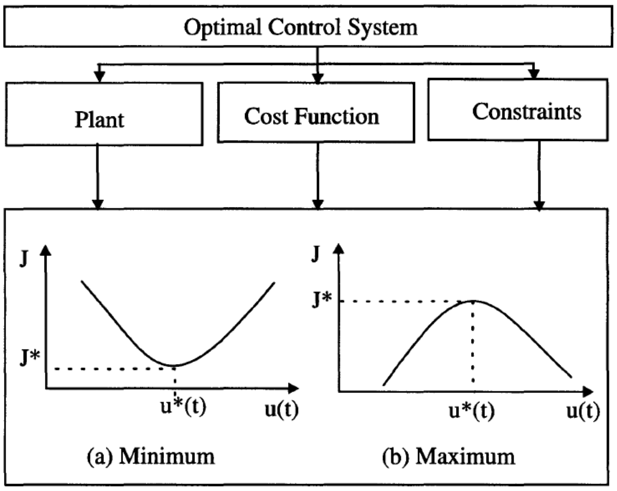
- **Obiettivo** del controllo ottimo è determinare i segnali di controllo tali per cui il sistema da controllare soddisfi determinati vincoli fisici e allo stesso tempo renda minimo o massimo un qualche criterio scelto per misurarne le performance.



- Con riferimento allo schema generale di controllo per sistemi MIMO rappresentato in figura, lo scopo è trovare $\mathbf{u}(t)$ che porti l'impianto dallo stato iniziale allo stato finale con alcuni vincoli su $\mathbf{u}(t)$ e sullo stato $\mathbf{x}(t)$ e che allo stesso tempo estremizzi l'indice di costo scelto J.

- **Bibliografia essenziale:**

  – M. Tibaldi, *Progetto di sistemi di controllo*, Pitagora editrice, Bologna, 1995.
  – D. S. Naidu, *Optimal Control Systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2003



La formulazione di un "problema di controllo ottimo" richiede:

1. un modello che descrive il comportamento del sistema dinamico da controllare;
2. un indice di comportamento J (o *criterio di ottimalità* o *funzione di costo*) che tiene conto delle specifiche desiderate e delle esigenze del progettista (talvolta in contraddizione tra di loro);
3. la specificazione delle condizioni al contorno e dei vincoli fisici sugli stati e sul controllo.

Questo ultimo elemento potrebbe essere non presente.

Controllo ottimo di un sistema dinamico

- Sia dato il sistema dinamico

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \qquad \mathbf{x}_{n\times 1}, \quad \mathbf{u}_{r\times 1} \tag{1}$$

e l'indice di comportamento

$$J := \underbrace{S(\mathbf{x}(t_f), t_f)}_{\substack{\text{Costo terminale} \\ \text{“Peso” sullo stato finale}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt}_{\text{“Peso” sull'evoluzione in } [t_0, t_f]} \tag{2}$$

con le condizioni al contorno

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \text{ mentre sia } \mathbf{x}(t_f), \text{ che } t_f \text{ sono liberi}$$

- <u>Problema di controllo ottimo:</u> determinare la funzione $\mathbf{u}^\star(t), \forall t \in [t_0, t_f]$ in modo da minimizzare J.

- Definita la **funzione Hamiltoniana**

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) := f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

dove $\boldsymbol{\lambda}_{n\times 1}$ è detto *co-stato* o *vettore delle variabili aggiunte*
<u>condizione necessaria</u> affinchè il problema abbia soluzione, cioè che $\mathbf{u}^\star(t)$ se esiste sia ottima, è che in corrispondenza di $\mathbf{u}^\star(t)$, sia verificato - oltre all'equazione (1) - il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}^T \qquad \text{equazione del co-stato} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \qquad \text{equazione del controllo} \tag{4}$$

con le condizioni al contorno (<u>finali</u>)

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0 \tag{5}$$

dove δt_f e $\delta \mathbf{x}_f$ sono *variazioni* arbitrarie di t_f e $\mathbf{x}_f$ rispettivamente.

- Essendo δt_f e $\delta \mathbf{x}_f$ valori arbitrari la (5) può essere riscritta come

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} &= 0 \\ \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} &= 0 \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_{t_f}^T\end{aligned}$$

- Si noti che la soluzione del sistema costituito dall'equazione di stato (1) e dall'equazione di co-stato (3) impiega sia condizioni iniziali su $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$) che condizioni finali su $\boldsymbol{\lambda}$ ($\boldsymbol{\lambda}(t_f)$), ed è quindi un problema denominato **two-point boundary value problem**. Questo in generale rende di difficile soluzione il problema della integrazione numerica delle equazioni differenziali che lo costituiscono.

- Nel caso in cui lo stato finale $\mathbf{x}_f$ (o il tempo finale t_f) non sia libero ma risulti vincolato le equazioni differenziali che risolvono il problema sono le stesse, ma cambieranno le condizioni al contorno date dalla (5):

  – se $\mathbf{x}_f$ è dato e t_f è libero, nella (5) sarà $\delta \mathbf{x}_f = 0$ e $\delta t_f \neq 0$ e quindi risulterà come unico vincolo

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} = 0$$

  – se $\mathbf{x}_f$ è libero e t_f è dato, nella (5) sarà $\delta \mathbf{x}_f \neq 0$ e $\delta t_f = 0$ e quindi risulterà come unico vincolo

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_{t_f}^T$$

  – se sia $\mathbf{x}_f$ che t_f sono dati, nella (5) sarà $\delta \mathbf{x}_f = 0$ e $\delta t_f = 0$, e quindi non ci saranno ulteriori vincoli in quanto tutte le condizioni finali necessarie per risolvere il sistema di equazioni differenziali sono fornite.

