

## Pianificazione delle traiettorie

- I segnali di riferimento tipicamente utilizzati nel campo dei controlli sono quelli caratterizzati da trasformate di Laplace: elementari
  - riferimento a gradino, a rampa, a parabola, ...
  - riferimento di tipo sinusoidale
- Nella pratica industriale tali segnali non possono essere utilizzati, ma i riferimenti da inseguire devono essere scelti in maniera opportuna al fine di:
  - evitare il raggiungimento di saturazioni nel sistema di attuazione
  - evitare di sollecitare in maniera eccessiva la struttura (impianto, carico, ecc.)
- **Pianificare una traiettoria** significa stabilire le modalità con cui il movimento dal punto iniziale al punto finale **deve** avvenire, ovvero con quali profili di posizione, velocità accelerazione.
- In tutti i dispositivi caratterizzati da un'attuazione elettrica (si spensi in particolare all'ambito delle macchine automatiche) la corretta pianificazione di traiettorie è una problematica particolarmente sentita per una serie di fattori:
  - richieste di prestazioni sempre più elevate (massime velocità e accelerazioni, minima durata)
  - aumento del numero di attuatori elettrici all'interno dello stesso sistema
  - macchinari e dispositivi sempre più leggeri (flessibilità ed elasticità strutturali)
  - disponibilità di dispositivi di supervisione e controllo dotati di capacità di calcolo elevate.

## Traiettorie nello spazio di giunto

Una possibile classificazione delle traiettorie nello “spazio di giunto” (ovvero nel caso monodimensionale di un singolo attuatore):

1. Traiettorie polinomiali
2. Traiettorie trigonometriche
3. Traiettorie per sviluppo in serie di Fourier
4. Traiettorie composte
5. Traiettorie spline

## Traiettorie polinomiali

Si tratta di traiettorie definite da polinomi di grado opportuno

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n$$

I coefficienti sono scelti in modo da imporre determinate condizioni al contorno (valori iniziali e finali di posizione, velocità, accelerazione, ecc.), o vincoli sulla durata.

- Il grado  $n$  dipende dal numero di condizioni al contorno che si desidera soddisfare e dal grado di “dolcezza” che si intende ottenere ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ).
- Sono traiettorie piuttosto semplici, sia dal punto di vista del calcolo dei coefficienti che da quello della valutazione puntuale nei vari istanti di tempo.

Oltre a condizioni iniziali e finali sulla traiettoria, potrebbero essere specificate condizioni sui valori delle derivate (velocità, accelerazioni, jerk, ...) in istanti generici  $t_j$ :

$$k!a_k + (k + 1)!a_{k+1}t_j + \dots + \frac{n!}{(n - k)!}a_n t_j^{n-k} = q^{(k)}(t_j)$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{M}$  è una matrice nota, di dimensioni  $(n + 1) \times (n + 1)$
- $\mathbf{b}$  è il vettore dei termini noti (le  $n + 1$  condizioni da imporre)
- $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$  il vettore dei parametri incogniti da calcolare.

Si ha

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}$$

Ovviamente mediante una semplice operazione di derivazione è immediato riscontrare che:

$$\text{Posizione: } q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n$$

$$\text{Velocità: } v(t) = \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2(t - t_0) + \dots + na_n(t - t_0)^{n-1}$$

$$\text{Accelerazione: } a(t) = \ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3(t - t_0) + \dots + n(n-1)a_n(t - t_0)^{n-2}$$

$$\text{Jerk: } j(t) = \dddot{q}(t) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(t - t_0)^{n-3}$$

$$\text{Snap: } \dots$$

- Noti i parametri  $a_i$ , il calcolo della traiettoria è elementare
- Il calcolo delle sue derivate fino all'ordine desiderato è semplice
- La derivata di traiettorie polinomiali, da un certo ordine in poi, è nulla
- **Esempio.** Traiettoria cubica per 2 punti

Si supponga che siano specificate le seguenti condizioni al contorno:

- un istante iniziale e un istante finale  $t_0$  e  $t_1$
- posizione e velocità iniziale  $q_0$  e  $\dot{q}_0$
- posizione e velocità finale  $q_1$  e  $\dot{q}_1$

Si hanno quattro condizioni al contorno, per rispettare le quali occorre un polinomio di grado almeno pari a tre (cubico):

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3$$

Imponendo le condizioni al contorno

$$q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad \dot{q}(t_1) = \mathbf{v}_1$$

si ottiene l'equazione matriciale

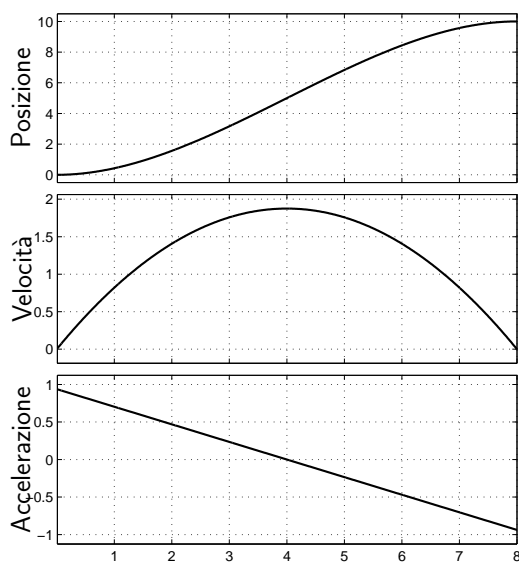
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_1 - t_0) & (t_1 - t_0)^2 & (t_1 - t_0)^3 \\ 0 & 1 & 2(t_1 - t_0) & 3(t_1 - t_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ q_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}$$

che fornisce il seguente valore dei coefficienti

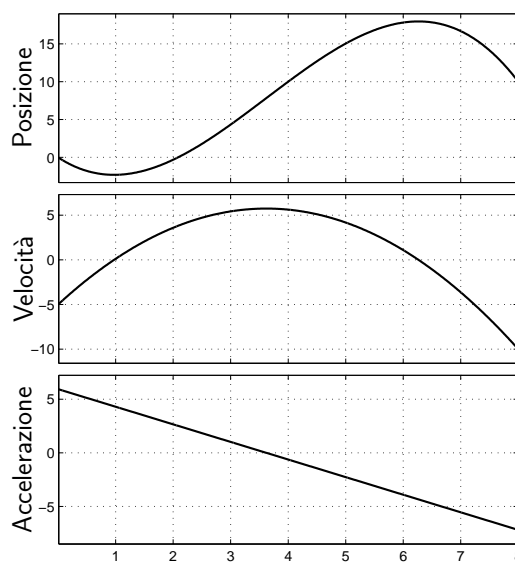
$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = \mathbf{v}_0 \\ a_2 = \frac{-3(q_0 - q_1) - (2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)T}{T^2} \\ a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)T}{T^3} \end{cases}$$

dove  $T = t_1 - t_0$  è la durata della traiettoria.

In figura sono riportate posizione, velocità e accelerazione di due traiettorie polinomiali di grado tre con le condizioni  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 10$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 8$ . In (a) il valore iniziale e finale di velocità sono nulli ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = 0$ ), mentre in (b) sono stati considerati i valori  $\mathbf{v}_0 = -5$ ,  $\mathbf{v}_1 = -10$ .



(a)



(b)

● **Esempio.** Traiettorie di grado cinque per 2 punti

Se in aggiunta a posizioni e velocità iniziali e finali fossero specificate anche le accelerazioni, sarebbe necessario un polinomio di grado cinque

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_1) + a_2(t - t_1)^2 + a_3(t - t_1)^3 + a_4(t - t_1)^4 + a_5(t - t_1)^5$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 & q(t_1) &= q_1 \\ \dot{q}(t_0) &= \mathbf{v}_0 & \dot{q}(t_1) &= \mathbf{v}_1 \\ \ddot{q}(t_0) &= \mathbf{a}_0 & \ddot{q}(t_1) &= \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

In questo caso (posto di nuovo  $T = t_1 - t_0$ ), i coefficienti risultano:

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= \mathbf{v}_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{a}_0 \\ a_3 &= \frac{1}{2T^3}[20h - (8\mathbf{v}_1 + 12\mathbf{v}_0)T - (3\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1)T^2] \\ a_4 &= \frac{1}{2T^4}[-30h + (14\mathbf{v}_1 + 16\mathbf{v}_0)T + (3\mathbf{a}_0 - 2\mathbf{a}_1)T^2] \\ a_5 &= \frac{1}{2T^5}[12h - 6(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0)T + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)T^2]. \end{aligned} \right.$$

• **Esempio.** Traiettoria polinomiale passante per  $n$  punti

Il problema di determinare una traiettoria che passi per  $n$  punti può essere risolto in modo univoco adottando una funzione polinomiale di grado  $n - 1$ , del tipo

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Dati i valori  $t_i, q_i, i = 0, \dots, n - 1$ , si costruiscono i vettori  $q, \mathbf{a}$  e la matrice  $\mathbf{T}$  (di Vandermonde) come

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^{n-1} \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & t_{n-2} & \cdots & t_{n-2}^{n-1} \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{a}. \quad (1)$$

Da cui, essendo la matrice  $\mathbf{T}$  sempre invertibile, se  $t_i > t_{i-1}, t = 0, \dots, n - 1$ ,

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1} q$$

I vantaggi che si ottengono nell'impiego di funzioni polinomiali per l'interpolazione di  $n$  punti sono che:

1. la traiettoria ottenuta in questa maniera attraversa tutti i punti dati;
2. la funzione interpolante può essere facilmente descritta poichè solo  $n$  coefficienti sono necessari;
3. le derivate di ogni ordine della funzione  $q(t)$  così definita sono continue nel range  $[t_0, t_{n-1}]$ ;
4. la traiettoria interpolante  $q(t)$  è unica.

D'altro lato questo metodo di interpolazione non è efficiente dal punto di vista numerico; all'aumentare del numero  $n$  di punti, aumenta il numero condizionale  $\kappa$  (rapporto tra il massimo e il minimo valore singolare) della matrice

$\mathbf{T}$  di Vandermonde, rendendo il problema della sua inversione numericamente malcondizionato. Si rammenta infatti che dato il sistema lineare

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

si può dimostrare che una perturbazione  $\Delta \mathbf{M}$  produce un errore  $\Delta \mathbf{a}$ , tale che

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}} \leq |\mathbf{M}| |\mathbf{M}^{-1}| \frac{\Delta \mathbf{M}}{\mathbf{M}} = \kappa \frac{\Delta \mathbf{M}}{\mathbf{M}}$$

e cioè che l'errore relativo nel vettore soluzione è limitato dall'errore relativo nella matrice  $\mathbf{M}$  data moltiplicato per il suo numero condizionante  $\kappa$ .

Nel caso in esame, al variare dei punti  $n$  il numero condizionante della matrice  $\mathbf{T}$  risulta

$n$	3	4	5	6	10	15	20
$\kappa$	15.1	98.87	686.43	4924.37	$1.519 \cdot 10^7$	$4.032 \cdot 10^{11}$	$1.139 \cdot 10^{16}$

Esistono anche altri metodi, più efficienti, per il calcolo dei coefficienti del polinomio, ma le difficoltà numeriche permangono per valori elevati di  $n$  (in questi casi si sfrutteranno le *spline*).

La cosiddetta formula di Lagrange fornisce direttamente l'espressione del polinomio interpolante:

$$q(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{n-1})}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \cdots (t_0 - t_{n-1})} q_0 + \frac{(t - t_0)(t - t_2) \cdots (t - t_{n-1})}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2) \cdots (t_1 - t_{n-1})} q_1 + \\ + \cdots + \frac{(t - t_0) \cdots (t - t_{n-2})}{(t_{n-1} - t_0)(t_{n-1} - t_1) \cdots (t_{n-1} - t_{n-2})} q_{n-1}.$$



## Traiettorie trigonometriche

Basate su funzioni trigonometriche. Tra queste si possono citare:

1. la *traiettoria armonica*:

$$q(t) = \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{(t - t_0)\pi}{T} \right) \right] + q_0, \quad h = q_1 - q_0$$

2. la *traiettoria cicloidale*:

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( \frac{2(t - t_0)\pi}{T} \right) \right] + q_0$$

3. la *traiettoria ellittica*:

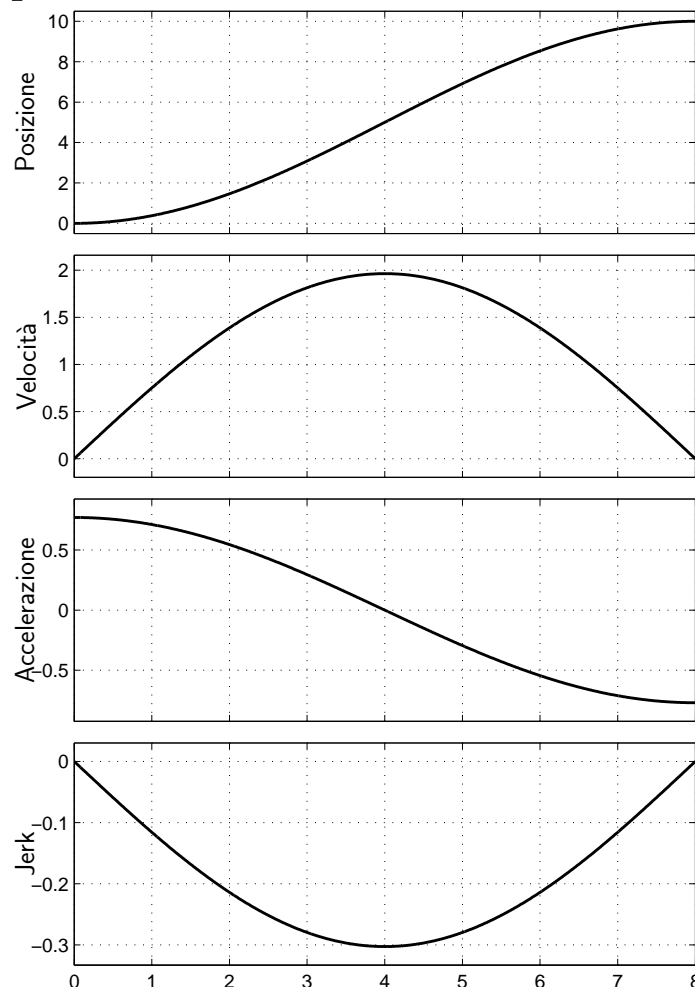
$$q(t) = \frac{h}{2} \left[ 1 - \frac{\cos \left( \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right)}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \left( \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right)}} \right] + q_0$$

Tutte le traiettorie di tipo trigonometrico sono derivabili infinite volte, benché siano possibili discontinuità nei punti iniziale e finale.

La *traiettoria armonica* generalizza l'equazione del moto armonico nel quale l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, ma di segno opposto. Essa presenta derivate continue in tutti i punti interni all'intervallo temporale  $(t_0, t_1)$ , per qualsiasi ordine di derivazione. Le equazioni che descrivono la traiettoria e le sue derivate sono

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi(t - t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) = \frac{h \pi}{T} \sin \left( \frac{\pi(t - t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) = \frac{h \pi^2}{T^2} \cos \left( \frac{\pi(t - t_0)}{T} \right) \\ \dddot{q}(t) = -\frac{h \pi^3}{T^3} \sin \left( \frac{\pi(t - t_0)}{T} \right) \end{array} \right.$$

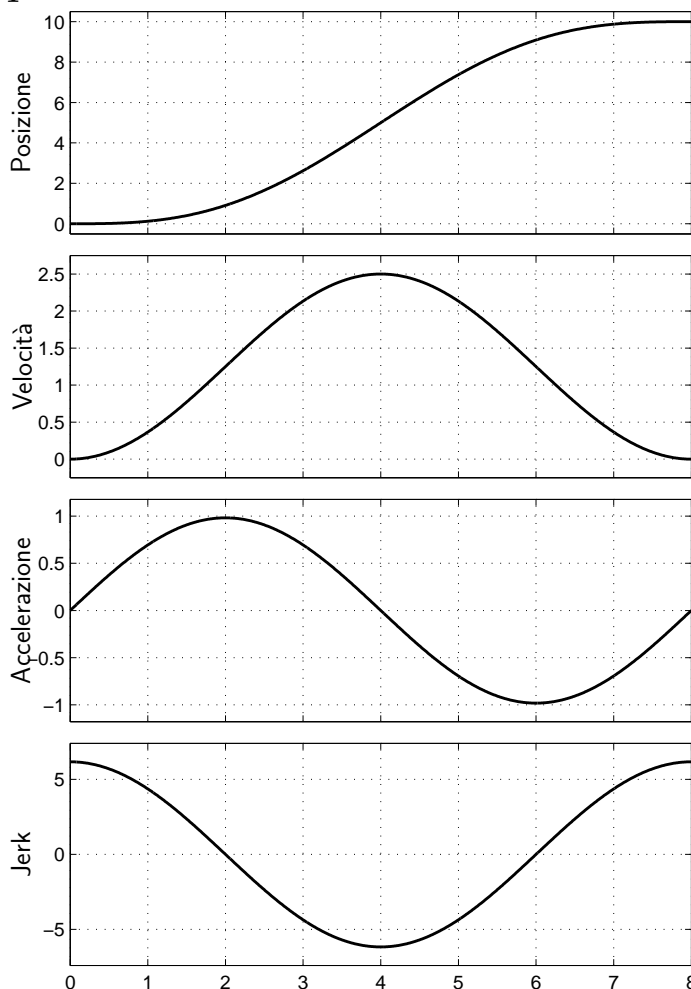
In figura è riportata una traiettoria armonica ottenuta con le condizioni  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 8$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 10$ .



