

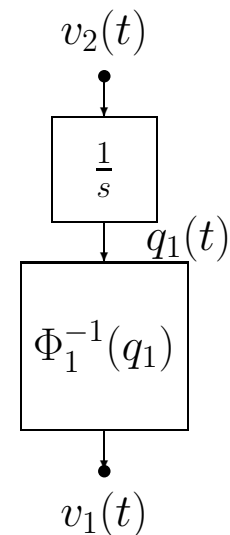
Modellistica dinamica di sistemi fisici

- Nella realtà fisica esistono vari ambiti energetici, per esempio:
 - meccanico (traslazionale e rotazionale)
 - elettrico-magnetico
 - idraulico
 - termico (\simeq)
- Pur essendo molto diversi fra loro, questi ambiti energetici hanno una struttura dinamica molto simile. Infatti, ogni ambito energetico è essenzialmente caratterizzato da:
 - **2 elementi “dinamici”** \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 che accumulano energia;
 - **1 elemento “statico”** \mathcal{R} che dissipa (o genera) energia;
 - **2 variabili “energia”** $q_1(t)$ e $q_2(t)$ che caratterizzano completamente l’energia accumulata nei due elementi dinamici;
 - **2 variabili “di potenza”** $v_1(t)$ e $v_2(t)$ che permettono all’energia di spostarsi all’interno del sistema dinamico;
- Il prodotto $p(t) = v_1(t)v_2(t)$ ha il significato fisico di “potenza istantanea” che attraversa la “porta energetica” caratterizzata dalle 2 variabili di potenza $v_1(t)$ e $v_2(t)$.
- Gli elementi dinamici \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 sono “duali” fra di loro: le loro equazioni dinamiche differiscono solamente per una inversione dei pedici “1” e “2” che le caratterizzano.

- L'elemento dinamico \mathcal{D}_1 è caratterizzato:

- 1) dalla variabile interna $q_1(t)$;
- 2) dalla variabile di ingresso $v_2(t)$;
- 3) dalla variabile di uscita $v_1(t)$;
- 4) da una *relazione costitutiva* $\Phi_1(v_1)$ che lega la variabile interna q_1 alla variabile di uscita v_1 :

$$q_1 = \Phi_1(v_1) \quad \leftrightarrow \quad v_1 = \Phi_1^{-1}(q_1)$$



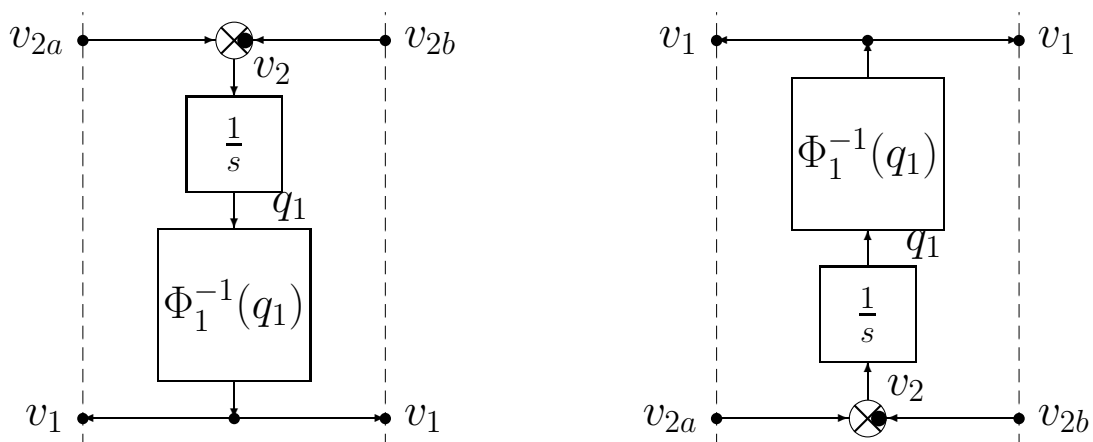
- 5) da un'equazione differenziale che lega la variabile interna q_1 alla variabile di ingresso v_2 :

$$\frac{dq_1}{dt} = v_2 \quad \leftrightarrow \quad dq_1 = v_2 dt$$

- 6) da una funzione di energia $E_1(q_1)$ che è funzione della sola variabile interna q_1 :

$$E_1 = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v_1 v_2 dt = \int_0^{q_1} \Phi_1^{-1}(q_1) dq_1 = E_1(q_1)$$

- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:

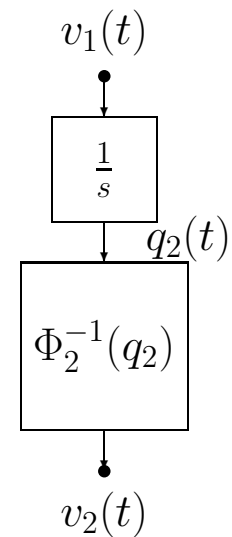


In questo caso la potenza entrante è $p_e(t) = v_{2a} v_1$ e la potenza uscente è $p_u(t) = v_{2b} v_1$.

- L'elemento dinamico \mathcal{D}_2 è caratterizzato:

- 1) dalla variabile interna $q_2(t)$;
- 2) dalla variabile di ingresso $v_1(t)$;
- 3) dalla variabile di uscita $v_2(t)$;
- 4) da una *relazione costitutiva* $\Phi_2(v_2)$ che lega la variabile interna q_2 alla variabile di uscita v_2 :

$$q_2 = \Phi_2(v_2) \quad \leftrightarrow \quad v_2 = \Phi_2^{-1}(q_2)$$



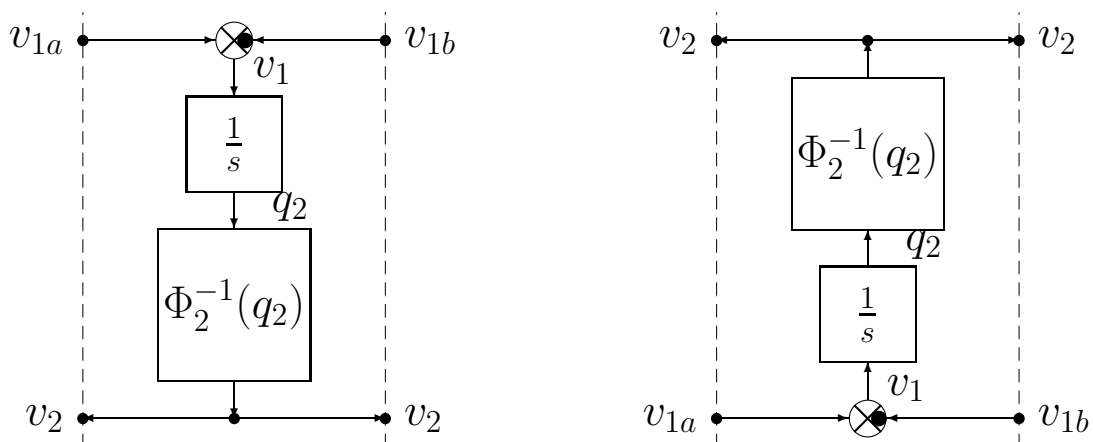
- 5) da un'equazione differenziale che lega la variabile interna q_2 alla variabile di ingresso v_1 :

$$\frac{dq_2}{dt} = v_1 \quad \leftrightarrow \quad dq_2 = v_1 dt$$

- 6) da una funzione di energia $E_2(q_2)$ che è funzione della sola variabile interna q_2 :

$$E_2 = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v_1 v_2 dt = \int_0^{q_2} \Phi_2^{-1}(q_2) dq_2 = E_2(q_2)$$

- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:



In questo caso la potenza entrante è $p_e(t) = v_{2a} v_1$ e la potenza uscente è $p_u(t) = v_{2b} v_1$.