Procedura per la soluzione di un problema di controllo ottimo

Dato l'impianto

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

la funzione di costo

$$J := S(\mathbf{x}(tf), tf) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt$$

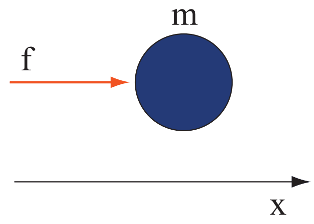
e le condizioni al contorno la soluzione del problema di ottimo prevede i seguenti passi:

1. definire la funzione hamiltoniana
$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) := f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
2. minimizzare $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathbf{u}$: $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \longrightarrow \mathbf{u}^\star(t) = \boldsymbol{h}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)$
3. utilizzando i risultati del passo 1 e 2 trovare il valore ottimo di $\mathcal{H}^\star = \mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{h}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t), \boldsymbol{\lambda}, t)$ e definire il sistema di $2n$ equazioni differenziali costituito da equazioni di stato e co-stato
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^\star(t), t) \qquad \leftrightarrows \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^{\star T}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{\star T}}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned}$$
4. risolvere il sistema di equazioni differenziali con condizioni iniziali $\mathbf{x}_0$ e condizioni finali
$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$
5. sostituire la soluzione delle equazioni differenziali $\mathbf{x}^\star(t)$ e $\boldsymbol{\lambda}^\star(t)$ ottenute nell'espressione del controllo ottimo ottenuto al passo 2.

Nota: l'ottimizzazione dell'indice di comportamento originale, ovvero un funzionale soggetto alle equazioni di stato dell'impianto, è equivalente all'ottimizzazione della funzione hamiltoniana $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathbf{u}(t)$. In questo modo si riduce l'iniziale problema di ottimizzazione di un funzionale a un più ordinario problema di ottimizzazione di una funzione.

Esempio. *Esempio di controllo ottimo senza vincoli finali*

Sia dato un punto materiale di massa m, in moto rettilineo, e sia possibile applicare alla massa una forza f diretta come il moto. Sono note all'istante t_0 la posizione $x(t_0) = x_{10}$ e la velocità x_{20}



- Con le opportune posizioni (in particolare $u(t) = f(t)/m$), l'equazione del moto $m\ddot{x}(t) = f$, $x(0) = x_{10}$, $\dot{x}(0) = x_{20}$ (avendo assunto $t_0 = 0$), può essere riscritta come

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) = u(t) & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \tag{6}$$

- Specifiche: determinare l'azione di controllo ottima $u(t) \in [t_0, t_f]$ tale per cui il punto materiale sia *sufficientemente* vicino all'origine all'istante finale $t_f = 2$ e l'azione di controllo (energia di controllo) *sufficientemente* limitata.

- L'indice di comportamento può essere scelto come

$$J = c_1 x_1^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} c_2 u^2(t)dt, \qquad c_1, c_2 > 0$$

dove c_1 e c_2 sono opportune costanti definite in modo da quantificare i termini "sufficientemente". Sia $c_1 = c_2 = 1/2$ e $x_{10} = 1$ m, $x_{20} = 2$m/s.

- **Soluzione:** Seguendo la procedura delineata nel lucido precedente si trova che:

1.
$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}, t) &= f_0(\mathbf{x}(t), u(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ &= \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \end{aligned}$$

2.
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow u(t) + \lambda_2(t) = 0 \longrightarrow u^\star(t) = -\lambda_2(t)$$

3. Sostituendo l'espressione del controllo ottimo si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), u^\star(t), \boldsymbol{\lambda}, t) &= \frac{1}{2}\lambda_2^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2^2(t) \\ &= \lambda_1(t)x_2(t) - \frac{1}{2}\lambda_2^2(t)\end{aligned}$$

da cui le equazioni di stato e di co-stato risultano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= +\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= +\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} &= -\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} &= 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} &= -\lambda_1(t)\end{aligned} \tag{7}$$

4. risolvendo il sistema di equazioni differenziali si ottiene

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2 t + C_1 \\ x_2(t) &= \frac{C_3}{2}t^2 - C_4 t + C_2 \\ \lambda_1(t) &= C_3 \\ \lambda_2(t) &= -C_3 t + C_4\end{aligned} \tag{8}$$

in cui i parametri incogniti C_i devono essere trovati imponendo le condizioni iniziali (date)

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$$

e le condizioni finali che si possono dedurre (essendo t_f fissato) da

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^T_{t_f} \longrightarrow \begin{aligned}\lambda_1(2) &= \left(\frac{\partial \frac{1}{2}x_1^2}{\partial x_1}\right)_{t=2} = x_1(2) \\ \lambda_2(2) &= \left(\frac{\partial \frac{1}{2}x_1^2}{\partial x_2}\right)_{t=2} = 0\end{aligned}$$

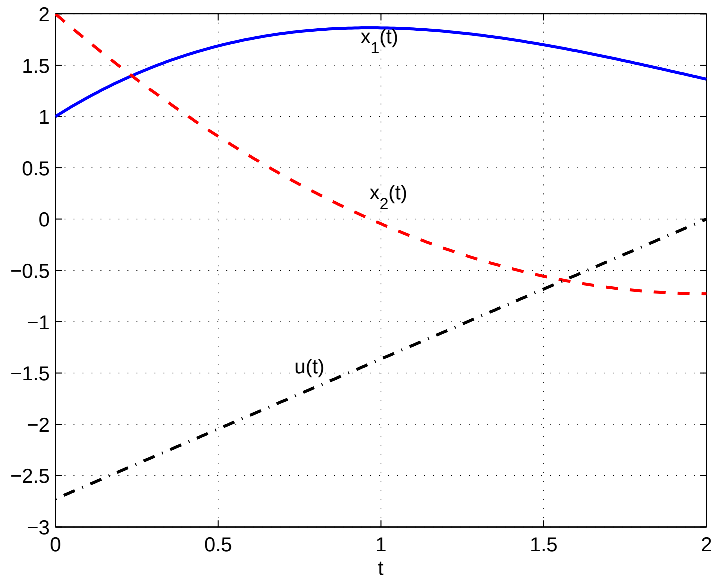
Sostituendo le suddette condizioni in (8) si ricava un sistema algebrico di 4 equazioni nelle 4 incognite C_i da cui risulta