La traiettoria armonica presenta discontinuità nell'accelerazione negli istanti iniziale e finale e quindi valori infiniti di jerk. Una alternativa è rappresentata dalla *traiettoria cicloidale*, che presenta continuità anche nell'accelerazione. Le equazioni della traiettoria e delle sue derivate sono

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = h \left( \frac{t - t_0}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) = \frac{h}{T} \left( 1 - \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) = \frac{h}{T^2} 2\pi \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \\ \ddot{\dot{q}}(t) = \frac{h}{T^3} 4\pi^2 \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \end{array} \right.$$

In figura è riportata una traiettoria cicloidale ottenuta con le condizioni  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 8$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 10$ .



### Traiettorie per sviluppo in serie di Fourier

Sono traiettorie calcolate sviluppando in serie di Fourier espressioni di traiettorie “elementari” e considerando un numero finito di componenti (limitate in frequenza), al fine di ottenere spettri frequenziali opportuni.

Si riportano a titolo esemplificativo:

- la *Gutman 1-3*

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{15}{32\pi} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{96\pi} \sin \left( \frac{6\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

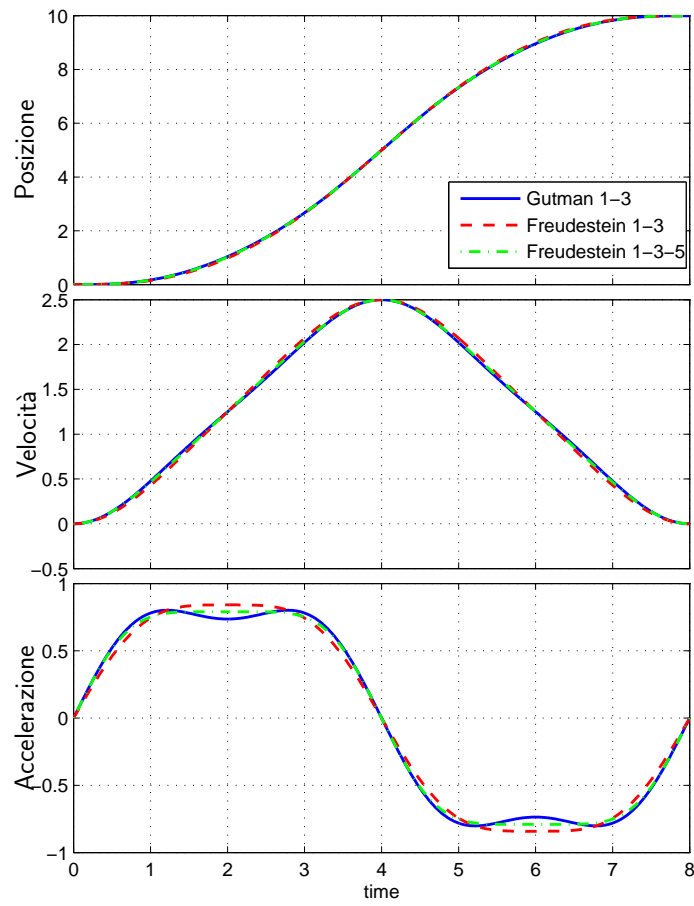
- la *Freudestein 1-3*

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{27}{56\pi} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{168\pi} \sin \left( \frac{6\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

- la *Freudestein 1-3-5*

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{0.9438}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T} + \frac{1}{54} \sin \frac{6\pi(t - t_0)}{T} + \frac{1}{1250} \sin \frac{10\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

In figura sono riportate le traiettorie ottenute per sviluppo in serie di Fourier ottenute con le condizioni  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 8$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 10$ .

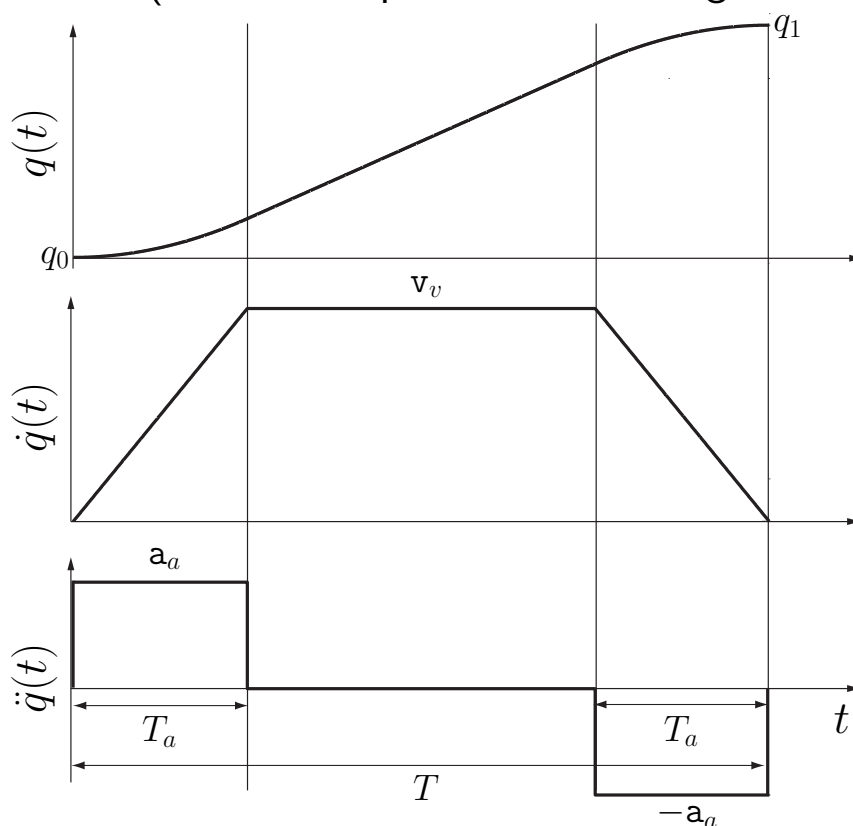


## Traiettorie composte

Si tratta di traiettorie ottenute giustapponendo funzioni elementari (polinomi, trigonometriche, ecc.) al fine di rispondere alle più molteplici esigenze e specifiche.

Sono scomponibili in “tratti”, ciascuno caratterizzato da una specifica espressione. Si garantisce quantomeno la continuità posizione e velocità.

La traiettoria più comune e nota appartenente a questa categoria è sicuramente la *traiettoria trapezoidale* in velocità, caratterizzata da 3 segmenti ad accelerazione costante (in un tratto positiva, in uno negativa e nel terzo nulla).



Si assumono le velocità iniziale e finali nulle, e una eguale durata del periodo di accelerazione e di decelerazione (ciò comporta che il valore massimo e minimo dell'accelerazione siano uguali in valore assoluto).

Se  $t_0 = 0$  (e di conseguenza la durata  $T$  della traiettoria coincide con  $t_1$ ), la traiettoria può essere calcolata come segue

a) **Fase di accelerazione**,  $t \in [0, T_a]$ . La posizione, la velocità e l'accelerazione sono date rispettivamente da

$$\begin{cases} q_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \dot{q}_a(t) = a_1 + 2a_2 t \\ \ddot{q}_a(t) = 2a_2. \end{cases} \quad (2)$$

I tre parametri  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  sono definiti dai vincoli sulla posizione  $q_0$  e velocità  $v_0$  iniziale, e sulla velocità costante  $v_v$  che si desidera alla fine della fase di accelerazione.

$$\begin{cases} q_a(0) = q_0 \\ \dot{q}_a(0) = 0 \\ \dot{q}_a(T_a) = v_v \end{cases}$$

Ponendo la velocità iniziale a zero si ottiene

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{v_v}{2T_a}. \end{cases}$$

In questa fase, l'accelerazione è costante e il suo valore è  $v_v/T_a$ .

b) **Fase a velocità costante**,  $t \in [T_a, T - T_a]$ . Posizione, velocità e accelerazione sono ora definite da

$$\begin{cases} q_b(t) = b_0 + b_1 t \\ \dot{q}_b(t) = b_1 \\ \ddot{q}_b(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

dove, per ragioni di continuità,

$$q_b(T_a) = b_1 = v_v$$

e

$$q_a(T_a) = q_0 + \frac{v_v T_a}{2} = q_b(T_a) = b_0 + v_v T_a$$

da cui

$$b_0 = q_0 - \frac{\mathbf{v}_v T_a}{2}.$$

c) **Fase di decelerazione**,  $t \in [T - T_a, T]$ . Posizione, velocità e accelerazione sono

$$\begin{cases} q_c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \\ \dot{q}_c(t) = c_1 + 2c_2 t \\ \ddot{q}_c(t) = 2c_2. \end{cases} \quad (4)$$

I parametri sono ora definiti dai vincoli sulla posizione  $q_1$  e velocità  $\mathbf{v}_1$  finale, e sulla velocità  $\mathbf{v}_v$  che si desidera all'inizio del periodo di decelerazione.

$$\begin{cases} q_c(T) = q_1 \\ \dot{q}_c(T - T_a) = \mathbf{v}_v \\ \dot{q}_c(T) = 0 \end{cases}$$

Se la velocità finale è nulla si ha

$$\begin{cases} c_0 = q_1 - \frac{\mathbf{v}_v T^2}{2T_a} \\ c_1 = \frac{\mathbf{v}_v T}{T - T_a} \\ c_2 = -\frac{\mathbf{v}_v}{2T_a}. \end{cases}$$



In conclusione, considerando il caso generale  $t_0 \neq 0$ , la traiettoria in posizione è definita come

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{\mathbf{v}_v}{2T_a}(t - t_0)^2, & t_0 \leq t < t_0 + T_a \\ q_0 + \mathbf{v}_v \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a \leq t < t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{\mathbf{v}_v}{2T_a}(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (5)$$

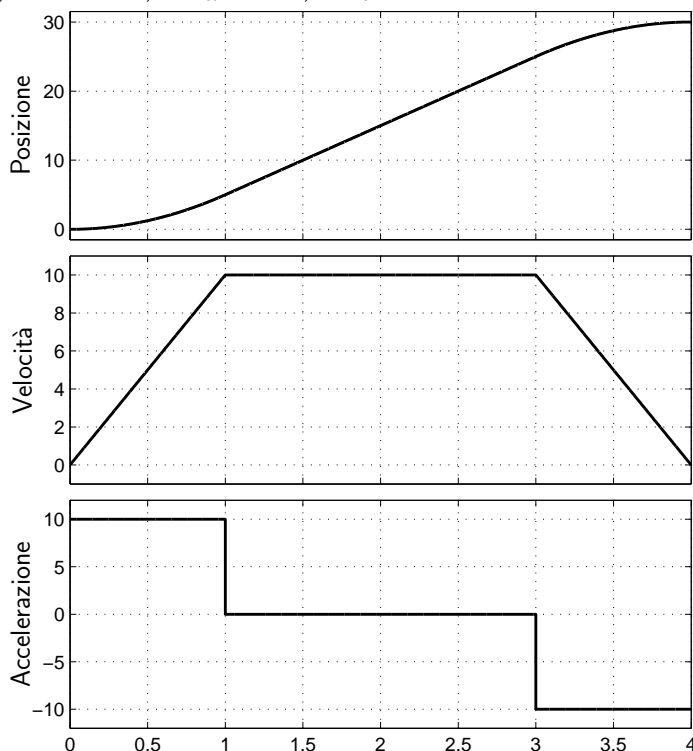
Per la pianificazione corretta della traiettoria bisogna infine imporre un vincolo che non è stato ancora preso in considerazione, ovvero la continuità di posizione tra secondo e terzo tratto:

$$q_b(t_1 - T_a) = q_c(t_1 - T_a)$$

da cui risulta l' ulteriore vincolo

$$\mathbf{v}_v = \frac{q_1 - q_0}{T - T_a} = \frac{h}{T - T_a}. \quad (6)$$

In figura sono riportati i profili di posizione, velocità e accelerazione di una tipica traiettoria con velocità trapezoidale, calcolata con le condizioni  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 30$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 4$ ,  $T_a = 1$ ,  $\mathbf{v}_v = 10$ .



Nell'equazione (5) che definisce la traiettoria, non compare il valore dell'accelerazione nei tratti ad accelerazione costante. Sfruttando la relazione

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{a}_a T_a \quad (7)$$

è possibile riscrivere la (5) come:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_a (t - t_0)^2, & t_0 \leq t < t_0 + T_a \\ q_0 + \mathbf{v}_v \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a \leq t < t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_a (t_1 - t)^2, & t_1 - T_a \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (8)$$

La traiettoria trapezoidale in velocità è perciò descritta dalla (8) insieme alle due equazioni di vincolo (6) e (7). Si può notare come siano presenti ancora alcuni gradi di libertà, ovvero parametri che possono essere assegnati ad arbitrio, come  $T_a$ ,  $T$ ,  $\mathbf{v}_v$ ,  $\mathbf{a}_a$  oltre a  $q_0$ ,  $q_1$ . Tra detti parametri, oltre ai già citati (6) e (7), esistono anche dei vincoli aggiuntivi, come la ovvia condizione

$$T_a \leq T/2$$

oppure la (meno ovvia) condizione sull'accelerazione che ha un valore minimo dato da

$$|\ddot{q}| \geq \frac{4|q_1 - q_0|}{T^2}$$

Classiche specifiche usualmente impiegate nella definizione della traiettoria trapezoidale in velocità sono:

### 1. Imposizione di velocità massima e accelerazione massima

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_{max}, \quad \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_{max}.$$

In questo caso la durata complessiva  $T$  della traiettoria e la durata  $T_a$  del periodo di accelerazione non sono predefinite ma devono essere calcolate come

$$\begin{cases} T_a = \frac{\mathbf{v}_{max}}{\mathbf{a}_{max}} \\ T = \frac{h}{\mathbf{v}_{max}} + \frac{\mathbf{v}_{max}}{\mathbf{a}_{max}} \end{cases} \quad (9)$$

e l'espressione della traiettoria diventa

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_{max}(t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_0 + \mathbf{v}_{max} \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a < t \leq t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_{max}(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases}$$

Anche in questo caso occorre tuttavia verificare che  $T_a \leq T/2$  (o equivalentemente che  $h \geq \frac{\mathbf{v}_{max}^2}{\mathbf{a}_{max}}$ ). Il fatto che la condizione non sia verificata significa che, date le altre condizioni, la velocità  $\mathbf{v}_{max}$  non può essere raggiunta. Di conseguenza la traiettoria (che risulta ancora realizzabile) sarà caratterizzata solo da una fase di accelerazione, seguita da una di decelerazione, senza tratto lineare intermedio. I valori dei parametri  $T_a$  e  $T$  e la massima velocità effettivamente raggiunta risultano in questo caso

$$\begin{cases} T_a = \sqrt{\frac{h}{\mathbf{a}_{max}}} \\ T = 2T_a \\ \dot{q}_{max} = \mathbf{a}_{max}T_a = \sqrt{\mathbf{a}_{max}h} = \frac{h}{T_a} \end{cases}$$

mentre l'espressione analitica della traiettoria è

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{max} (t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_1 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_{max} (t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases} \quad (10)$$