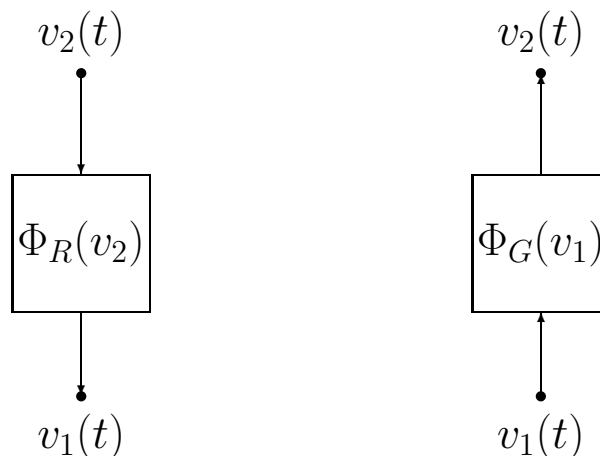
- L'elemento statico \mathcal{R} è caratterizzato solamente da una *relazione costitutiva* Φ_R che lega fra loro le variabili di potenza v_1 e v_2 :

$$v_1 = \Phi_R(v_2) \quad \leftrightarrow \quad v_2 = \Phi_G(v_1)$$

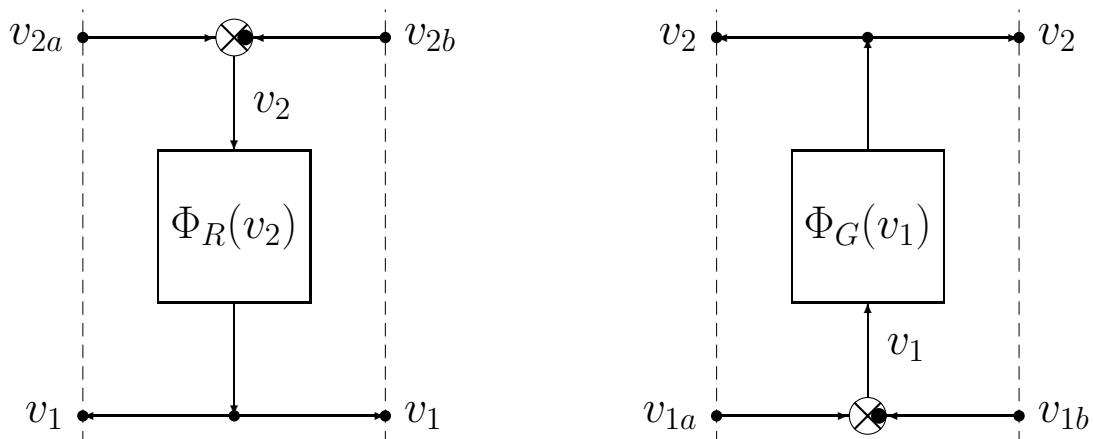
Le funzioni $\Phi_R(\cdot)$ e $\Phi_G(\cdot)$ sono una l'inverso dell'altra:

$$\Phi_G(v_1) = \Phi_R^{-1}(v_1) \quad \leftrightarrow \quad \Phi_R(v_2) = \Phi_G^{-1}(v_2)$$

Questo elemento può essere orientato in entrambi i modi:



- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:



- La potenza istantanea $p(t)$ dissipata (o generata) dall'elemento statico \mathcal{R} è data semplicemente dal prodotto delle due variabili di potenza:

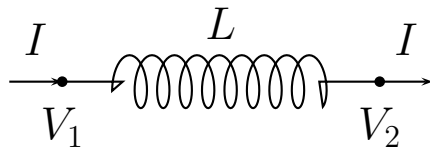
$$p(t) = v_1(t)v_2(t) = \Phi_R(v_2) v_2 = v_1 \Phi_R^{-1}(v_1)$$