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = \frac{15}{11},\ C_4 = \frac{30}{11}.$$

5. L'espressione finale del controllo ottimo risulta pertanto

$$u^\star(t) = -\lambda_2(t) = \frac{15}{11}t - \frac{30}{11}$$

- In figura sono riportati gli andamenti delle variabili di stato e del controllo



Esempio. *Esempio di controllo ottimo con vincoli finali*

Considerando lo stesso sistema dell'esempio precedente si vuole progettare il regolatore ottimo in grado di trasferire lo stato del sistema da $\mathbf{x}(0) = [1 \;\; 2]^T$ a $\mathbf{x}(2) = [1 \;\; 0]^T$, minimizzando l'energia di controllo.

- il modello del sistema è ancora (6)
- l'indice di comportamento che traduce le specifiche sarà

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

in cui ovviamente non compare più il peso dello stato finale che è fissato

- **Soluzione:** fino al passo 4. la soluzione è identica al caso precedente, cambiano solo le condizione al contorno per il calcolo dei coefficienti C_i che sono quelle inizialmente fissate

$$x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = 2, \;\; x_1(2) = 1, \;\; x_2(2) = 0$$

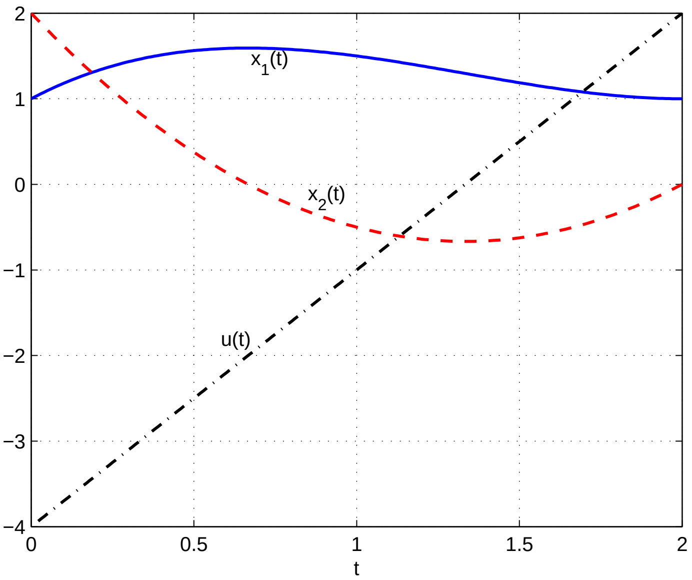
Sostituendo le suddette condizioni in (7) i valori dei coefficienti risultano

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 3,\ C_4 = 4.$$

L'espressione finale del controllo ottimo risulta pertanto

$$u^\star(t) = -\lambda_2(t) = 3t - 4$$

- In figura sono riportati gli andamenti delle variabili di stato e del controllo



Esempio. *Esempio di controllo ottimo con vincoli finali parziali*

Considerando lo stesso sistema dell'esempio precedente si vuole progettare il regolatore ottimo in modo tale che lo stato del sistema passi da $\mathbf{x}(0) = [1\ \ 2]^T$ a un valore finale in $x_1(2) = 1$ mentre $x_2(2)$ è libero, minimizzando l'energia di controllo.

- il modello del sistema è ancora (6)
- l'indice di comportamento che traduce le specifiche sarà

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

in cui non compare il peso dello stato finale (d'altronde anche nel primo esempio il contributo di $x_2(2)$ non compariva, mentre ora $x_1(2)$ è vincolato). Si può quindi considerare $S = 0$.

- **Soluzione:** anche in questo caso, fino al passo 4. la soluzione è identica al caso precedente, cambiano solo le condizione al contorno per il calcolo dei coefficienti C_i che sono quelle inizialmente fissate

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_1(2) = 1$$

più l'ulteriore condizione sulla seconda componente di $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\lambda_2(2) = \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_{t=2} = 0.$$

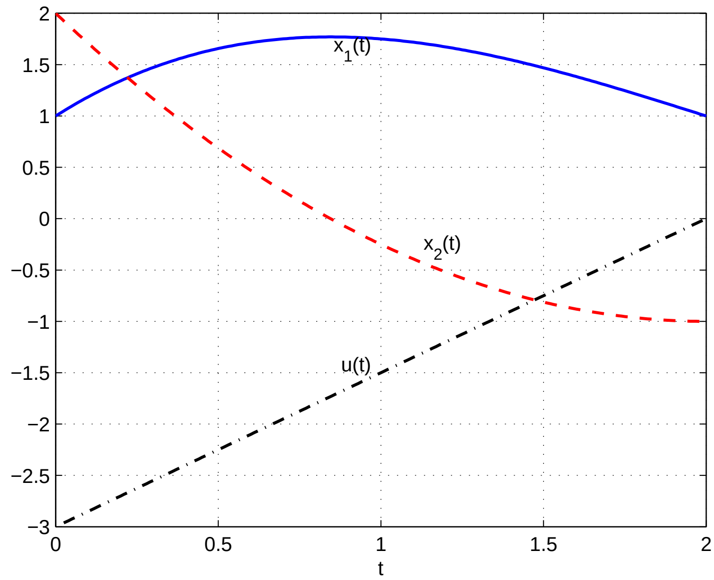
Sostituendo le suddette condizioni in (7) i valori dei coefficienti risultano

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = \frac{3}{2},\ C_4 = 3.$$

L'espressione finale del controllo ottimo risulta pertanto

$$u^{\star}(t) = -\lambda_2(t) = 3t - \frac{3}{2}$$

- In figura sono riportati gli andamenti delle variabili di stato e del controllo



- Si noti che l'espressione del controllo ottimo $u^{\star}(t)$ è funzione solo del tempo e non dello stato $\mathbf{x}(t)$ e risulta pertanto un *controllo in catena aperta*.