2. **Imposizione della durata complessiva  $T$  e del periodo di accelerazione  $T_a$**   
 Risolvendo il sistema di due equazioni costituito dalla (6) e (7) rispetto a  $\mathbf{v}_v$  e  $\mathbf{a}_a$  è possibile trovare i valori che garantiscono determinate durate  $T$  e  $T_a$ :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_v = \frac{h}{T - T_a} \\ \mathbf{a}_a = \frac{h}{T_a(T - T_a)}. \end{cases}$$

Se si assume che il periodo di accelerazione sia una frazione della durata complessiva  $T$ , cioè

$$T_a = \alpha T, \quad 0 < \alpha \leq 1/2$$

le espressioni della velocità massima e dell'accelerazione massima in termini di  $\alpha$ ,  $T$ ,  $T_a$  diventano

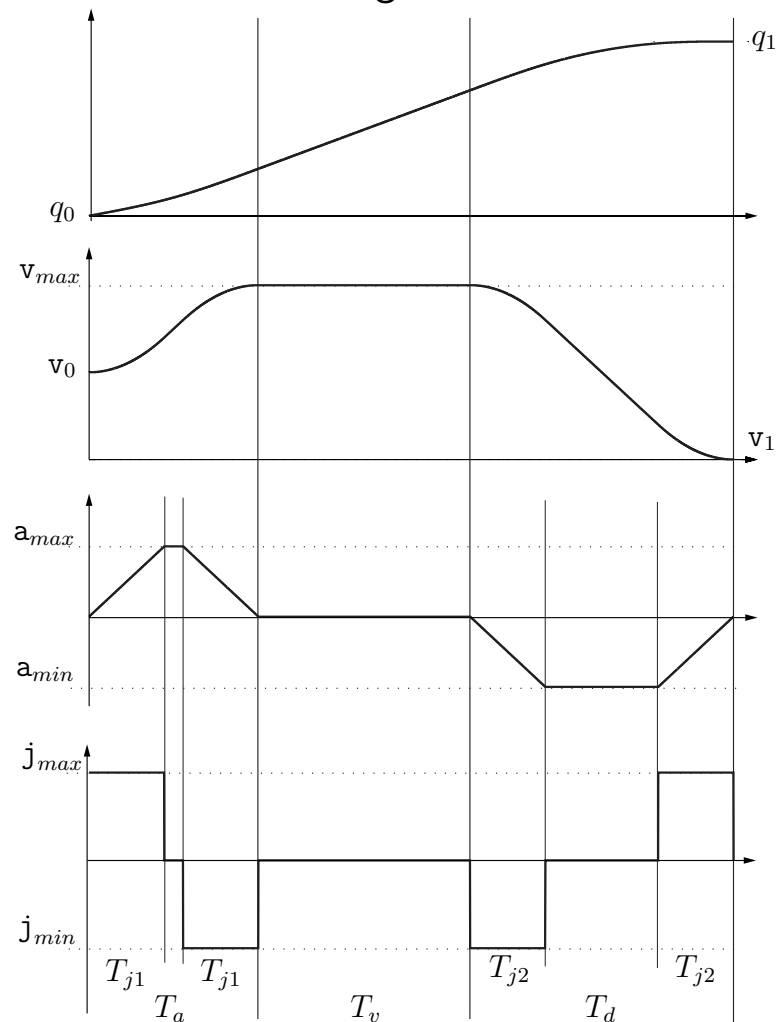
$$\begin{cases} \mathbf{v}_v = \frac{h}{(1 - \alpha)T} \\ \mathbf{a}_a = \frac{h}{\alpha(1 - \alpha)T^2}. \end{cases}$$

Con questi valori la traiettoria (8) è completamente definita.

L'esigenza di traiettorie più "dolci" ha indotto lo sviluppo di profili di moto con raccordi polinomiali di ordine maggiore di 2 (accelerazione continua), e quindi con il jerk costante a tratti (*traiettoria doppia-S in velocità o a 7 segmenti*), o anche di traiettorie con jerk continuo (*traiettoria a 15 segmenti*).

### *Traiettoria doppia S in velocità*

Come la traiettoria trapezoidale, la doppia S è costituita da una fase di accelerazione, una di decelerazione e un tratto intermedio a velocità costante. Ma in questo caso, i segmenti di accelerazione/decelerazione sono a loro volta costituiti da diverse fasi a jerk costante (prima positivo, poi nullo e infine negativo, e/o viceversa), come evidenziato in figura.



Assumendo che le velocità iniziali e finali  $v_0$  e  $v_1$  siano nulle, e i vincoli simmetrici, ovvero  $j_{min} = -j_{max}$ ,  $a_{min} = -a_{max}$ ,  $v_{min} = -v_{max}$  (in questo modo i segmenti di accelerazione e decelerazione sono simmetrici e di conseguenza  $T_a = T_d$  e  $T_{j1} = T_{j2} = T_j$ ) il calcolo dei parametri della traiettoria può essere effettuato facilmente imponendo le condizioni di continuità tra i vari

tratti e i vincoli su posizione iniziale/finale, massima velocità, accelerazione, jerk.

Assunti determinati valori di  $v_{max}$ ,  $a_{max}$ ,  $j_{max}$ , esistono diverse possibilità a seconda che la massima velocità o la massima accelerazione siano effettivamente raggiunte.

Nell'ipotesi semplificativa che  $q_1 > q_0$ , quattro situazioni sono possibili:

1.  $v_{lim} = v_{max}$ :
  - 1.a.  $a_{lim} = a_{max}$
  - 1.b.  $a_{lim} < a_{max}$
2.  $v_{lim} < v_{max}$ :
  - 2.a.  $a_{lim} = a_{max}$
  - 2.b.  $a_{lim} < a_{max}$

dove  $v_{lim}$  e  $a_{lim}$  sono i massimi valori raggiunti dalla traiettoria, ovvero  $v_{lim} = \max_t(\dot{q}(t))$  e  $a_{lim} = \max_t(\ddot{q}(t))$ .

**Caso 1.**  $v_{lim} = v_{max}$ .

In questo caso è necessario verificare se la massima accelerazione  $a_{max}$  è raggiunta o meno, e quindi calcolare  $T_j$  e  $T_a (= T_d)$

$$\text{a. se } v_{max} j_{max} \geq a_{max}^2 \Rightarrow \begin{aligned} T_j &= \frac{a_{max}}{j_{max}} \\ T_a &= T_j + \frac{v_{max}}{a_{max}} \end{aligned}$$

$$\text{b. se } v_{max} j_{max} < a_{max}^2 \Rightarrow \begin{aligned} T_j &= \sqrt{\frac{v_{max}}{j_{max}}} \\ T_a &= 2T_j. \end{aligned}$$

A questo punto, la durata del segmento a velocità costante può essere calcolata come

$$T_v = \frac{q_1 - q_0}{v_{max}} - T_a.$$

Se la durata  $T_v$  risulta positiva, allora la massima velocità è effettivamente raggiunta, altrimenti è necessario considerare il Caso 2 (ponendo  $T_v = 0$ ).

**Caso 2.**  $v_{lim} < v_{max}$ .

Anche in questo caso sono possibili due sotto-casi, a seconda che la massima accelerazione  $a_{max}$  sia raggiunta o meno:

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \text{se } (q_1 - q_0) \geq 2 \frac{a_{max}^3}{j_{max}^2} \Rightarrow T_j = \frac{a_{max}}{j_{max}} \\ & T_a = \frac{T_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_j}{2}\right)^2 + \frac{q_1 - q_0}{a_{max}}}. \\ \text{b.} \quad & \text{se } (q_1 - q_0) < 2 \frac{a_{max}^3}{j_{max}^2} \Rightarrow T_j = \sqrt[3]{\frac{q_1 - q_0}{2j_{max}}} \\ & T_a = 2T_j. \end{aligned}$$

Una volta che  $T_j$ ,  $T_a$  (e  $T_d$ ),  $T_v$  sono disponibili, la traiettoria può essere valutata considerando

$$\begin{aligned} a_{lim} &= j_{max} T_j \\ v_{lim} &= (T_a - T_j) a_{lim}. \end{aligned}$$

nelle seguenti equazioni

### Fase di accelerazione

a)  $t \in [0, T_j]$

$$\begin{cases} q(t) &= q_0 + v_0 t + j_{max} \frac{t^3}{6} \\ \dot{q}(t) &= v_0 + j_{max} \frac{t^2}{2} \\ \ddot{q}(t) &= j_{max} t \\ q^{(3)}(t) &= j_{max} \end{cases}$$

b)  $t \in [T_j, T_a - T_j]$

$$\begin{cases} q(t) &= q_0 + v_0 t + \frac{a_{lim}}{6} (3t^2 - 3T_j t + T_j^2) \\ \dot{q}(t) &= v_0 + a_{lim} \left( t - \frac{T_j}{2} \right) \\ \ddot{q}(t) &= j_{max} T_j = a_{lim} \\ q^{(3)}(t) &= 0 \end{cases}$$

$$c) t \in [T_a - T_j, T_a]$$

$$\begin{cases} q(t) &= q_0 + (\mathbf{v}_{lim} + \mathbf{v}_0) \frac{T_a}{2} - \mathbf{v}_{lim}(T_a - t) - \mathbf{j}_{min} \frac{(T_a - t)^3}{6} \\ \dot{q}(t) &= \mathbf{v}_{lim} + \mathbf{j}_{min} \frac{(T_a - t)^2}{2} \\ \ddot{q}(t) &= -\mathbf{j}_{min}(T_a - t) \\ q^{(3)}(t) &= \mathbf{j}_{min} = -\mathbf{j}_{max} \end{cases}$$

### Fase a velocità costante

$$a) t \in [T_a, T_a + T_v]$$

$$\begin{cases} q(t) &= q_0 + (\mathbf{v}_{lim} + \mathbf{v}_0) \frac{T_a}{2} + \mathbf{v}_{lim}(t - T_a) \\ \dot{q}(t) &= \mathbf{v}_{lim} \\ \ddot{q}(t) &= 0 \\ q^{(3)}(t) &= 0 \end{cases}$$

### Fase di decelerazione

$$a) t \in [T - T_d, T - T_d + T_{j2}]$$

$$\begin{cases} q(t) &= q_1 - (\mathbf{v}_{lim} + \mathbf{v}_1) \frac{T_d}{2} + \mathbf{v}_{lim}(t - T + T_d) - \mathbf{j}_{max} \frac{(t - T + T_d)^3}{6} \\ \dot{q}(t) &= \mathbf{v}_{lim} - \mathbf{j}_{max} \frac{(t - T + T_d)^2}{2} \\ \ddot{q}(t) &= -\mathbf{j}_{max}(t - T + T_d) \\ q^{(3)}(t) &= \mathbf{j}_{min} = -\mathbf{j}_{max} \end{cases}$$



$$\text{b) } t \in [T - T_d + T_j, T - T_j]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = q_1 - (\mathbf{v}_{lim} + \mathbf{v}_1) \frac{T_d}{2} + \mathbf{v}_{lim}(t - T + T_d) + \\ \quad + \frac{\mathbf{a}_{lim}}{6} \left( 3(t - T + T_d)^2 - 3T_{j2}(t - T + T_d) + T_j^2 \right) \\ \dot{q}(t) = \mathbf{v}_{lim} + \mathbf{a}_{lim} \left( t - T + T_d - \frac{T_j}{2} \right) \\ \ddot{q}(t) = -\mathbf{j}_{max} T_j = \mathbf{a}_{lim} \\ q^{(3)}(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } t \in [T - T_j, T]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = q_1 - \mathbf{v}_1(T - t) - \mathbf{j}_{max} \frac{(T - t)^3}{6} \\ \dot{q}(t) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{j}_{max} \frac{(T - t)^2}{2} \\ \ddot{q}(t) = -\mathbf{j}_{max}(T - t) \\ q^{(3)}(t) = \mathbf{j}_{max} \end{array} \right.$$

Come nel caso della traiettoria trapezoidale, anche la doppia S può essere definita in funzione delle durate dei singoli segmenti, ovvero  $T_j$ ,  $T_a (= T_d)$ ,  $T$ . Invertendo, le relazioni che legano i periodi suddetti con i valori di velocità, accelerazione e jerk massimi e dello spostamento  $h$ , cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{h}{\mathbf{v}_{max}} + T_a \\ T_a = \frac{\mathbf{v}_{max}}{\mathbf{a}_{max}} + T_j \\ T_j = \frac{\mathbf{a}_{max}}{\mathbf{j}_{max}} \end{array} \right.$$

si ottengono i corrispondenti valori di  $v_{max}$ ,  $a_{max}$ ,  $j_{max}$ :

$$\begin{cases} v_{max} = \frac{h}{T - T_a} \\ a_{max} = \frac{h}{(T - T_a)(T_a - T_j)} \\ j_{max} = \frac{h}{(T - T_a)(T_a - T_j)T_j}. \end{cases}$$

Se si fa l'ulteriore ipotesi che la durata della fase di accelerazione sia una frazione dell'intera durata della traiettoria:

$$T_a = \alpha T, \quad 0 < \alpha \leq 1/2$$

e allo stesso modo che la lunghezza dei segmenti a jerk costante sia una frazione del periodo di accelerazione:

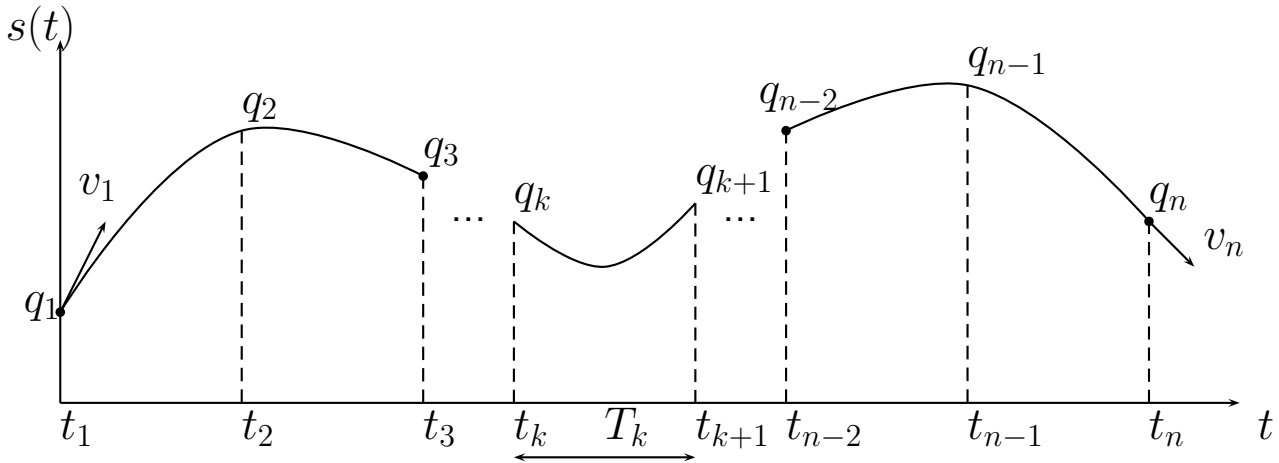
$$T_j = \beta T_a, \quad 0 < \beta \leq 1/2$$

si ottengono i valori della velocità, accelerazione e jerk massimi che definiscono la traiettoria:

$$\begin{cases} v_{max} = \frac{h}{(1 - \alpha)T} \\ a_{max} = \frac{h}{\alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)T^2} \\ j_{max} = \frac{h}{\alpha^2\beta(1 - \alpha)(1 - \beta)T^3}. \end{cases}$$

## Traiettorie Spline

Sono traiettorie **multi-punto** ottenute come unione di  $n - 1$  funzioni polinomiali (grado tipicamente 3 o 5) con condizioni di passaggio per  $n$  punti e di continuità della funzione complessiva e delle sue derivate (fino ad un certo ordine). Si può dimostrare che la spline è la funzione interpolante a **curvatura minima**, a parità di condizioni di continuità sulle derivate.