• Ambito energetico: elettromagnetico

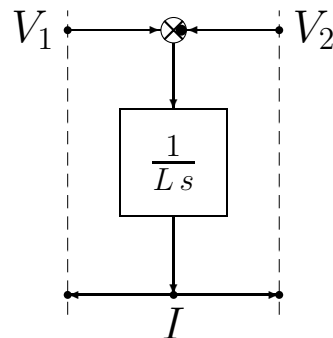
	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	C Capacità			
q_1	Q carica	$Q = \Phi_C(V)$	$Q = C V$	$\frac{dQ}{dt} = I$
v_1	V tensione			
\mathcal{D}_2	L Induttanza			
q_2	ϕ flusso	$\phi = \Phi_L(I)$	$\phi = L I$	$\frac{d\phi}{dt} = V$
v_2	I corrente			
\mathcal{R}	R Resistenza	$V = \Phi_R(I)$	$V = R I$	

Elementi dinamici lineari

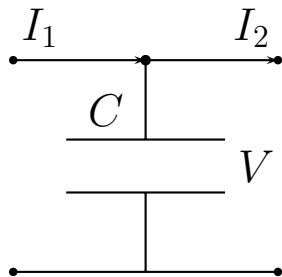
• Induttanza ($\phi = L I$):



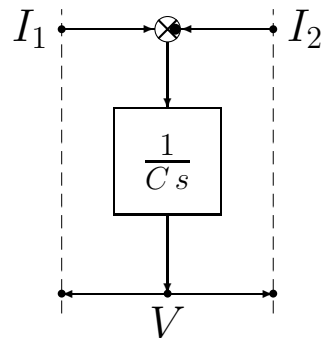
$$\frac{d}{dt} [L I] = V_1 - V_2$$



• Capacità ($Q = C V$):



$$\frac{d}{dt} [C V] = I_1 - I_2$$



- Ambito energetico: **meccanico traslazionale:**

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	M Massa			
q_1	P quantità di moto	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M \dot{x}$	$\frac{dP}{dt} = F$
v_1	\dot{x} velocità			
\mathcal{D}_2	E Elasticità			
q_2	x spostamento	$x = \Phi_E(F)$	$x = E F$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
v_2	F forza			
\mathcal{R}	b Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b \dot{x}$	

- Ambito energetico: **meccanico rotazionale:**

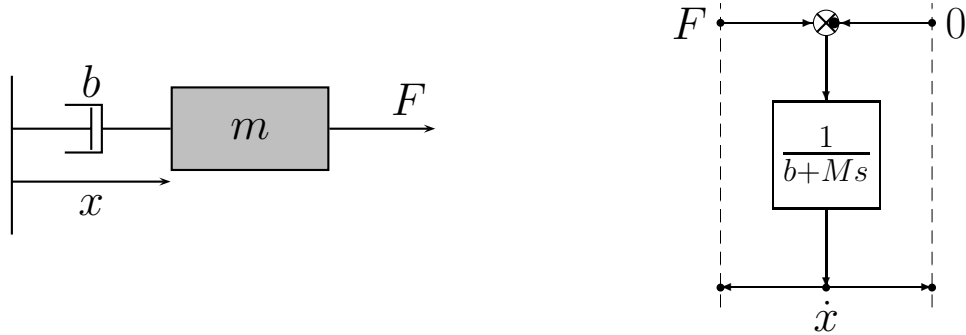
	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	J Inerzia			
q_1	P momento ang.	$P = \Phi_J(\omega)$	$P = J \omega$	$\frac{dP}{dt} = \tau$
v_1	ω velocità ang.			
\mathcal{D}_2	E Elasticità tors.			
q_2	θ spostamento ang.	$\theta = \Phi_E(\tau)$	$\theta = E \tau$	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$
v_2	τ coppia			
\mathcal{R}	b Dissipatore	$\tau = \Phi_b(\omega)$	$\tau = b \omega$	

- Ambito energetico: **idraulico**

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	C_I Capacità idrau.			
q_1	V volume	$V = \Phi_C(P)$	$V = C_I P$	$\frac{dV}{dt} = Q$
v_1	P pressione			
\mathcal{D}_2	L_I Induttanza idrau.			
q_2	ϕ_I flusso idrau.	$\phi_I = \Phi_L(Q)$	$\phi_I = L_I Q$	$\frac{d\phi_I}{dt} = P$
v_2	Q portata volumetrica			
\mathcal{R}	R Resistenza idrau.	$P = \Phi_R(Q)$	$P = R_I Q$	

Esempi

- Sistema massa-smorzatore.