Controllo ottimo LQ

- Il controllo ottimo LQ (*Lineare - Quadratico*) si ha nel caso in cui
  - il sistema dinamico da controllare è di tipo lineare
  - le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono quadratiche
- Per cui, dato il sistema lineare tempo variante (LTV)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

obiettivo del problema di controllo LQ è minimizzare il funzionale di costo

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)dt$$

dove le matrici $\mathbf{S}_f$, $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ sono tutte assunte simmetriche e semidefinite positive le prime due mentre $\mathbf{R}(t)$ deve essere definita positiva:

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{S}_f^T \geq 0, \qquad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t)^T \geq 0, \qquad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t)^T > 0$$

Solitamente le matrici $\mathbf{S}_f$, $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ sono scelte diagonali (in modo da penalizzare i quadrati delle singole componenti di $\mathbf{x}(t_f)$, $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{u}$).

- Poichè in questo caso obiettivo del controllo è mantenere lo stato $\mathbf{x}(t)$ vicino allo zero il problema è detto di *regolazione dello stato*. Una situazione di questo tipo può insorgere quando l'impianto è soggetto a disturbi indesiderati che perturbano lo stato.
- Si noti che il tempo finale $t_f < \infty$ è specificato; per tale motivo il controllo è detto a *tempo finito*.

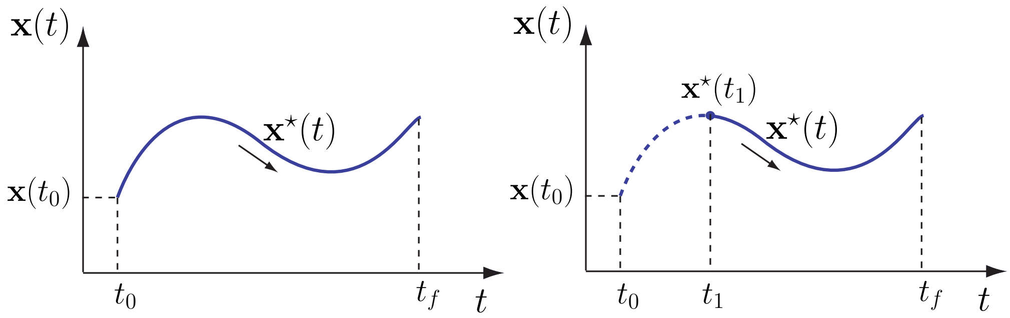
- **Soluzione:** la soluzione del problema di regolazione LQ dello stato a tempo finito può essere ottenuta con la stessa procedura degli esempi precedenti:

  1. si definisce la funzione hamiltoniana
  $$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\big(\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\big)$$
  2. si minimizza $\mathcal{H}$ rispetto a $\mathbf{u}$:
  $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \rightarrow \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \rightarrow \mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t)$$
  3. si sostituisce il valore di $\mathbf{u}^\star(t)$ appena trovato in $\mathcal{H}$ per trovarne il valore ottimo e si scrivono le equazioni di stato e co-stato
  $$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}^{\star T}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &\rightarrow\ \ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^\star(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{\star T}}{\partial \mathbf{x}} &\rightarrow\ \ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \end{aligned}$$
  4. si risolve il sistema di $2n$ equazioni differenziali appena definito con le condizioni iniziali
  $$\mathbf{x}(t_0) = 0$$
  e
  $$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^T_{tf} = \mathbf{S}_f \mathbf{x}(tf) \tag{9}$$
  5. si sostituisce la soluzione delle equazioni differenziali $\mathbf{x}^\star(t)$ e $\boldsymbol{\lambda}^\star(t)$ ottenute nell'espressione del controllo ottimo ottenuto al passo 2.

- Occorre notare che l'espressione del controllo che si otterrebbe sarebbe comunque in catena aperta, mentre ragioni di robustezza nei confronti di errori parametrici e disturbi esterni consigliano strutture di controllo in retroazione (cioè dipendenti dalla stato interno $\mathbf{x}(t)$ del sistema).
  Non si cerca una diversa legge di controllo ma una sua differente realizzazione. Infatti il controllo ottimo se esiste è unico!

- il fatto che la realizzazione in retroazione della legge di controllo ottima sia possibile è messo in evidenza dal cosiddetto *principio di ottimalità* (di Bellmann)

  Se la legge di controllo $\mathbf{u}^\star(t)$, definita in $[t_0,\ t_f]$, è ottima rispetto ad un dato problema con condizioni iniziali $(x_0,\ t_0)$ e ad essa è associato l'andamento $\mathbf{x}^\star(t)$, allora la stessa legge di controllo è ottima in $[t,\ t_f]$ relativamente allo stesso problema con condizioni iniziali $[\mathbf{x}^\star(t),\ t]$ per ogni $t \in [t_0,\ t_f]$. Segue che se $\mathbf{u}^\star(t)$ e una legge di controllo ottima in $[t_0,\ t_f]$, essa si può esprimere in ogni istante t come funzione di $\mathbf{x}^\star(t)$, cioè $\mathbf{u}^\star(t) = \mathbf{u}^\star[\mathbf{x}^\star(t),\ t]$, $\forall t \in [t_0,\ t_f]$



  Il principio di ottimalità non fornisce alcuno strumento per determinare come la legge di controllo debba essere espressa in funzione dello stato del sistema da controllare, ma dichiara che tale espressione (in retroazione) è realizzabile.

