

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

# **GENERAZIONE DEL RIFERIMENTO**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

# Pianificazione delle traiettorie

---

- I segnali di riferimento tipicamente utilizzati nel campo dei controlli sono quelli caratterizzati da trasformate di Laplace elementari
  - riferimento a gradino, a rampa, a parabola, ...
  - riferimento di tipo sinusoidale
- Nella pratica industriale tali segnali non possono essere utilizzati, ma i riferimenti da inseguire devono essere scelti in maniera opportuna al fine di:
  - evitare il raggiungimento di saturazioni nel sistema di attuazione
  - evitare di sollecitare in maniera eccessiva la struttura (impianto, carico, ecc.)

# Pianificazione delle traiettorie

---

- **Pianificare una traiettoria** significa stabilire le modalità con cui il movimento dal punto iniziale al punto finale deve avvenire, ovvero con quali profili di posizione, velocità accelerazione.
- In tutti i dispositivi caratterizzati da un'attuazione elettrica (si pensi in particolare all'ambito delle macchine automatiche) la corretta pianificazione di traiettorie è una problematica particolarmente sentita per una serie di fattori:
  - richieste di prestazioni sempre più elevate (massime velocità e accelerazioni, minima durata)
  - aumento del numero di attuatori elettrici all'interno dello stesso sistema
  - macchinari e dispositivi sempre più leggeri (flessibilità ed elasticità strutturali)
  - disponibilità di dispositivi di supervisione e controllo dotati di capacità di calcolo elevate.

# Traiettorie nello spazio di giunto

---

- Classificazione delle traiettorie nello “spazio di giunto” (ovvero nel caso monodimensionale di un singolo attuatore):
  - Traiettorie polinomiali
  - Traiettorie trigonometriche
  - Traiettorie per sviluppo in serie di Fourier
  - Traiettorie composte
  - Traiettorie spline

# Traiettorie polinomiali

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n$$

- Il grado  $n$  (e il conseguente numero di coefficienti  $a_i$ ) dipende dal numero di condizioni al contorno che si desidera soddisfare e dal grado di "dolcezza" che si intende ottenere ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ):
- A ciascuna delle condizioni al contorno corrisponderà un'equazione del tipo

$$k!a_k + (k+1)!a_{k+1}t_j + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}a_n t_j^{n-k} = q^{(k)}(t_j)$$

Istante considerato  
Valore desiderato della derivata k-esima

- Raccogliendo tutte le equazioni si ottiene un sistema matriciale dalla cui soluzione è possibile dedurre i coefficienti  $a_i$

$$M a = b$$

$M$ : matrice nota, di dimensioni  $(n+1) \times (n+1)$   
 $b$ : vettore dei termini noti ( $n+1$  condizioni da imporre)  
 $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ : vettore dei parametri incogniti da calcolare

# Traiettorie polinomiali

- Noti i parametri  $a_i$ , il calcolo della traiettoria è elementare
- Il calcolo delle sue derivate fino all'ordine desiderato è semplice

Posizione:  $q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n$

Velocità:  $v(t) = \dot{q}(t) = a_1 + 2a_2(t - t_0) + \dots + na_n(t - t_0)^{n-1}$

Accelerazione:  $a(t) = \ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3(t - t_0) + \dots + n(n-1)a_n(t - t_0)^{n-2}$

Jerk:  $j(t) = \dddot{q}(t) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(t - t_0)^{n-3}$

Snap:  $\dots$

- La derivata di traiettorie polinomiali, da un certo ordine in poi, è nulla

# Traiettorie polinomiali

- **Esempio:** traiettoria cubica per 2 punti
- Si supponga che siano specificate le seguenti condizioni al contorno:
  - un istante iniziale e un istante finale  $t_0$  e  $t_1$
  - posizione e velocità iniziale  $q_0$  e  $\dot{q}_0$
  - posizione e velocità iniziale  $q_1$  e  $\dot{q}_1$
- Si hanno quattro condizioni al contorno, per rispettare le quali occorre un polinomio di grado almeno pari a tre (cubico):

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3$$

- Imponendo le condizioni al contorno

$$q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = v_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad \dot{q}(t_1) = v_1$$

si ottiene l'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_1 - t_0) & (t_1 - t_0)^2 & (t_1 - t_0)^3 \\ 0 & 1 & 2(t_1 - t_0) & 3(t_1 - t_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ q_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