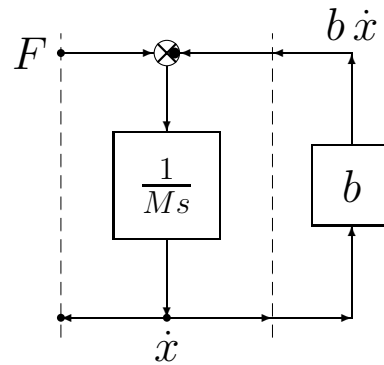


- Infatti, dal modello dinamico si ricava:

$$M \frac{d\dot{x}}{dt} = F - b \dot{x}$$

da cui

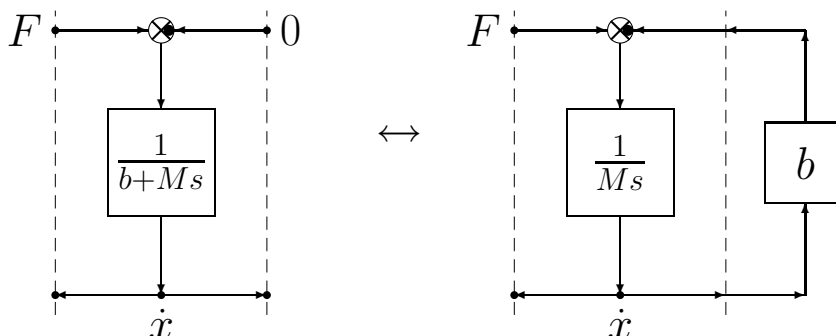
$$\dot{X}(s) = \frac{1}{Ms + b} F(s)$$



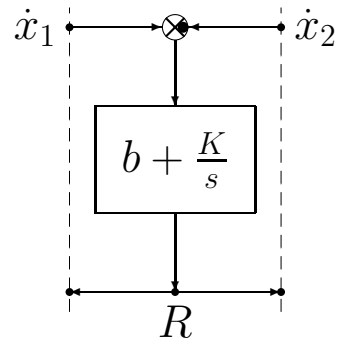
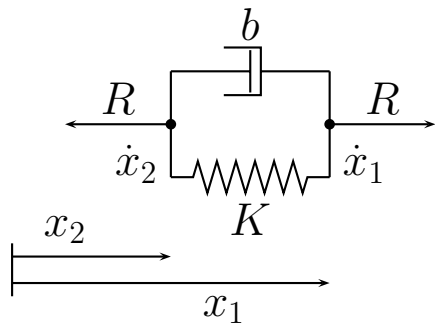
- Oppure applicando la formula di Mason si ha che:

$$G(s) = \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{Ms}}{1 + \frac{b}{Ms}} = \frac{1}{b + Ms}$$

- Quindi i due seguenti schemi sono equivalenti:



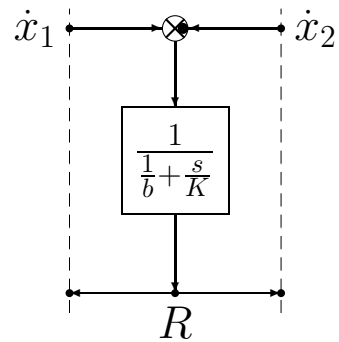
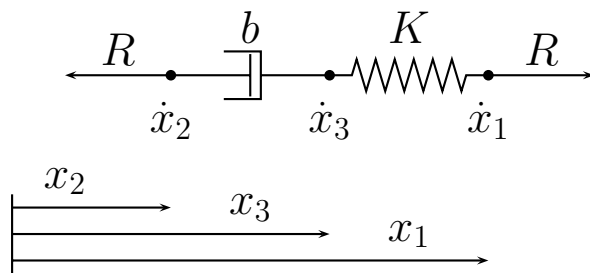
- Sistema molla-smorzatore (parallelo):