- Allo scopo di dedurre un'espressione del controllo ottimo che sia funzione di $\mathbf{x}(t)$, anzichè di $\boldsymbol{\lambda}(t)$ come in

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t)$$

  si parte dell'osservazione che in (9) il valore finale del vettore delle variabili aggiunte è proporzionale al valore finale di $\mathbf{x}$ e si ipotizza pertanto una relazione proporzionale

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \tag{10}$$

  per la quale varrà chiaramente

$$\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f.$$

  Per convincersene è sufficiente confrontare la (9) con la (10).

- A partire dalla (10) è possibile trovare la dipendenza di $\boldsymbol{\lambda}(t)$ da $\mathbf{x}(t)$, cioè determinare $\mathbf{S}(t)$.
  Si differenzia (10) rispetto al tempo ottenendo

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \tag{11}$$

  A questo punto si sostituiscono in (11) le espressioni delle derivate di stato e co-stato, rispettivamente

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\overbrace{\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)}^{-\mathbf{u}^\star(t)=\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t)} \\
\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\underbrace{\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)}_{\boldsymbol{\lambda}(t)}.
\end{aligned}$$

  Effettuata la sostituzione si ottiene

$$-\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t)-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)-\mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)$$

  da cui, raccogliendo $\mathbf{x}(t)$

$$\left[\dot{\mathbf{S}}(t)+\mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)-\mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)+\mathbf{Q}(t)\right]\mathbf{x}(t) = 0.$$

  Poichè la relazione precedente deve essere verificata $\forall \mathbf{x}(t)$, si ricava che $\mathbf{S}(t)$ deve rispettare l'equazione differenziale

$$\boxed{\dot{\mathbf{S}}(t)+\mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)-\mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)+\mathbf{Q}(t) = 0, \quad \mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f}$$

  detta *equazione (matriciale) differenziale di Riccati*.

  Si noti che, poichè le matrici $\mathbf{S}_f$, $\mathbf{Q}(t)$ ed $\mathbf{R}(t)$ sono simmetriche, anche $\mathbf{S}(t)$ lo è. Di conseguenza, l'equazione differenziale matriciale di Riccati è un sistema di $n(n+1)/2$ (e non $n \times n$) equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, nonlineari, tempo-varianti.
  Inoltre la matrice $\mathbf{S}(t)$ dei coefficienti di Riccati è una matrice tempo-variante che dipende dalle matrici dell'impianto $\mathbf{A}(t)$ $\mathbf{B}(t)$, dalle matrici del funzionale di costo $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ e $\mathbf{S}_f$ ma non dallo stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ del sistema.

- Trovato $\mathbf{S}(t)$ dalla risoluzione dell'equazione differenziale di Riccati è possibile scrivere il controllo ottimo in funzione di $\mathbf{x}(t)$:

$$\boxed{\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)}$$

  dove $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)$ è chiamato *guadagno di Kalman*.

- **Controllabilità del sistema:** al fine di implementare il controllo ottimo in retroazione non è stata imposta nessuna condizione di controllabilità dell'impianto. La cosa è dovuta la fatto che finchè si considera il controllo in tempo finito il contributo degli stati non controllabili (che al limite potrebbero essere anche instabili) al funzionale di costo è una quantità comunque finita. Al contrario considerando un intervallo di tempo infinito sarà necessario introdurre condizioni di controllabilità.

Controllo ottimo LQ in tempo infinito

- Dato il sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{12}$$

obiettivo del problema di controllo LQ in tempo infinito è minimizzare il funzionale di costo

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)dt$$

con le usuali condizioni su $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ che devono essere simmetriche e semi-definita positiva la prima, definita positiva la seconda. Diversamente dal caso tempo finito, il termine relativo al costo terminale non avrebbe alcun senso pratico, per cui esso non è presente nel funzionale di costo.

- Si noti che in questo caso il tempo finale t_f non è specificato, ma è fatto tendere all'infinito. Di conseguenza se uno degli stati è incontrollabile e/o instabile, il corrispondente indice di performance tenderà all'infinito. E' perciò necessario imporre che il sistema (12) sia completamente controllabile.

- Analogamente al caso tempo-finito il regolatore risulta

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\hat{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t)$$

dove

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \lim_{t_f\to\infty}\{\mathbf{S}(t)\}$$

è una matrice simmetrica, semi-definita positiva, soluzione dell'equazione differenziale di Riccati

$$\dot{\hat{\mathbf{S}}}(t) + \hat{\mathbf{S}}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\hat{\mathbf{S}}(t) - \hat{\mathbf{S}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\hat{\mathbf{S}}(t) + \mathbf{Q}(t) = 0$$

che soddisfa la condizione

$$\lim_{t_f\to\infty}\hat{\mathbf{S}}(t_f) = 0.$$

- Nel caso si consideri un sistema tempo-invariante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{13}$$

con il funzionale di costo

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt$$

in cui le matrici $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ sono costanti, si trova che il controllo ottimo è dato da

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{x}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{x}(t)$$

dove $\bar{\mathbf{S}}$ è una matrice $n \times n$, semi-definita positiva, simmetrica e costante.