Per ottenere condizioni di continuità sulle velocità e sulle accelerazioni sono tipicamente impiegati polinomi di grado tre (cubici). Le spline cubiche risultano definite da

$$s(t) = \{q_k(t), t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, \dots, n - 1\},$$

$$q_k(t) = a_{k0} + a_{k1}(t - t_k) + a_{k2}(t - t_k)^2 + a_{k3}(t - t_k)^3.$$

In questo modo, si hanno 4 coefficienti per ciascuno degli  $n - 1$  polinomi: in totale  $4(n - 1)$  parametri da definire. D'altra parte si hanno i seguenti vincoli:

- $2(n - 1)$  condizioni di passaggio per i punti, in quanto ogni cubica deve interpolare i punti alle sue estremità;
- $n - 2$  condizioni sulla continuità delle velocità nei punti intermedi;
- $n - 2$  condizioni sulla continuità delle accelerazioni nei punti intermedi.

Si hanno dunque

$$4(n - 1) - 2(n - 1) - 2(n - 2) = 2$$

gradi di libertà che possono essere utilizzati per imporre opportune condizioni sulla velocità iniziale e finale.

### *Spline cubica con velocità iniziale e finale preassegnata*

Il calcolo dei coefficienti  $a_{ki}$  avviene secondo il seguente algoritmo. Si assumono note le velocità  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , nei punti intermedi. Fatto questo, per ciascun polinomio cubico si hanno quattro condizioni al contorno su posizione e velocità, che danno luogo al sistema di quattro equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} q_k(t_k) = a_{k0} = q_k \\ \dot{q}_k(t_k) = a_{k1} = v_k \\ q_k(t_{k+1}) = a_{k0} + a_{k1}T_k + a_{k2}T_k^2 + a_{k3}T_k^3 = q_{k+1} \\ \dot{q}_k(t_{k+1}) = a_{k1} + 2a_{k2}T_k + 3a_{k3}T_k^2 = v_{k+1} \end{array} \right.$$

essendo  $T_k = t_{k+1} - t_k$ . La soluzione del sistema fornisce i seguenti coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k,0} = q_k \\ a_{k,1} = v_k \\ a_{k,2} = \frac{1}{T_k} \left[ \frac{3(q_{k+1} - q_k)}{T_k} - 2v_k - v_{k+1} \right] \\ a_{k,3} = \frac{1}{T_k^2} \left[ \frac{2(q_k - q_{k+1})}{T_k} + v_k + v_{k+1} \right] \end{array} \right. \quad (12)$$

Per il calcolo delle velocità  $v_1, \dots, v_{n-1}$  si procede imponendo la continuità delle accelerazioni nei punti intermedi:

$$\ddot{q}_k(t_{k+1}) = 2a_{k,2} + 6a_{k,3}T_k = 2a_{k+1,2} = \ddot{q}_{k+1}(t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, n - 2.$$

Da cui sostituendo le espressioni dei coefficienti  $a_{k,2}$ ,  $a_{k,3}$ ,  $a_{k+1,2}$  e moltiplicando per  $(T_k T_{k+1})/2$ , si ottiene

$$T_{k+1}v_k + 2(T_{k+1} + T_k)v_{k+1} + T_kv_{k+2} = \frac{3}{T_k T_{k+1}} [T_k^2(q_{k+2} - q_{k+1}) + T_{k+1}^2(q_{k+1} - q_k)]$$

per  $k = 0, \dots, n - 2$ .

Le precedenti relazioni possono essere messe in forma matriciale  $\mathbf{A}'\mathbf{v}' = \mathbf{c}'$ , con

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} T_1 & 2(T_0 + T_1) & T_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & T_2 & 2(T_1 + T_2) & T_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & T_{n-2} & 2(T_{n-3} + T_{n-2}) & T_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & T_{n-1} & 2(T_{n-2} + T_{n-1}) & T_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n]^T, \quad \mathbf{c}' = [c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}]^T$$

dove i termini  $c_k$  sono costanti dipendenti solo dalle posizioni intermedie e dalla durata dei segmenti, grandezze entrambe note.

Poichè le velocità  $v_0$  e  $v_n$  sono note anch'esse, è possibile eliminare le corrispondenti colonne della matrice  $\mathbf{A}'$  e ottenere

$$\begin{bmatrix} 2(T_0 + T_1) & T_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ T_2 & 2(T_1 + T_2) & T_1 & 0 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & T_{n-2} & 2(T_{n-3} + T_{n-2}) & T_{n-3} \\ 0 & \cdots & & 0 & T_{n-1} & 2(T_{n-2} + T_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{T_0 T_1} [T_0^2(q_2 - q_1) + T_1^2(q_1 - q_0)] - T_1 v_0 \\ \frac{3}{T_1 T_2} [T_1^2(q_3 - q_2) + T_2^2(q_2 - q_1)] \\ \vdots \\ \frac{3}{T_{n-3} T_{n-2}} [T_{n-3}^2(q_{n-1} - q_{n-2}) + T_{n-2}^2(q_{n-2} - q_{n-3})] \\ \frac{3}{T_{n-2} T_{n-1}} [T_{n-2}^2(q_n - q_{n-1}) + T_{n-1}^2(q_{n-1} - q_{n-2})] - T_{n-2} v_n \end{bmatrix}$$

che è un'equazione del tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}) \mathbf{v} = \mathbf{c}(\mathbf{T}, \mathbf{q}, v_0, v_n)$$

dove  $\mathbf{T} = [T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]^T$ ,  $\mathbf{q} = [q_0, q_1, \dots, q_n]^T$ .

La  $(n-1) \times (n-1)$  matrice  $\mathbf{A}$  ha una struttura dominante diagonale e perciò risulta sempre invertibile per  $T_k > 0$  ( $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ ). Inoltre, essendo tridiagonale è possibile utilizzare degli algoritmi di inversione estremamente efficienti.

Una volta che le velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}$  sono note, la spline è completamente determinata per mezzo delle relazione (12) che ne definisce i coefficienti.

● **Esempio.** Traiettoria spline attraverso una serie di punti

Si vuole determinare la traiettoria spline cubica che passi attraverso i seguenti punti

$$\begin{array}{cccccc} t_0 = 0, & t_1 = 5, & t_2 = 7, & t_3 = 8, & t_4 = 10, & t_5 = 15, & t_6 = 18 \\ q_0 = 3, & q_1 = -2, & q_2 = -5, & q_3 = 0, & q_4 = 6, & q_5 = 12, & q_6 = 8 \end{array}$$

e con velocità iniziale e finale  $v_0 = 2$ ,  $v_6 = -3$ . La matrice  $\mathbf{A}$  e il vettore  $\mathbf{c}$  sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

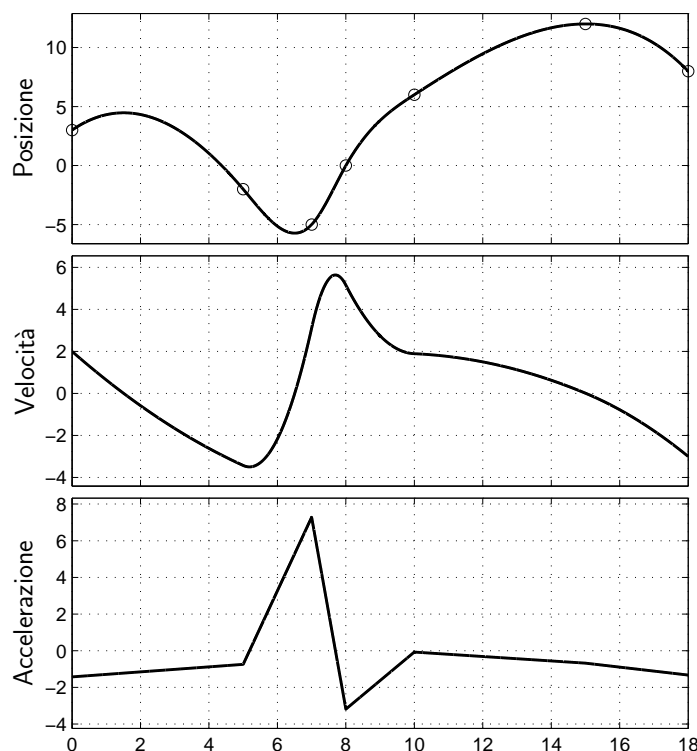
$$\mathbf{c} = [-32.5, 25.5, 39, 52.2, 5.8]^T$$

da cui le velocità nei punti intermedi risultano

$$\mathbf{v} = [-3.43, 3.10, 5.10, 1.88, 0.008]^T.$$

L'espressione completa della spline è perciò

$$s(t) = \begin{cases} 3 + 2t - 0.71t^2 + 0.02t^3, & \text{per } 0 \leq t < 5 \\ -2 - 3.4(t-5) - 0.37(t-5)^2 + 0.66(t-5)^3, & \text{per } 5 \leq t < 7 \\ -5 + 3.1(t-7) + 3.64(t-7)^2 - 1.74(t-7)^3, & \text{per } 7 \leq t < 8 \\ 5.15(t-8) - 1.59(t-8)^2 + 0.25(t-8)^3, & \text{per } 8 \leq t < 10 \\ 6 + 1.88(t-10) - 0.03(t-10)^2 - 0.02(t-10)^3, & \text{per } 10 \leq t < 15 \\ 12 + 0.008(t-15) - 0.34(t-15)^2 - 0.03(t-15)^3, & \text{per } 15 \leq t < 18. \end{cases}$$



## Operazioni sulle traiettorie

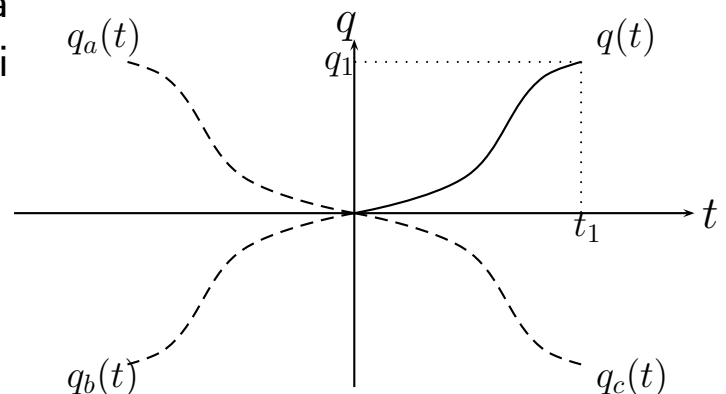
Al fine di rendere la traiettoria compatibile con determinati vincoli può essere utile modificarla mediante semplici regole di trasformazione geometrica, che includono anche la ri-scalatura temporale (che nel seguito verrà trattata in maniera specifica).

### Operazioni geometriche sulle traiettorie

Le regole per modificare la geometria delle traiettorie di base viste precedentemente, consistono in traslazione rispetto all'asse dei tempi  $t$  e/o alla variabile di posizione  $q$ , in operazioni di riflessione intorno agli assi coordinati o di scalatura.

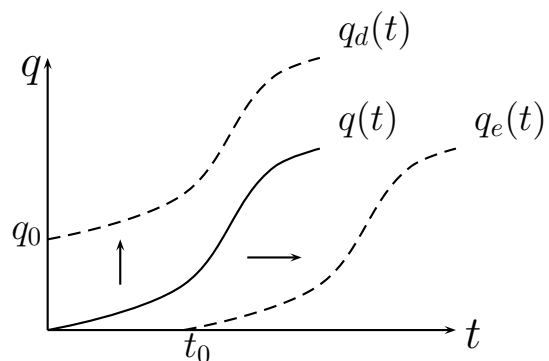
In figura sono mostrati gli effetti sulla generica traiettoria  $q(t)$  definita da  $(t_0, q_0) = (0, 0)$  a  $(t_1, q_1)$ , delle seguenti trasformazioni elementari:

1.  $q_a(t) = q(-t), \quad t \in [-t_1, 0].$
2.  $q_b(t) = -q(-t), \quad t \in [-t_1, 0].$
3.  $q_c(t) = -q(t), \quad t \in [0, t_1].$



Le due traiettorie rappresentate nella figura a fianco con una linea tratteggiata sono ottenute da  $q(t)$  per mezzo di una traslazione, ovvero

4.  $q_d(t) = q(t) + q_0, \quad t \in [0, t_1].$
5.  $q_e(t) = q(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + t_1].$



Queste operazioni possono essere sfruttate per modificare l'istante di tempo iniziale o la posizione iniziale di una traiettoria generica. Ad esempio, in questo

modo è possibile tenere in considerazione generiche condizioni su  $t_0$  e/o  $q_0$  per una traiettoria definita per  $t_0 = 0$  e  $q_0 = 0$ ; è sufficiente infatti considerare  $t - t_0$  al posto di  $t$  e/o aggiungere la posizione iniziale  $q_0$ .

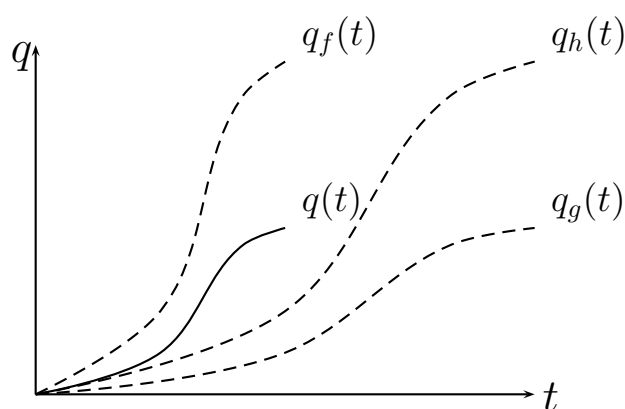
Nella figura seguente sono illustrate le operazioni di scalatura che è possibile compiere su una traiettoria. Il profilo  $q_f(t)$  è ottenuto da  $q(t)$  aumentando lo spostamento  $h$ ,  $q_g(t)$  incrementando la durata  $T$ , mentre in  $q_h(t)$  sia  $T$  che  $h$  sono stati modificati.

Se si considera una traiettoria normalizzata, cioè  $q(t) \in [0, 1]$  con  $t \in [0, 1]$ , le altre traiettorie sono ottenute come:

$$6. q_f(t) = h q(t).$$

$$7. q_g(t) = q(t/T).$$

$$8. q_h(t) = h q(t/T).$$





## Messa in scala temporale di traiettorie

Una generica traiettoria  $q = q(t)$  può essere resa più veloce o più lenta considerando una nuova variabile temporale  $t'$  legata a  $t$  per mezzo di una funzione strettamente crescente

$$t = \sigma(t').$$

In questo modo

$$\tilde{q}(t') = (q \circ \sigma)(t') = q(\sigma(t'))$$

e la velocità, accelerazione, ecc...risultano

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}(t') &= \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\sigma(t')}{dt'} \\ \ddot{\tilde{q}}(t') &= \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \frac{d^2\sigma(t')}{dt'^2} + \frac{d^2q(\sigma)}{d\sigma^2} \left( \frac{d\sigma(t')}{dt'} \right)^2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Perciò definendo in maniera opportuna la funzione  $\sigma$ , è possibile modificare le derivate temporali di  $\tilde{q}(t')$  a seconda delle necessità.