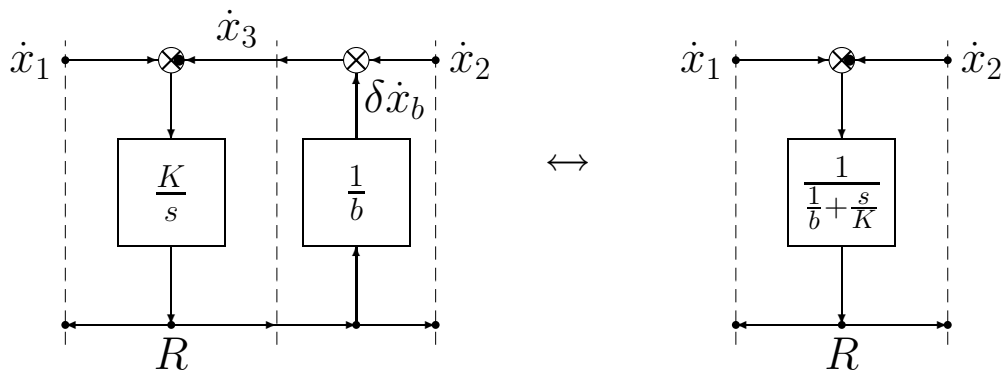
- Infatti, in questo caso, il modello dinamico è:

$$R = K(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad \rightarrow \quad R(s) = \left(\frac{K}{s} + b \right) [\dot{X}_1(s) - \dot{X}_2(s)]$$

- Sistema molla-smorzatore (serie):

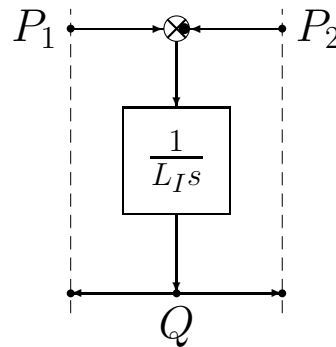
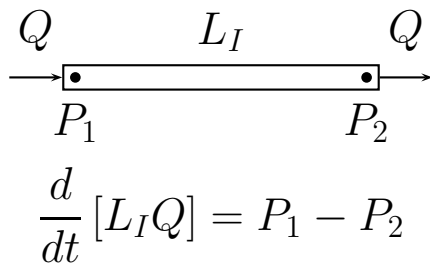


- Infatti, i due seguenti schemi sono equivalenti:

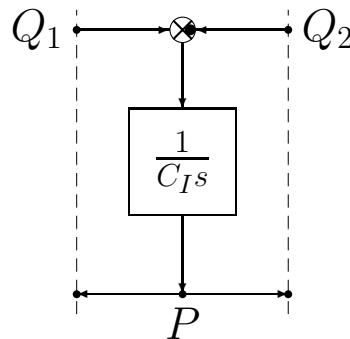
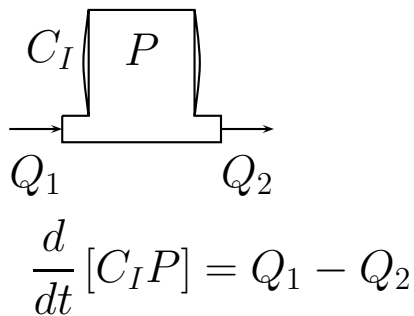


Idraulica: elementi dinamici lineari

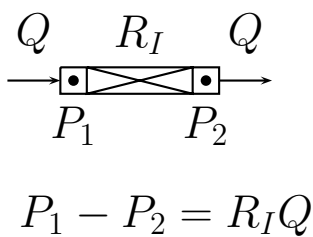
- Induttanza idraulica:



- Capacità idraulica:



- Resistenza idraulica:



oppure

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R_I}$$