- Poichè $\bar{\mathbf{S}}$ è costante, essa è soluzione dell' equazione algebrica di Riccati (ARE = *Algebraic Riccati Equation*)

$$\frac{d\bar{\mathbf{S}}}{dt} = 0 = -\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{Q}$$

che più comunemente viene scritta come

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{Q} = 0$$

- Nonostante la richiesta di completa controllabilità di (12), e poi come caso particolare di (13), non è detto che il sistema in catena chiusa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}})\,\mathbf{x}(t)$$

risulti sempre stabile, in particolare quando l'impianto iniziale è instabile e questi stati instabili non sono pesati nel funzionale di costo J. Per prevenire questa situazione è sufficiente ipotizzare che, data la matrice dei pesi $\mathbf{Q} = \mathbf{G}^T\mathbf{G}$, la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{G})$ risulti osservabile. Questa assunzione garantisce che tutti gli stati potenzialmente instabili appaiano nel termine del funzionale di costo $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$.
La matrice dei coefficienti di Riccati $\bar{\mathbf{S}}$ è definita positiva se e solo se $(\mathbf{A}, \mathbf{G})$ è completamente osservabile. La matrice $\mathbf{G}$ può essere ricavata mediante la cosiddetta *Cholesky factorization* di $\mathbf{Q}$. In matlab `G = chol(Q)`.

- Alcuni autori considerano l'indice di comportamento J dipendente dall'uscita e non dallo stato del sistema. In questo caso, dato

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), \qquad\qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

e

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[\mathbf{y}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right] dt \tag{14}$$

con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$
il controllo ottimo risulta

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{x}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{x}(t)$$

in cui $\bar{\mathbf{S}}$ è soluzione di

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}} + \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}}_{\mathbf{Q}'} = 0$$

- L'indice di comportamento in (15) è equivalente a

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[\mathbf{x}^T(t)\,\underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}}_{\mathbf{Q}'}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right] dt \tag{15}$$

per cui tutti i risultati precedentemente trovati rimangono validi salvo sostituire $\mathbf{Q}$ con $\mathbf{Q}' = \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}$.

- Se il sistema (ovvero la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$) è stabilizzabile (cioè il sottospazio di instabilità è contenuto nel sottospazio di raggiungibilità) e (la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$) è rivelabile (cioè il sottospazio di non osservabilità è contenuto nel sottospazio di stabilità) la ARE ammette come unica soluzione semidefinita positiva $\bar{\mathbf{S}}$. Se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è completamente osservabile, la matrice $\bar{\mathbf{S}}$ è definita positiva.

- In questo caso la legge di controllo $\mathbf{u}^\star(t)$ minimizza l'indice di comportamento e stabilizza asintoticamente il sistema.

Controllo ottimo LQ t.i. con set-point diverso dall'origine

- I casi esaminati sinora di controllo ottimo LQ consideravano implicitamente come valori di riferimento "ottimi" l'origine dello spazio degli stati e l'origine dello spazio degli ingressi $(x = 0, u = 0)$.
- Nel caso si voglia considerare un set-point diverso dall'origine, si assume
  - un sistema lineare tempo-invariante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), \qquad\qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

    con la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ stabilizzabile, la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ rivelabile;
  - una coppia di vettori $(\mathbf{u}_p, \mathbf{y}_p)$ che soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}_p + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_p\\ \mathbf{y}_p &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}_p\end{aligned}$$

  - l'indice di comportamento

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left\{[\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p]^T \mathbf{Q}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p] + [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p]^T \mathbf{R}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p]\right\} dt \tag{16}$$

    con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.
- Ponendo

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p, \qquad \mathbf{y}_s(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p, \qquad \mathbf{u}_s(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p$$

  si ottiene un problema di regolazione a tempo-infinito il cui modello è

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_s(t)\\ \mathbf{y}_s(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}_s(t)\end{aligned}$$

  e

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[\mathbf{y}_s^T(t)\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y}_s(t) + \mathbf{u}_s^T(t)\,\mathbf{R}\,\mathbf{u}_s(t)\right] dt$$

- Come visto, la soluzione del problema di controllo ottimo appena definito risulta

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}}$$

$$\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\,\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{C}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{C} = 0, \qquad \bar{\mathbf{S}} > 0$$

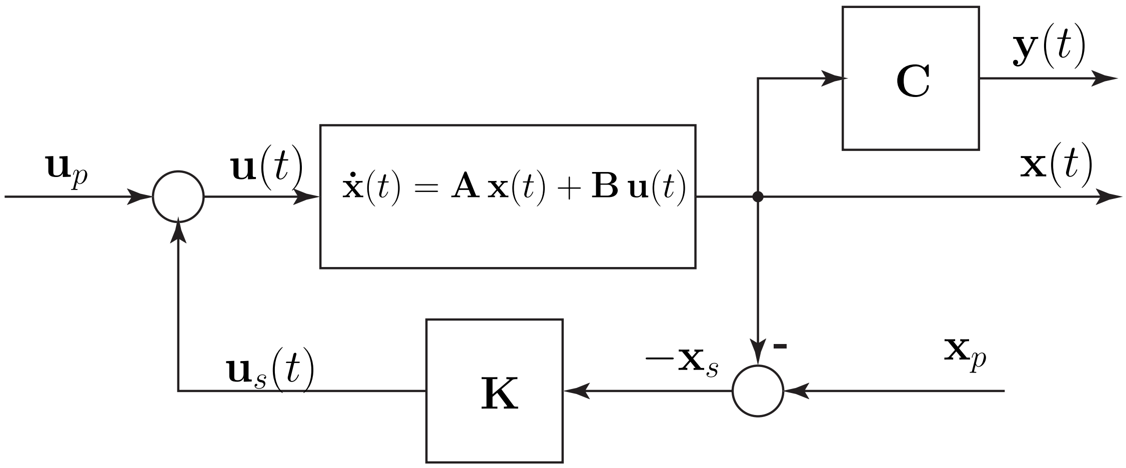
- Da $\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p$ si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{u}_p = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{u}_p = -\mathbf{K}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p] + \mathbf{u}_p \\ &= -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_{ps}, \qquad \mathbf{u}_{ps} = \mathbf{u}_p + \mathbf{K}\,\mathbf{x}_p\end{aligned}$$

e la dinamica del sistema chiuso in retroazione risulta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{K})\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_{ps} \tag{17}$$