Le combinazioni di traiettorie  $q$  e funzioni  $\sigma$  sono praticamente infinite, ma una funzione che gioca un ruolo particolarmente importante è quella lineare, ovvero

$$t = \sigma(t') = \lambda t' \quad \implies \quad t' = \frac{t}{\lambda}$$

che porta a

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}(t') &= \lambda \dot{q}(t) \\ \ddot{\tilde{q}}(t') &= \lambda^2 \ddot{q}(t) \\ \tilde{q}^{(3)}(t') &= \lambda^3 q^{(3)}(t) \\ &\vdots \\ \tilde{q}^{(n)}(t') &= \lambda^n q^{(n)}(t).\end{aligned}$$

Per soddisfare determinati vincoli sulle massime velocità, accelerazioni, ecc., è conveniente considerare traiettorie espresse in **forma normalizzata** e quindi applicare operazioni di scalatura geometrica e temporale. Qualunque traiettoria  $q(t)$  (per semplicità si considerano condizioni al contorno nulle), definita per uno spostamento  $h = q_1 - q_0$  e una durata  $T = t_1 - t_0$ , può essere riscritta in termini della corrispondente forma normalizzata  $q_N(\tau)$  come

$$0 \leq q_N(\tau) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Infatti si ha che

$$q(t) = q_0 + (q_1 - q_0) \tilde{q}_N(t) = q_0 + h \tilde{q}_N(t)$$

dove

$$\tilde{q}_N(t) = q_N(\tau), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - t_0}{T}.$$

Come conseguenza, essendo la variabile temporale  $t$  ottenuta scalando  $\tau$  di un fattore  $\lambda = T$ , e applicando poi una traslazione di  $t_0$ , consegue che

$$\begin{aligned} q^{(1)}(t) &= \frac{h}{T} q_N^{(1)}(\tau) \\ q^{(2)}(t) &= \frac{h}{T^2} q_N^{(2)}(\tau) \\ q^{(3)}(t) &= \frac{h}{T^3} q_N^{(3)}(\tau) \\ &\vdots \\ q^{(n)}(t) &= \frac{h}{T^n} q_N^{(n)}(\tau) \end{aligned} \tag{14}$$

dove

$$q_N^{(1)}(\tau) = \frac{d q_N(\tau)}{d\tau}, \quad q_N^{(2)}(\tau) = \frac{d^2 q_N(\tau)}{d\tau^2}, \quad \dots$$

Ovviamente i massimi valori di velocità, accelerazione, ecc. si ottengono in corrispondenza dei massimi delle funzioni  $q_N^{(1)}, q_N^{(2)}, \dots$ . Modificando la durata  $T$  della traiettoria è possibile soddisfare i vincoli sulle saturazioni cinematiche.

• **Esempio.** Traiettoria polinomiale di grado 3

La parametrizzazione in forma normalizzata di una traiettoria cubica è

$$q_N(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3.$$

Imponendo le condizioni al contorno  $q_{N0}^{(1)} = 0$ ,  $q_{N1}^{(1)} = 0$  (oltre a  $q_N(0) = 0$  e  $q_N(1) = 1$ ) si ricava

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -2$$

da cui

$$q_N(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = 6\tau - 6\tau^2$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = 6 - 12\tau$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = -12.$$

I valori massimi di velocità e accelerazione sono quindi

$$q_{N \max}^{(1)} = q_N^{(1)}(0.5) = \frac{3}{2} \implies \dot{q}_{\max} = \frac{3h}{2T}$$

$$q_{N \max}^{(2)} = q_N^{(2)}(0) = 6 \implies \ddot{q}_{\max} = \frac{6h}{T^2}.$$

Operando sulla durata  $T$  della traiettoria è possibile rispettare i vincoli su velocità e accelerazione

• **Esempio.** Traiettoria polinomiale di grado 5

Per una funzione polinomiale di grado 5

$$q_N(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$$

con le condizioni al contorno  $q_{N0}^{(1)} = 0$ ,  $q_{N1}^{(1)} = 0$ ,  $q_{N0}^{(2)} = 0$ ,  $q_{N1}^{(2)} = 0$ , sono ricavati i seguenti valori dei coefficienti

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = -15, \quad a_5 = 6.$$

Perciò

$$q_N(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = 30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = 60 - 360\tau + 360\tau^2$$

e

$$\begin{aligned}
 q_N^{(1)max} &= q_N^{(1)}(0.5) = \frac{15}{8} & \implies & \dot{q}_{max} = \frac{15h}{8T} \\
 q_N^{(2)max} &= q_N^{(2)}(0.2123) = \frac{10\sqrt{3}}{3} & \implies & \ddot{q}_{max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2} \\
 q_N^{(3)max} &= q_N^{(3)}(0) = 60 & \implies & q_{max}^{(3)} = 60\frac{h}{T^3}.
 \end{aligned}$$

• **Esempio.** Traiettoria cicloidale

Il profilo di moto cicloidale ha una forma normalizzata data da

$$q_N(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau$$

da cui

$$\begin{aligned}
 q_N^{(1)}(\tau) &= 1 - \cos 2\pi\tau \\
 q_N^{(2)}(\tau) &= 2\pi \sin 2\pi\tau \\
 q_N^{(3)}(\tau) &= 4\pi^2 \cos 2\pi\tau
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 q_N^{(1)max} &= q_N^{(1)}(0.5) = 2 & \implies & \dot{q}_{max} = 2\frac{h}{T} \\
 q_N^{(2)max} &= q_N^{(2)}(0.25) = 2\pi & \implies & \ddot{q}_{max} = 2\pi\frac{h}{T^2} \\
 q_N^{(3)max} &= q_N^{(3)}(0) = 4\pi^2 & \implies & q_{max}^{(3)} = 4\pi^2\frac{h}{T^3}.
 \end{aligned}$$

• **Esempio.** Traiettoria armonica

Il profilo armonico ha la seguente parametrizzazione normalizzata

$$q_N(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi\tau)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 q_N^{(1)}(\tau) &= \frac{\pi}{2} \sin \pi\tau \\
 q_N^{(2)}(\tau) &= \frac{\pi^2}{2} \cos \pi\tau \\
 q_N^{(3)}(\tau) &= -\frac{\pi^3}{2} \sin \pi\tau.
 \end{aligned}$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi

$$\begin{aligned} q_N^{(1)}{}_{max} &= q_N^{(1)}(0.5) = \frac{\pi}{2} & \implies & \dot{q}_{max} = \frac{\pi h}{2T} \\ q_N^{(2)}{}_{max} &= q_N^{(2)}(0) = \frac{\pi^2}{2} & \implies & \ddot{q}_{max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2} \\ |q_N^{(3)}|_{max} &= |q_N^{(3)}(0.5)| = \frac{\pi^3}{2} & \implies & |q_{max}^{(3)}| = \frac{\pi^3 h}{2T^3}. \end{aligned}$$

• **Esempio.** Messa in scala cinematica e confronto tra traiettorie

Si vuole realizzare una traiettoria con  $q_0 = 10$ ,  $q_1 = 50$ , con un attuatore caratterizzato da  $v_{max} = 30$  e  $a_{max} = 80$ . Con queste condizioni risulta ( $h = 40$ )

Traiettoria	Formule	Vincoli	$T_{min}$
Polinomiale grado 3	$\dot{q}_{max} = \frac{3h}{2T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{6h}{T^2}$	$T = \frac{3h}{60} = 2$ $T = \sqrt{\frac{6h}{80}} = 1.732$	2
Polinomiale grado 5	$\dot{q}_{max} = \frac{15h}{8T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2}$	$T = \frac{15h}{240} = 2.5$ $T = \sqrt{\frac{10\sqrt{3}h}{240}} = 1.699$	2.5
Armonica	$\dot{q}_{max} = \frac{\pi h}{2T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2}$	$T = \frac{\pi h}{60} = 2.094$ $T = \sqrt{\frac{\pi^2 h}{160}} = 1.571$	2.094
Cicloidale	$\dot{q}_{max} = \frac{2h}{T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{2\pi h}{T^2}$	$T = \frac{2h}{30} = 2.667$ $T = \sqrt{\frac{2\pi h}{80}} = 1.772$	2.667

## Analisi e confronto di traiettorie

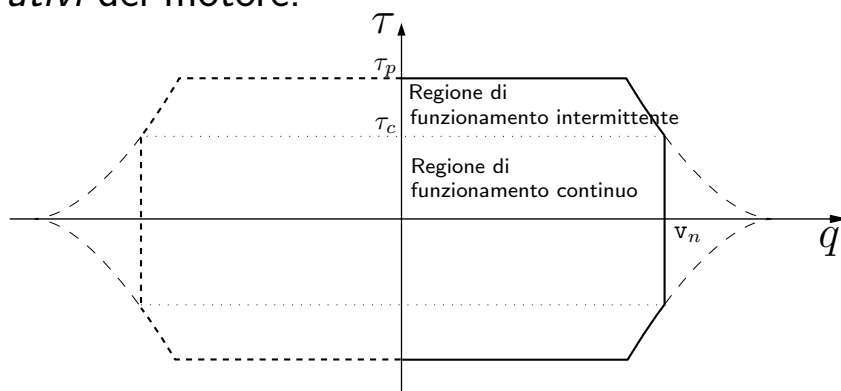
Nella tabella precedente alcune traiettorie sono state confrontate in termini di durata minima a parità di vincoli su velocità massima e accelerazione massima. Esistono tuttavia altri parametri da considerare quando si vuole selezionare una traiettoria per una specifica applicazione. In particolare si deve tener conto delle implicazioni che una determinata traiettoria comporta sia sul sistema complessivo, che sul carico e sul sistema di attuazione.

Di seguito verrà presa in considerazione la capacità delle diverse traiettorie di sfruttare a pieno il sistema di attuazione. Inoltre saranno analizzate le loro caratteristiche dinamiche in relazione alla struttura meccanica da movimentare.

## Utilizzazione del sistema di attuazione

Dato un motore elettrico, è possibile dedurre dai cataloghi le seguenti caratteristiche:

- *coppia di picco* ( $\tau_p$ ): massimo valore di coppia che il motore è in grado di generare istantaneamente;
- *coppia efficace o continuativa* ( $\tau_c$ ): coppia che il motore è in grado di generare indefinitamente nel tempo;
- *velocità nominale* ( $v_n$ ): massimo valore di velocità di rotazione del motore;
- *potenza massima* valore che identifica la taglia del motore;
- *campi operativi* del motore:



Tali dati devono essere confrontati con le caratteristiche dei profili di moto che si intende utilizzare, per verificarne la compatibilità. Qualora questa non sia

verificata occorre cambiare sistema di attuazione ovvero modificare i profili di moto desiderati.

In particolare oltre alla ovvia condizione sulla massima velocità ammissibile

$$\dot{q}_{max} \leq v_n$$

è necessario verificare se la coppia  $\tau(t)$ , necessaria per realizzare le operazioni richieste possa essere effettivamente erogata dal motore, cioè

$$\max_t \{\tau(t)\} = \tau_{max} \leq \tau_p.$$

Nel caso si considerino solo forze inerziali e di attrito, l'espressione della coppia risulta

$$\tau(t) = J_t \ddot{q}(t) + B_t \dot{q}(t) \quad (15)$$

dove  $J_t = J_m + J_l/k_r^2$  è il momento di inerzia totale, dato dai contributi del motore  $J_m$  e del carico  $J_l$  riportato al lato motore (e perciò diviso per il quadrato del rapporto di riduzione  $k_r$ ), mentre  $B_t$  è il coefficiente di smorzamento dell'intero sistema, espresso da  $B_t = B_m + B_l/k_r^2$ .

Una legge di moto può essere effettivamente realizzata se il *task* meccanico, cioè la curva descritta da  $(\dot{q}(t), \tau(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , è interamente inclusa nell'area definita dalla caratteristica velocità-coppia del motore

Quando il carico è prevalentemente inerziale, e quindi l'attrito può essere trascurato,  $\tau(t) \approx J_t \ddot{q}(t)$  e quindi il profilo di accelerazione fornisce una buona stima della coppia richiesta per svolgere un determinato movimento.

### • Esempio. Task meccanico con due diverse traiettorie

Dato un motore caratterizzato da

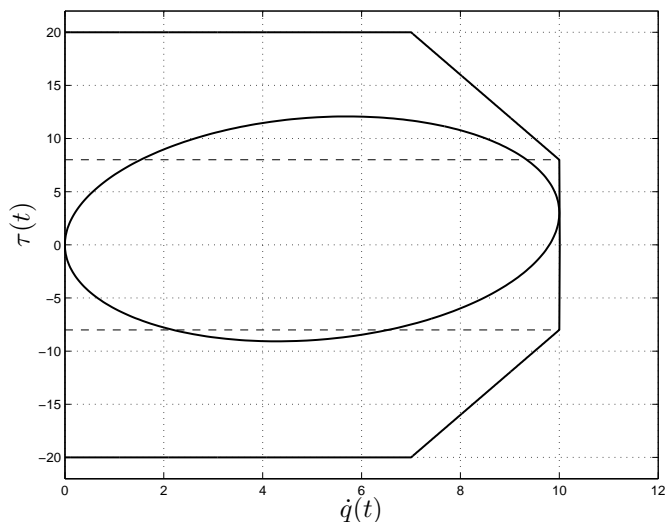
$$v_n = 10, \quad \tau_p = 20, \quad \tau_c = 8$$

che attua un sistema con momento di inerzia e coefficiente d'attrito dati rispettivamente da

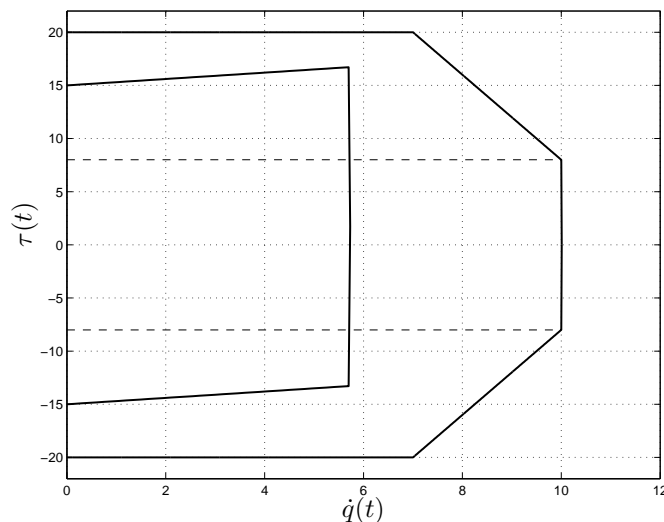
$$J_t = 1, \quad B_t = 0.3$$

sono considerate due diverse leggi di moto: in figura (a) una traiettoria cicloidale con  $h = 15$ ,  $T = 3$ , mentre in (b) una traiettoria trapezoidale (con la

condizione aggiuntiva  $a_{max} = 15$ ).



(a)



(b)

Come si evince dalle due figure entrambe le traiettorie sono compatibili con il motore scelto e il carico dato.

Nel caso in cui siano considerate traiettorie cicliche è necessario considerare anche il problema termico: il punto di lavoro di una traiettoria non può rimanere in maniera indefinita nella regione di lavoro intermittente. Una semplice condizione che consente di dedurre se una certa legge di moto è attuabile o meno riguarda il cosiddetto valore efficace della coppia che può essere calcolato come

$$\tau_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tau^2(t) dt}.$$

Tale valore deve essere confrontato con la coppia continuativa del motore  $\tau_c$ .



## Nel caso in cui

$$\tau_{eff} \leq \tau_c.$$

il movimento è compatibile con le caratteristiche termiche del motore.

Per un sistema generico come quello rappresentato dall' eq. (15), la coppia efficace è data da

$$\begin{aligned} \tau_{eff}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \tau^2(t) dt \\ &= \frac{J_t^2}{T} \int_0^T \ddot{q}^2(t) dt + \frac{B_t^2}{T} \int_0^T \dot{q}^2(t) dt + 2 \frac{J_t B_t}{T} \int_0^T \dot{q}(t) \ddot{q}(t) dt \\ &= J_t^2 \ddot{q}_{eff}^2 + B_t^2 \dot{q}_{eff}^2 \end{aligned}$$

dove

$$\ddot{q}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \ddot{q}^2(t) dt}, \quad \dot{q}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \dot{q}^2(t) dt}$$

sono rispettivamente i valori efficaci di velocità e accelerazione, mentre il termine  $2 \frac{J_t B_t}{T} \int_0^T \dot{q}(t) \ddot{q}(t) dt$  è nullo nel caso in cui siano considerati dei movimenti periodici<sup>1</sup> ( $\dot{q}(0) = \dot{q}(T)$ ).

Nel caso  $B_t \approx 0$ , l'espressione della coppia efficace risulta

$$\tau_{eff} = J_t \ddot{q}_{eff}.$$

Di conseguenza, il valore efficace del profilo di accelerazione fornisce una buona stima della coppia efficace.