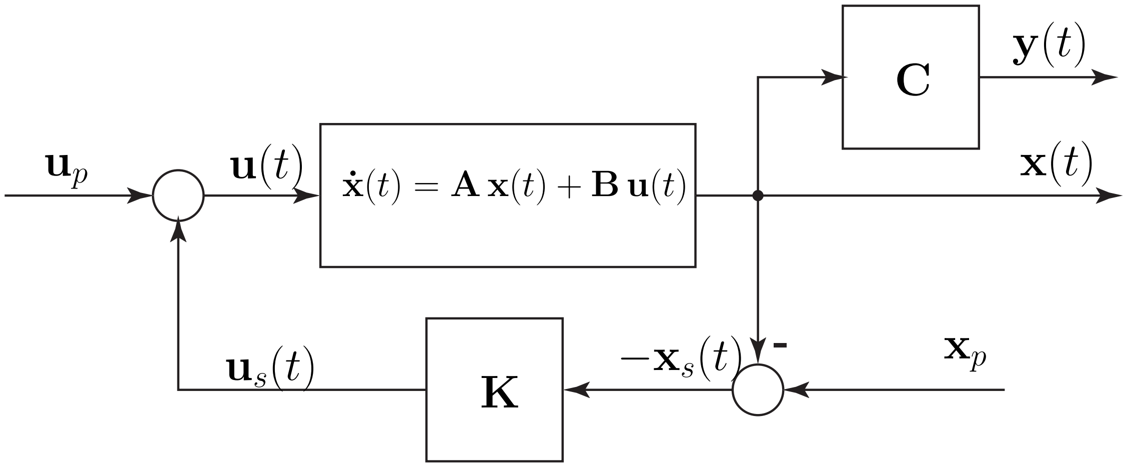
a cui corrisponde il seguente schema a blocchi



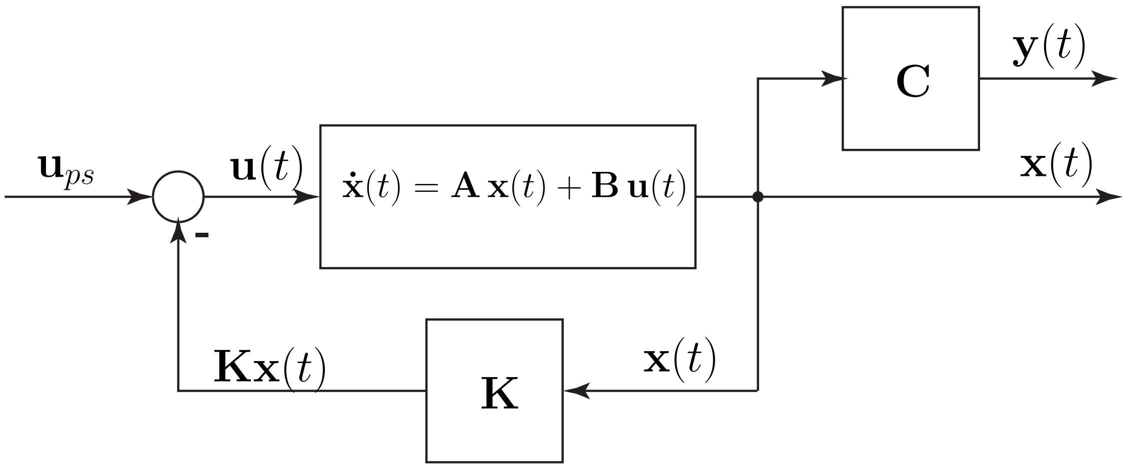
- Siccome il sistema è asintoticamente stabile, a regime sarà $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) &= -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_{ps} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}(\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{u}_p}_{=-\mathbf{A}\mathbf{x}_p} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_p) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p \\ \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p \\ \lim_{t\to\infty} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p\end{aligned}$$

- Lo schema a blocchi



mette in evidenza lo stato "desiderato" $\mathbf{x}_p$. In generale esso non è dato, ma viene fornito il vettore $\mathbf{y}_p$. E' perciò conveniente calcolare il segnale di controllo $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_{ps}$, definendo $\mathbf{u}_{ps}$ sulla base del set-point $\mathbf{y}_p$.



- Occorre verificare se è possibile determinare il vettore $\mathbf{u}_{ps}$ corrispondente a un dato $\mathbf{y}_p$. Vi sono <u>3 casi possibili</u>:

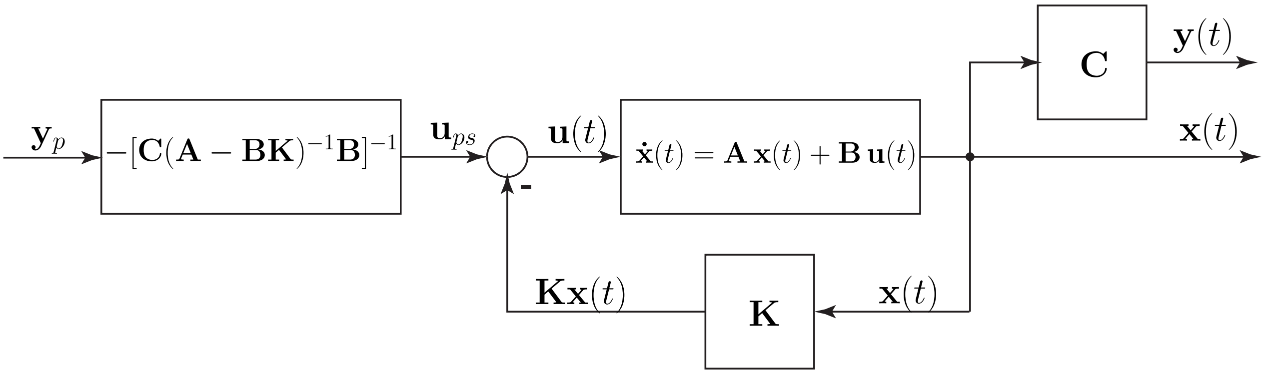
  – $m = r$. Vi sono tante uscite (m) quanto ingressi (r).
  Dalla relazione

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\,\mathbf{K})\,\mathbf{x}_p + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_{ps} \\ \mathbf{y}_p &= \mathbf{C}\mathbf{x}_p \end{aligned}$$

  si ricava

$$\mathbf{u}_{ps} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{y}_p$$

In questo caso il sistema si dice *asservimento*, e il vettore $\mathbf{y}(t)$ delle variabili controllate insegue in riferimento costante $\mathbf{y}_p$ in maniera ottima rispetto all'indice di comportamento fissato.



– $m > r$. Vi sono più uscite (m) che ingressi (r).
E' possibile determinare $\mathbf{u}_{ps}$ solo per particolari valori del vettore $\mathbf{y}_p$, in generale quindi non esiste soluzione.

– $m < r$. Vi sono più ingressi (r) che uscite (m).
Possono esistere più vettori $\mathbf{u}_{ps}$ corrispondenti ad un dato vettore $\mathbf{y}_p$. In questo caso, è opportuno aggiungere componenti al vettore $\mathbf{y}(t)$ (far crescere m) ovvero eliminare componenti dal vettore di controllo (ridurre r).

Controllo ottimo tempo-continuo e tempo-discreto

Sistemi tempo-continui

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

obiettivo del problema di controllo LQ è minimizzare il funzionale di costo

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)dt \tag{18}$$

Soluzione generale:

Risolvendo l'equazione (matriciale) differenziale di Riccati:

$$\dot{\mathbf{S}}(t)+\mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)-\mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)+\mathbf{Q}(t) = 0, \quad \mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f$$

si trova il controllo ottimo

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$$

dove $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)$ è il guadagno di Kalman.

Caso tempo-infinito:

Per sistemi tempo-invarianti, nel caso in cui $t_f \to \infty$, l'equazione differenziale di Riccati si riduce a una equazione algebrica (CARE - Continuous Algebraic Riccati Equation)

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{Q} = 0$$

dalla cui soluzione si ottiene l'espressione del controllo ottimo

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{x}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{x}(t)$$

Sistemi tempo-discreti

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

obiettivo del problema di controllo LQ è minimizzare il funzionale di costo

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k) \tag{19}$$

Risolvendo l'equazione (matriciale) alle differenze di Riccati:

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{A}^T(k)\mathbf{S}(k+1)[\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] + \mathbf{Q}(k) = 0, \quad \mathbf{S}(k_f) = \mathbf{S}_f$$

si trova il controllo ottimo

$$\mathbf{u}^\star(t) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

dove $\mathbf{K}(t) = [\mathbf{B}^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{B}(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}\mathbf{B}^T(k)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{A}(k)$ è il guadagno di Kalman.

Per sistemi tempo-invarianti, nel caso in cui $k_f \to \infty$, l'equazione alle differenze di Riccati si riduce a una equazione algebrica (DARE - Discrete Algebraic Riccati Equation)

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^T\{\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}[\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}}\mathbf{B} + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}}\}\mathbf{A} + \mathbf{Q}$$

dalla cui soluzione si ottiene l'espressione del controllo ottimo

$$\mathbf{u}^\star(k) = -[\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{S}}\mathbf{B} + \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{A}\mathbf{x}(k) = -\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{x}(k)$$

Comandi Matlab:

- Risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati (caso tempo-continuo):

  `[S,E,K] = care(A,B,Q,R)`

  dove `S` è la matrice soluzione dell'equazione, `E` sono gli autovalori del sistema in catena chiusa e `K` il guadagno di Kalman

- Risoluzione del problema di controllo ottimo LQ (caso tempo-continuo):

  `[K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)`

  dove `S` è la matrice soluzione dell'equazione, `E` sono gli autovalori del sistema in catena chiusa e `K` il guadagno di Kalman

- Risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati (caso tempo-discreto):

  `[S,E,K] = dare(A,B,Q,R)`

  dove `S` è la matrice soluzione dell'equazione, `E` sono gli autovalori del sistema in catena chiusa e `K` il guadagno di Kalman

- Risoluzione del problema di controllo ottimo LQ (caso tempo-discreto):

  `[K,S,E] = dlqr(A,B,Q,R)`

  dove `S` è la matrice soluzione dell'equazione, `E` sono gli autovalori del sistema in catena chiusa, `K` il guadagno di Kalman. Questa ultima funzione non deve essere confusa con `[K,S,E] = lqrd(A,B,Q,R,Ts)` che trova il valore del guadagno di Kalman K, minimizzando il funzionale di costo (18), opportunamente adattato al caso tempo-infinito, e non (19) per il sistema tempo-discreto ottenuto discretizzando il sistema (A, B, C, D) con periodo di campionamento T_s.