• **Esempio.** Valori efficaci relativi alle traiettorie dell'esempio precedente  
Con riferimento ai valori dell'esempio precedente, si ha che

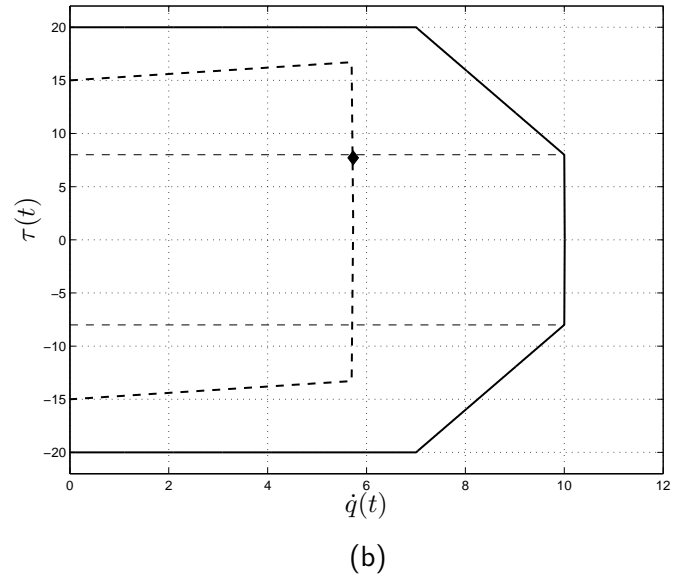
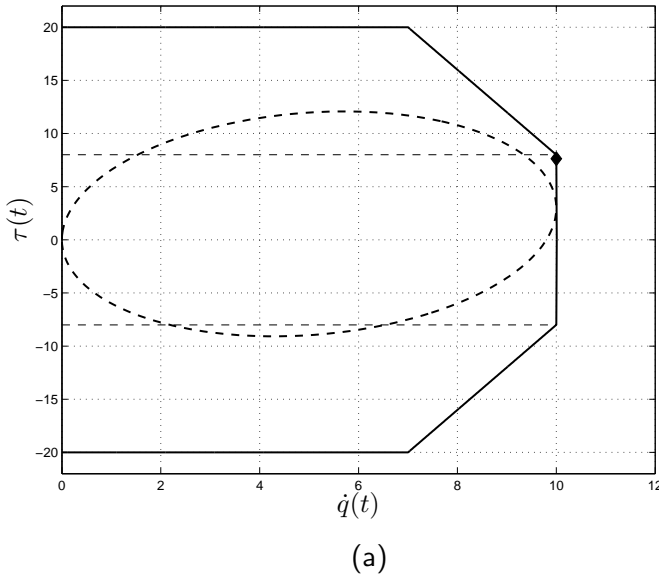
$$\tau_{eff}^{(a)} = 7.6293, \quad \tau_{eff}^{(b)} = 7.7104$$

e, poichè  $\tau_c = 8$ , entrambe le traiettorie risultano fattibili. Si noti che, come riportato nella seguente figura, in entrambi i casi il punto<sup>2</sup>  $(\tau_{eff}, \dot{q}_{max})$  ricade

<sup>1</sup>Si noti che  $2 \int_0^T \dot{q}(t) \ddot{q}(t) dt = [\dot{q}(t)^2]_{t=0}^{t=T} = 0$ .

<sup>2</sup>Le massime velocità sono rispettivamente  $\dot{q}_{max}^{(a)} = 10$  e  $\dot{q}_{max}^{(b)} = 5.7295$ .

nell'area di funzionamento continuativo della curva velocità-coppia.



## Caratterizzazione dei profili di moto in relazione ai valori di picco ed efficaci

La conoscenza dei valori di picco ed efficaci dei profili di velocità e accelerazione di una determinata traiettoria risulta di fondamentale importanza per il dimensionamento del sistema di attuazione o viceversa per la scelta della leggi di moto più adatta, dato un certo motore. A questo scopo è conveniente definire alcuni coefficienti adimensionali, che non dipendono dallo spostamento  $h$  o dalla durata  $T$ , ma solo dalla “forma” della traiettoria. Se si indica con  $\dot{q}_{max} = \max_t \{|\dot{q}(t)|\}$  and  $\ddot{q}_{max} = \max_t \{|\ddot{q}(t)|\}$ , è possibile definire

$$\begin{aligned} \text{Coefficiente di velocità} \quad C_v &= \frac{\dot{q}_{max}}{h/T} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{max} = C_v \frac{h}{T} \\ \text{Coefficiente di accelerazione} \quad C_a &= \frac{\ddot{q}_{max}}{h/T^2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{max} = C_a \frac{h}{T^2}. \end{aligned}$$

Poichè la velocità massima non può essere inferiore alla velocità media  $h/T$ ,  $C_v$  sarà certamente maggiore di 1, mentre è possibile dimostrare che  $C_a$  non può essere più piccolo di 4. Dalla definizione segue che i coefficienti  $C_v$ ,  $C_a$  sono i valori massimi di velocità e accelerazione delle corrispondenti traiettorie normalizzate  $q_N(\tau)$ .

Considerando invece i valori efficaci di velocità e accelerazione  $\dot{q}_{eff}$  e  $\ddot{q}_{eff}$ , i

relativi coefficienti sono definiti come

$$C_{v,eff} = \frac{\dot{q}_{eff}}{h/T}, \quad C_{a,eff} = \frac{\ddot{q}_{eff}}{h/T^2}.$$

La seguente tabella mostra i valori numerici di  $C_v$  e  $C_a$ , sia per quanto riguarda i valori massimi che efficaci, di alcune delle principali traiettorie

Traiettoria	$C_v$	$C_a$	$C_{v,eff}$	$C_{a,eff}$
Trapezoidale ( $T = 2T_a$ )	2	4	1.1547	4
Armonica	1.5708	4.9348	1.1107	3.4544
Cicloidale	2	6.2832	1.2247	4.4428
Polinomiale grado 3	1.5	6	1.0954	3.4131
Polinomiale grado 5	1.875	5.7733	1.1952	4.1402
Polinomiale grado 7	2.1875	7.5107	1.2774	5.0452
Trapezoidale modificata	2	4.8881	1.2245	4.3163
Sinusoidale modificata	1.7593	5.5279	1.1689	3.9667
Gutman 1-3	2	5.1296	1.2006	4.2475
Freudenstein 1-3	2	5.3856	1.2106	4.3104
Freudenstein 1-3-5	2	5.0603	1.2028	4.2516

Al fine di evitare un sovraccarico degli attuatori e l'applicazione di sollecitazioni eccessive ai componenti meccanici del sistema e al carico, i coefficienti sopra menzionati dovrebbero essere minimizzati. In generale, è necessario cercare un compromesso, poichè quando minimizzando un coefficiente gli altri generalmente crescono.

## Analisi dinamica nei domini temporale e frequenziale

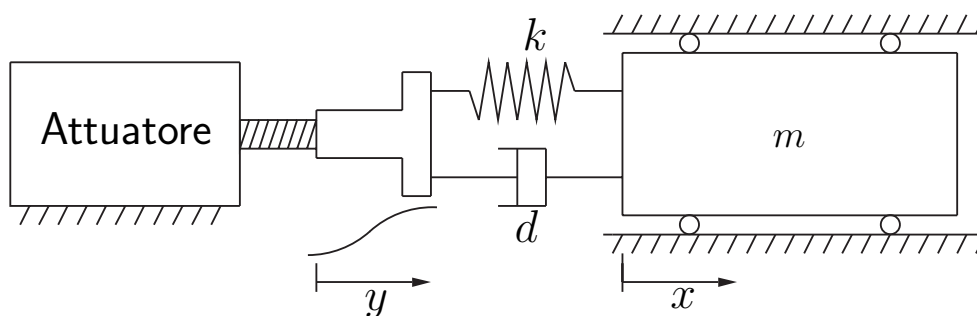
Punto di partenza dell'analisi dinamica di una traiettoria è il modello del sistema meccanico che si deve attuare. Infatti le elasticità strutturali del sistema possono dare luogo all'insorgere di fenomeni vibratori.

Il livello di complessità del modello deve essere scelto in funzione della precisione che si desidera ottenere e dei limiti dei tempi e di costo a cui sottostare.

**Criterio più semplice:** schematizzare gli organi meccanici, che sono intrinsecamente a parametri distribuiti (massa, elasticità), con elementi a parametri concentrati, ossia elementi di massa privi di elasticità ed elementi elastici privi di massa. Si introducono quindi elementi di dissipazione di energia cinetica (smorzatori) per considerare fenomeni di attrito tra le parti in movimento.

I valori dei parametri che descrivono le inerzie, le elasticità e i fenomeni dissipativi devono essere determinati cercando di mantenere al meglio l'equivalenza dell'energia cinetica ed elastica degli elementi del modello con quelli dei corrispondenti organi del meccanismo. La descrizione del meccanismo potrà risultare lineare oppure non lineare.

• **Esempio.** Si considera un sistema lineare a parametri concentrati composto da una massa  $m$ , una molla con costante elastica  $k$  e uno smorzatore  $d$  che tiene in conto dell'energia dissipata per attrito, come riportato nella seguente figura.



Detta  $x(t)$  la posizione della massa  $m$ , e  $y(t)$  l'input di posizione del meccanismo, cioè la posizione del sistema di attuazione, e indicato con  $z = x - y$ , la

dinamica del sistema è descritta dall'equazione differenziale :

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + k x = d \dot{y} + k y$$

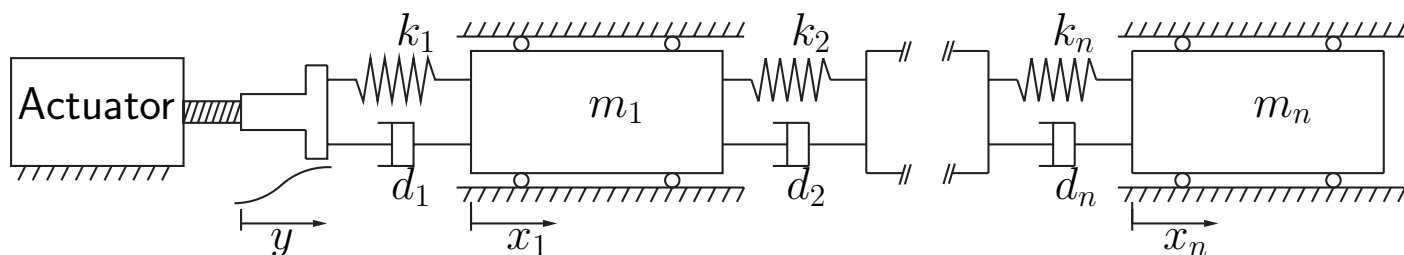
da cui

$$m \ddot{z} + d \dot{z} + k z = -m \ddot{y}$$

ovvero

$$\ddot{z} + 2 \delta \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y}, \quad \text{con} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{d}{2m\omega_n}$$

Modelli più complessi, e più vicini al comportamento di sistemi a parametri distribuiti, possono essere ottenuti prendendo in considerazione  $n$  parametri concentrati (anzichè uno), come mostrato nella figura seguente.



Applicando direttamente ai modelli appena visti i profili delle traiettorie presentate precedentemente e supponendo che il sistema di attuazione sia ideale e quindi

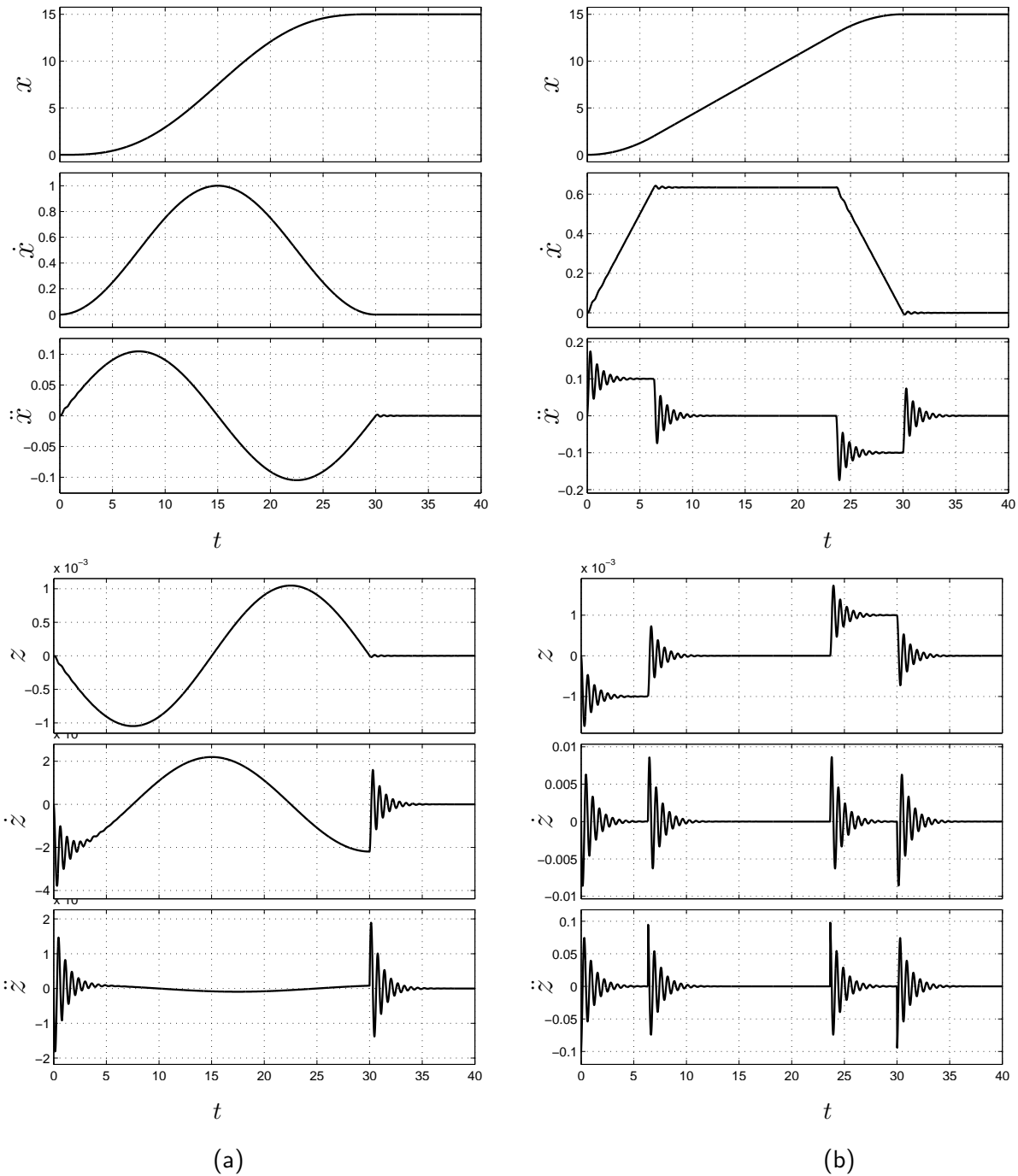
$$y(t) = q(t)$$

è possibile valutare il comportamento delle diverse leggi di moto e come queste influiscono sulla risposta del sistema.

Ad esempio, considerando il modello a 1 gdl con

$$m = 1, \quad d = 2, \quad k = 100 \quad \implies \quad \omega_n = 10, \quad \delta = 0.1.$$

la risposta del sistema a una traiettoria cicloidale e a una traiettoria trapezoidale (con  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 15$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 30$ ) sono quelle riportate nella seguente figura (cicloidale (a), trapezoidale (b)).



E' evidente come la traiettoria trapezoidale, che presenta una discontinuità di accelerazione, generi maggiori oscillazioni di quella cicloidale che invece ha un profilo di accelerazione continuo. Questa osservazione è vera in generale, ovvero traiettorie con un maggior grado di continuità generano un livello di oscillazioni più basso.

Un' analisi di questo fenomeno può essere intrapresa in maniera più rigorosa studiando il contenuto armonico del profilo di accelerazione  $\ddot{y}$ , in relazione ai diagrammi di Bode relativi alla struttura stessa, e in particolare alla pulsazione naturale  $\omega_n$ .

Strumento principe di questo tipo di analisi è la **Trasformata di Fourier** che permette di esprimere un generico segnale reale  $x(t)$  come la “sommatoria” di un numero infinito di termini sinusoidali aventi ampiezza  $V(\omega)$  e fase  $\varphi(\omega)$

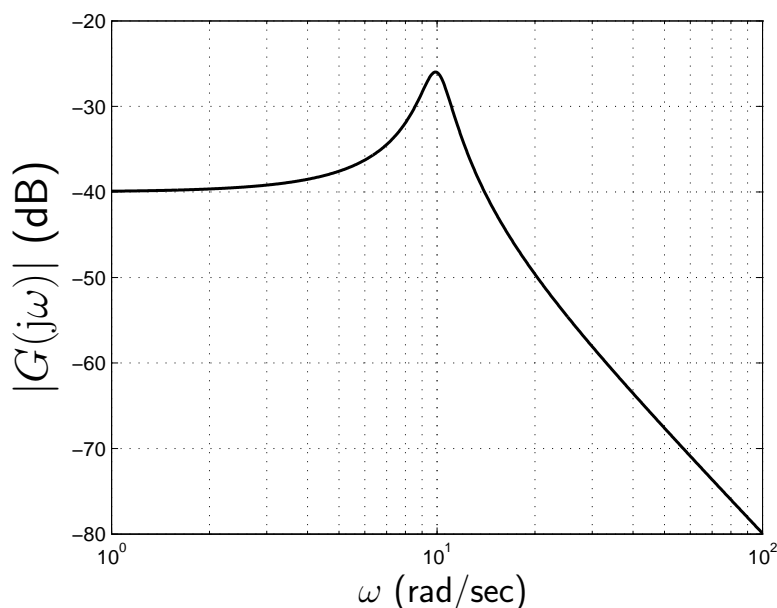
$$x(t) = \int_0^{+\infty} V(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

E' possibile confrontare l'ampiezza  $V(\omega)$  alle varie frequenze con il modulo della risposta armonica del sistema (diagramma di Bode delle ampiezze) per verificare come il sistema meccanico sia sollecitato. In particolare occorre evitare che i modi di risonanza della struttura meccanica (tipicamente collocati ad alta frequenza) siano eccitati dall'ingresso (nel nostro caso la traiettoria in esame).

• **Esempio.** Con riferimento al sistema meccanico a 1 gdl precedentemente introdotto, si assumano i seguenti valori dei parametri  $m = 1$ ,  $d = 2$ ,  $k = 100$ . La funzione di trasferimento del sistema tra l'accelerazione  $\ddot{y}(t)$  e l' “errore”  $z(t) = x(t) - y(t)$ , risulta

$$G(s) = \frac{Z(s)}{A(s)} = \frac{-1}{s^2 + d/m s + k/m}$$

dove  $A(s)$  è la trasformata di Laplace dell'accelerazione e  $Z(s)$  la trasformata di Laplace di  $z(t)$ . Il corrispondente diagramma di Bode delle ampiezze è riportato nella seguente figura



In questo modo, al fine di evitare delle vibrazioni (ovvero valori elevato dell' "errore"  $z$ ) la pulsazione massima della traiettoria deve essere significativamente inferiore alla pulsazione di risonanza  $\omega_r \approx 10$  (alla quale l'ampiezza della risposta in frequenza ha un picco).

Al fine di confrontare le traiettorie tra di loro e con le caratteristiche del sistema considerato viene ora analizzato il contenuto armonico (spettro) delle traiettorie fin qui prese in considerazione (**si considera sempre il profilo di accelerazione**). Per talune tale spettro è fornito in forma chiusa per altre calcolato numericamente ed espresso graficamente. In quest'ultimo caso, per poter effettuare un confronto sono state considerate traiettorie in forma normalizzata, cioè con  $h = 1$  e  $T = 1$ . Inoltre gli spettri sono espressi in funzione della variabile adimensionale  $\Omega$  definita come

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

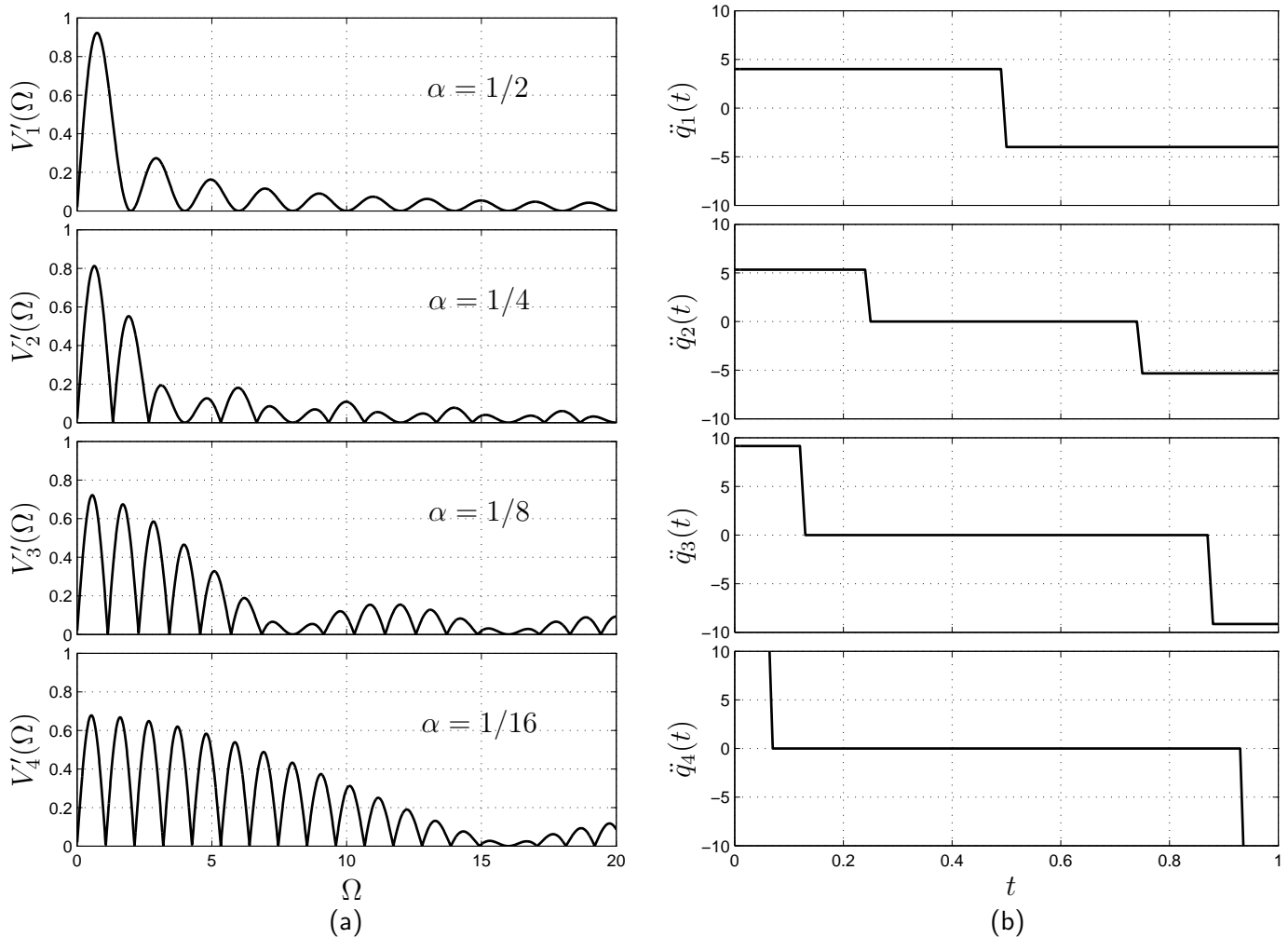
Perciò la funzione che descrive il contenuto armonico del profilo di accelerazione di una data traiettoria è

$$V'(\Omega) = V(\omega) \Big|_{\omega = \omega_0 \Omega}. \quad (16)$$

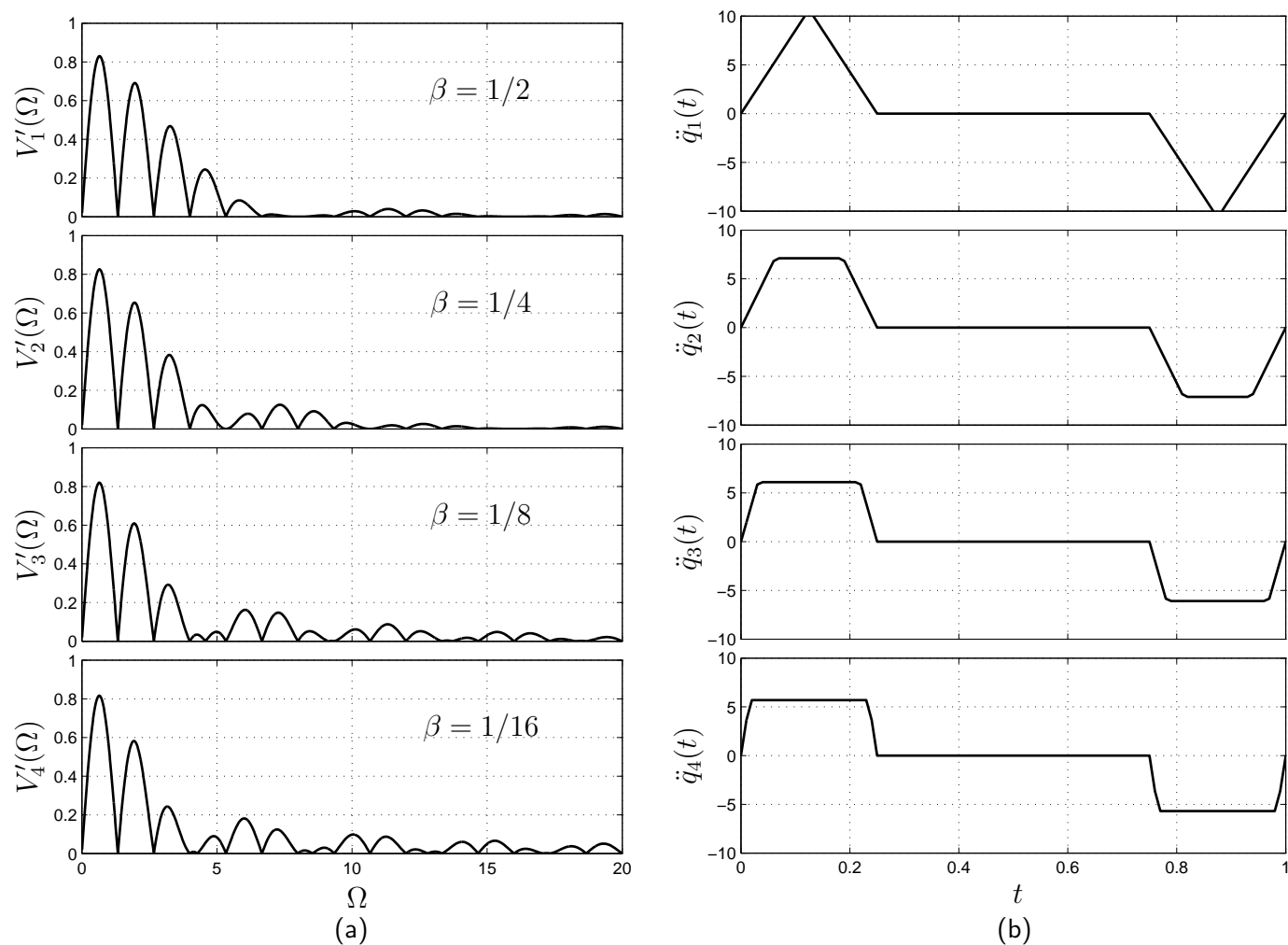
Traiettoria	Espressione dello spettro
Armonica	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{2\Omega}{1 - 4\Omega^2}  \cos(\pi\Omega) $
Cicloidale	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{2}{\pi(1 - \Omega^2)}  \sin(\pi\Omega) $
Polinomiale grado 3	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{6}{\pi^3 \Omega^2} \sqrt{1 + \pi^2 \Omega^2}  \sin(\pi\Omega) $
Polinomiale grado 5	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{30}{\pi^5 \Omega^4} \sqrt{9 + 4\pi^2 \Omega^2 + \pi^4 \Omega^4}  \sin(\pi\Omega) $
Trapezoidale	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{2}{(1 - \alpha)\alpha\pi^2 \Omega} \left  \sin((1 - \alpha)\pi\Omega) \sin(\alpha\pi\Omega) \right $
Doppia S	$V'(\Omega) = \frac{h}{T} \frac{2}{\alpha^2 \beta (1 - \alpha)(1 - \beta)\pi^3 \Omega^2} \left  \sin((1 - \alpha)\pi\Omega) \sin(\alpha(1 - \beta)\pi\Omega) \sin(\alpha\beta\pi\Omega) \right $



Nella figura seguente è mostrato lo spettro della traiettoria trapezoidale (a sinistra) al variare del parametro  $\alpha$  (e di conseguenza dell'accelerazione massima, si vedano i grafici di destra). Man mano che  $\alpha$  diminuisce e quindi l'accelerazione tende a diventare sempre più impulsiva le componenti armoniche che descrivono il profilo di accelerazione si spostano verso frequenze via via più alte.

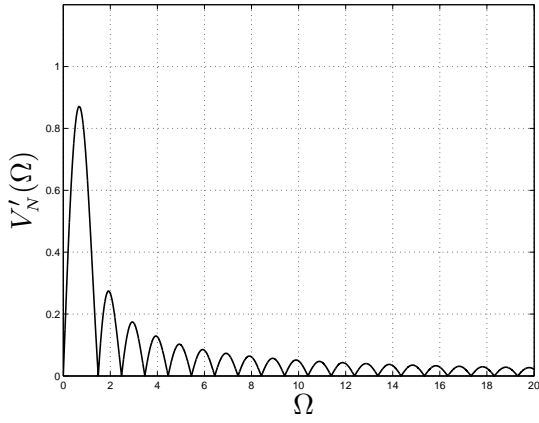


Nella figura seguente invece è mostrato il contenuto armonico del profilo di accelerazione della traiettoria doppia S, con  $\alpha$  costante e uguale a  $1/4$  e  $\beta$  variabile. In questo caso si nota come al diminuire di  $\beta$ , e cioè al crescere del valore del jerk, lo spettro tenda a diventare sempre più simile a quello della traiettoria trapezoidale che rappresenta il caso limite (con jerk infinito)

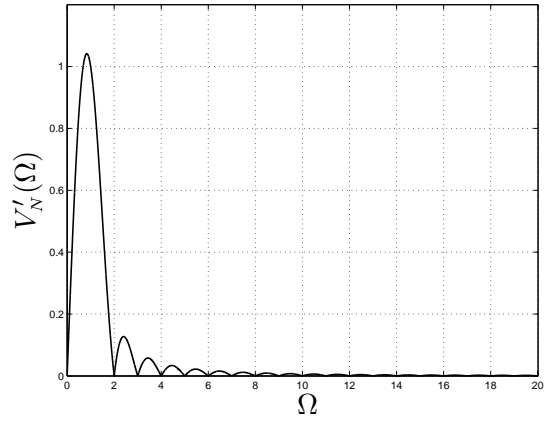


Il contenuto armonico del profilo di accelerazione di tutte le traiettorie prese in considerazione sono mostrate nella pagina seguente (dove il pedice  $N$  ricorda che si tratta di traiettorie normalizzate).

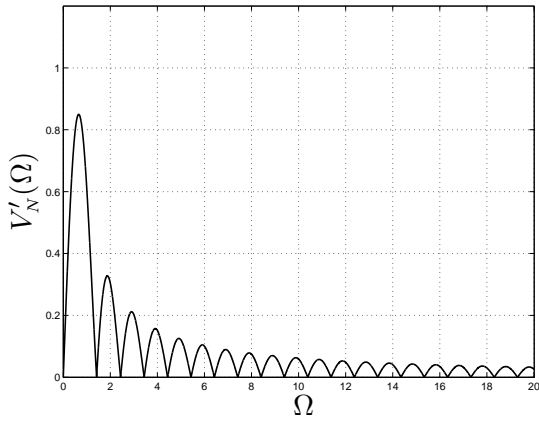
Armonica



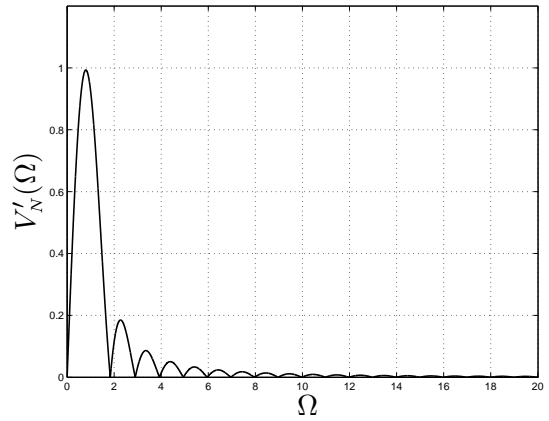
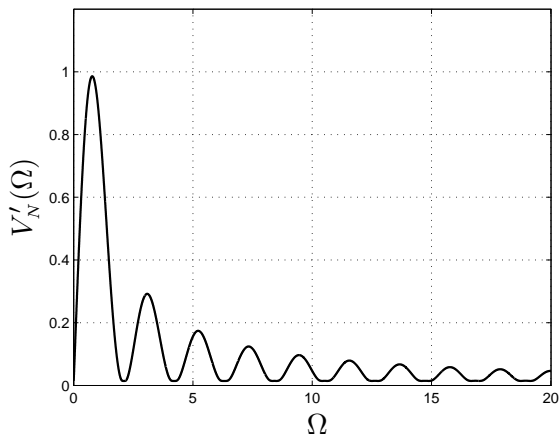
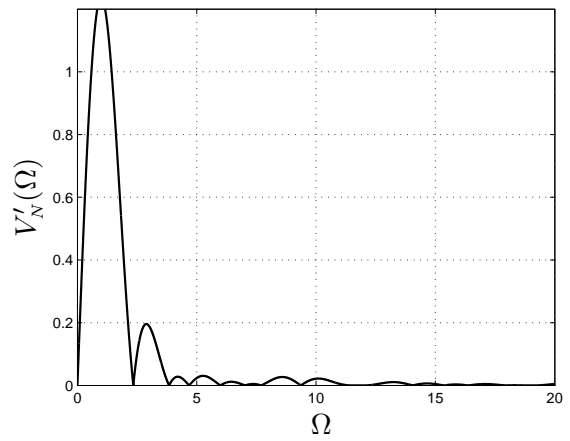
Cicloidale



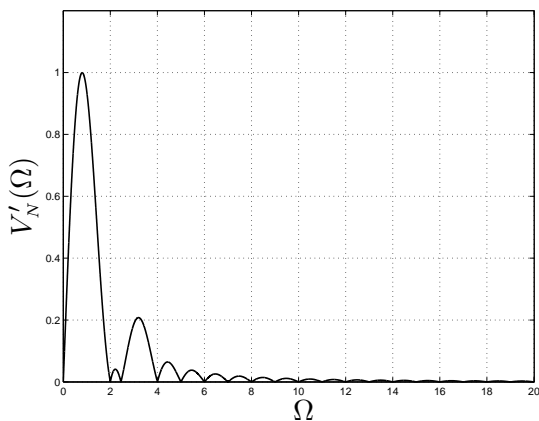
Polinomiale grado 3



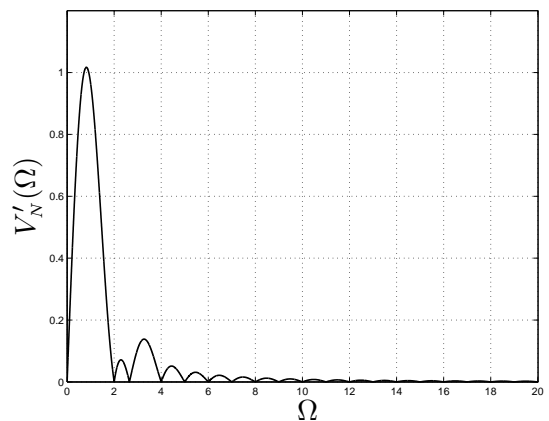
Polinomiale grado 5

Trapezoidale ( $\alpha = 1/3$ )Doppia S ( $\alpha = 1/3, \beta = 1/2$ )

Gutman 1-3



Freudenstein 1-3



Nel caso, peraltro diffuso in ambito industriale, in cui la traiettoria da inseguire sia sempre la stessa, la legge di moto (e quindi il profilo di accelerazione relativo) consiste in una ripetizione periodica di una funzione di base che avrà una certa durata  $T$ . Con riferimento all'accelerazione

$$\ddot{q}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ddot{q}(t - kT).$$

Essendo  $\ddot{q}(t)$  periodica, il suo contenuto armonico dovrà essere analizzato utilizzando l'espansione in **serie di Fourier**:

$$\ddot{q}(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

dove  $v_k$  e  $\varphi_k$  sono rispettivamente l'ampiezza e la fase della componente armonica a pulsazione  $k\omega_0 = k2\pi/T$ .

Dalla relazione tra  $v_k$  e la Trasformata di Fourier di  $\ddot{q}(t)$  è possibile ottenere lo spettro della funzione periodica da  $V(\omega)$  del corrispondente movimento aperiodico:

$$v_k = \frac{2\pi}{T} V(k\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

In particolare considerando la variabile adimensionale  $\Omega = \omega/\omega_0$ , si può scrivere

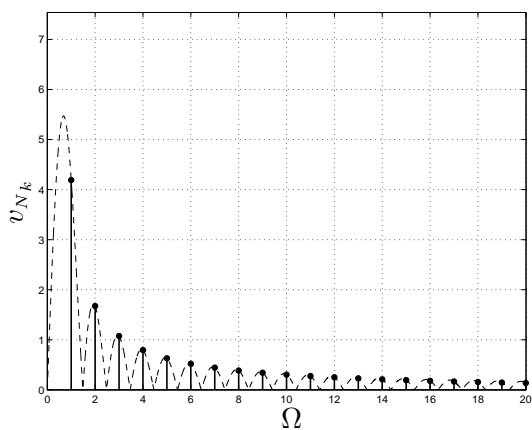
$$v_k = \frac{2\pi}{T} V'(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

e prendendo in esame traiettorie normalizzate (i cui coefficienti verranno indicati con  $v_{Nk}$  mentre lo spettro con  $V'_N(\Omega)$ ),

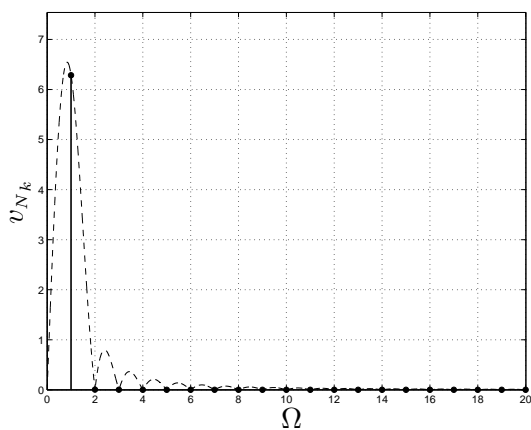
$$v_k = \frac{h}{T} v_{Nk}, \quad \text{con} \quad v_{Nk} = \frac{2\pi}{T} V'_N(k).$$

Per cui, a meno di un fattore moltiplicativo, è sufficiente campionare con periodo 1, gli spettri mostrati nella figura precedente, per ottenere le componenti spettrali delle funzioni periodiche corrispondenti (si veda la figura seguente).

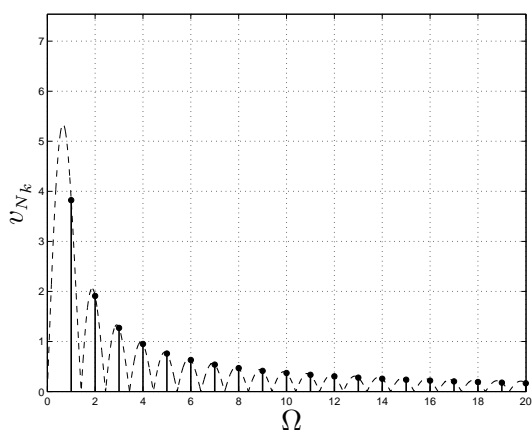
Armonica



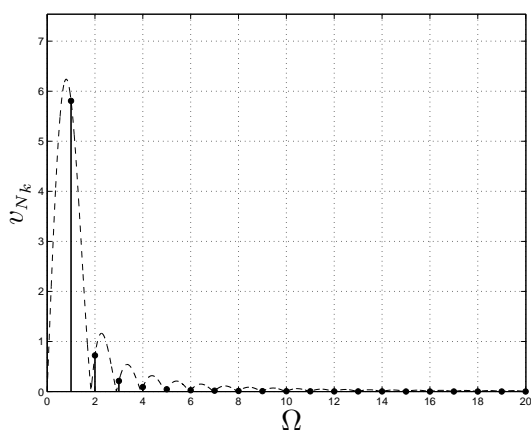
Cicloidale



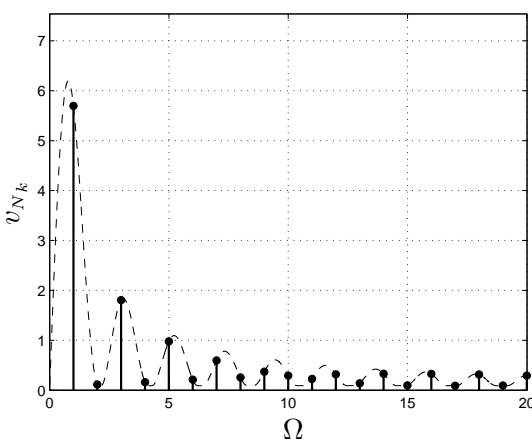
Polinomiale grado 3



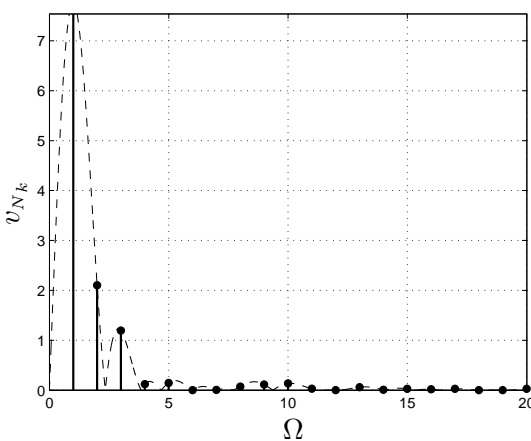
Polinomiale grado 5



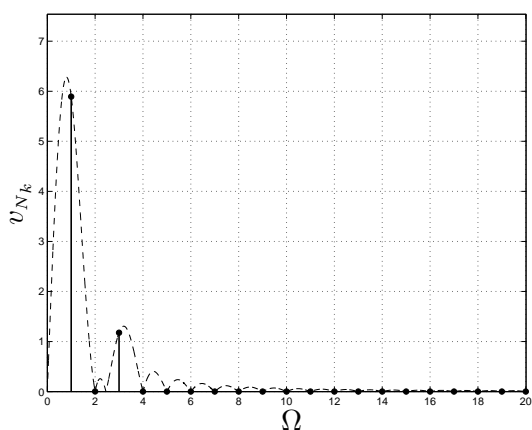
Trapezoidale ( $\alpha = 1/3$ )



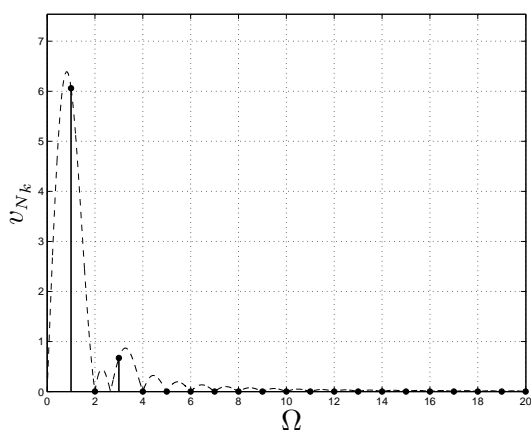
Doppia S ( $\alpha = 1/3, \beta = 1/2$ )



Gutman 1-3



Freudenstein 1-3



Gli spettri delle accelerazioni mostrati nelle pagine precedenti (sia per funzioni aperiodiche che per funzioni periodiche) sono stati ottenuti con  $h = 1$ ,  $T = 1$  e in funzione della variabile adimensionale  $\Omega$ . Invertendo la (16), lo spettro reale può essere facilmente dedotto:

$$V(\omega) = V'(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T/2\pi} = \frac{h}{T} V'_N(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T/2\pi} .$$

Perciò lo spettro delle ampiezze  $V$  del profilo di accelerazione di una traiettoria generica può essere ottenuto scalando di un fattore  $h$  lo spettro  $V'_N$  della corrispondente traiettoria normalizzata. La durata della traiettoria ha un duplice effetto sul suo spettro:

1. l'ampiezza di  $V'_N$  viene scalata di  $1/T$ ;
2. le pulsazioni sono scalate di  $T$  (nota che  $\Omega$  è proporzionale a  $\omega T$ ).

Data una generica legge di moto  $q(t)$  di durata  $T$  e caratterizzata da uno spettro dell'accelerazione  $V(\omega)$ , la traiettoria ottenuta scalando  $q(t)$ , cioè

$$q'(t') = q(t) \Big|_{t = \lambda t'}, \quad t' \in [0, T'], \quad \text{con } T' = \frac{T}{\lambda}$$

è caratterizzata da uno spettro  $V_\lambda(\omega)$  legato a  $V(\omega)$  da

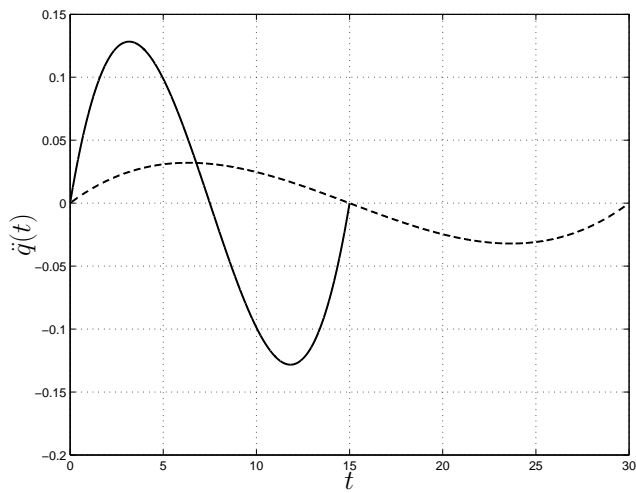
$$V_\lambda(\omega) = \lambda V(\omega/\lambda) .$$

Perciò, se  $\lambda < 1$  (cioè il movimento viene rallentato), non solo l'intervallo frequenziale ma anche le ampiezze, cioè  $V_\lambda$ , sono ridotte. E' perciò possibile calcolare il valore di  $\lambda$  in modo da rendere trascurabili le componenti armoniche del profilo di accelerazione al di sopra di una certa frequenza  $\bar{\omega}$ .

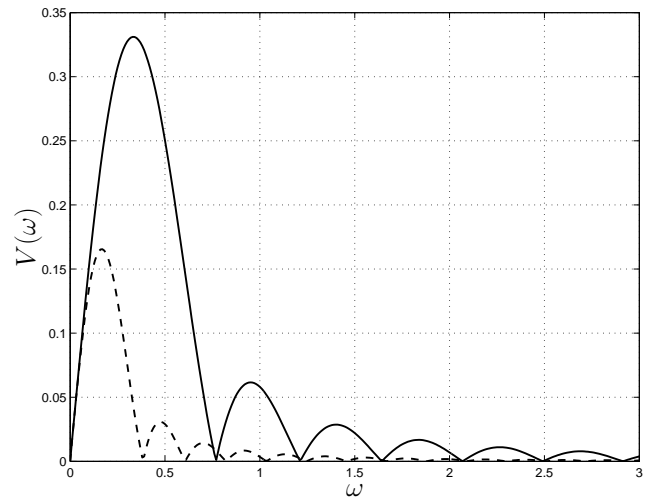
• **Esempio.** Si consideri una traiettoria polinomiale di grado 5, definita per

$$q_0 = 10, \quad q_1 = 15, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 15, \quad T = t_1 - t_0 = 15.$$

Considerando  $\lambda = 0.5$  la traiettoria scalata ha una durata  $T' = T/\lambda = 30$ . I due profili di accelerazione sono mostrati nella seguente figura (a), insieme al corrispondente contenuto armonico (b).



(a)



(b)