# Traiettorie polinomiali

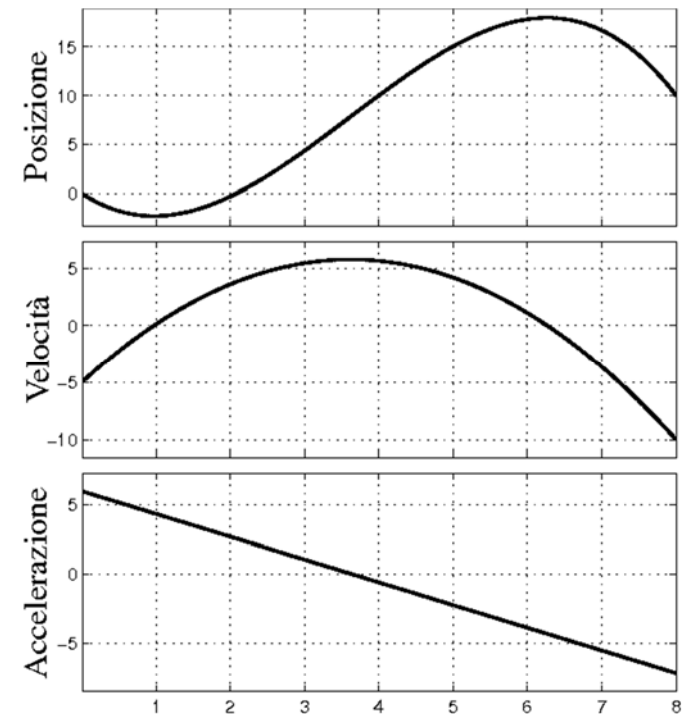
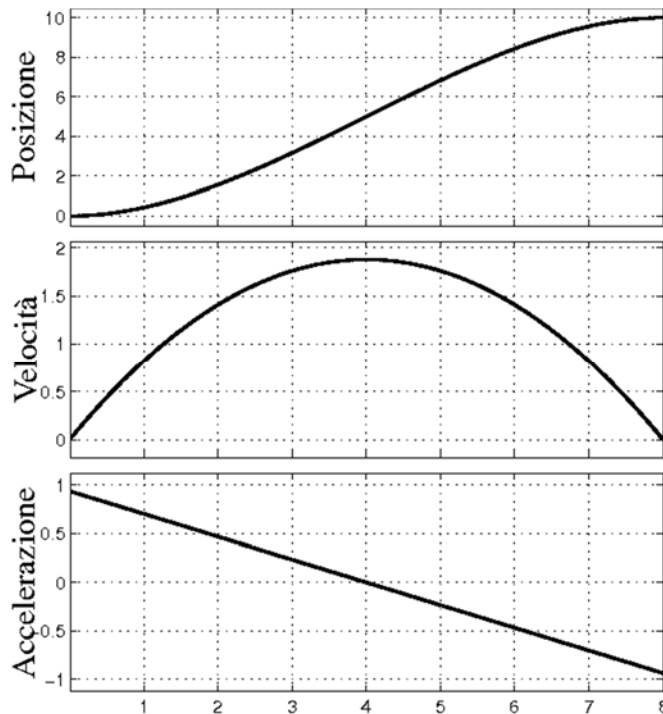
- Risolvendo il sistema si ottengono i seguenti valori dei coefficienti

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \frac{-3(q_0 - q_1) - (2v_0 + v_1)T}{T^2} \\ a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (v_0 + v_1)T}{T^3} \end{cases}$$

$$T = t_1 - t_0$$

$$q_0 = 0, q_1 = 10, t_0 = 0, t_1 = 8, v_0 = v_1 = 0$$

$$q_0 = 0, q_1 = 10, t_0 = 0, t_1 = 8 \\ v_0 = -5, v_1 = -10$$





# Traiettorie polinomiali

- **Esempio:** polinomiale di grado cinque
- Se in aggiunta a posizioni e velocità iniziali e finali fossero specificate anche le accelerazioni, sarebbero necessario polinomi di grado cinque con le condizioni

$$\begin{array}{ll} q(t_0) = q_0 & q(t_1) = q_1 \\ \dot{q}(t_0) = v_0 & \dot{q}(t_1) = v_1 \\ \ddot{q}(t_0) = a_0 & \ddot{q}(t_1) = a_1 \end{array}$$

- I coefficienti risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \frac{1}{2}a_0 \\ a_3 = \frac{1}{2T^3}[20h - (8v_1 + 12v_0)T - (3a_0 - a_1)T^2] \\ a_4 = \frac{1}{2T^4}[-30h + (14v_1 + 16v_0)T + (3a_0 - 2a_1)T^2] \\ a_5 = \frac{1}{2T^5}[12h - 6(v_1 + v_0)T + (a_1 - a_0)T^2]. \end{array} \right.$$

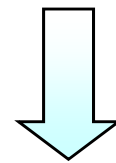
## Traiettoria polinomiale per $n$ punti

- Il problema di determinare una traiettoria che passi per  $n$  punti può essere risolto in modo univoco adottando una funzione polinomiale di grado  $n-1$

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

- Dati i valori  $t_i, q_i, i = 0, \dots, n-1$ , si costruiscono i vettori  $q, a$  e la matrice  $T$  (di Vandermonde) come

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^{n-1} \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & t_{n-2} & \cdots & t_{n-2}^{n-1} \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = T a. \quad (1)$$

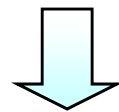


$T$  sempre invertibile se  
 $t_i > t_{i-1}, t = 0, \dots, n-1,$

$$a = T^{-1} q$$

# Traiettoria polinomiale per $n$ punti

- Vantaggi dell'interpolazione polinomiale
  - la traiettoria ottenuta attraversa tutti i punti dati;
  - la funzione interpolante può essere facilmente descritta poiché solo  $n$  coefficienti sono necessari;
  - le derivate di ogni ordine della funzione  $q(t)$  sono continue in  $]t_0, t_{n-1}[$
  - la traiettoria interpolante  $q(t)$  è unica
- Svantaggi:
  - all'aumentare del numero  $n$  di punti aumenta il numero condizionante  $\kappa$  (rapporto tra il massimo e il minimo valore singolare) della matrice di Vandermonde



Dato  $M a = b$  una perturbazione  $\Delta M$  provoca un errore  $\Delta a$  tale che

$$\frac{\Delta a}{a + \Delta a} \leq |M| |M^{-1}| \frac{\Delta M}{M} = \kappa \frac{\Delta M}{M}$$

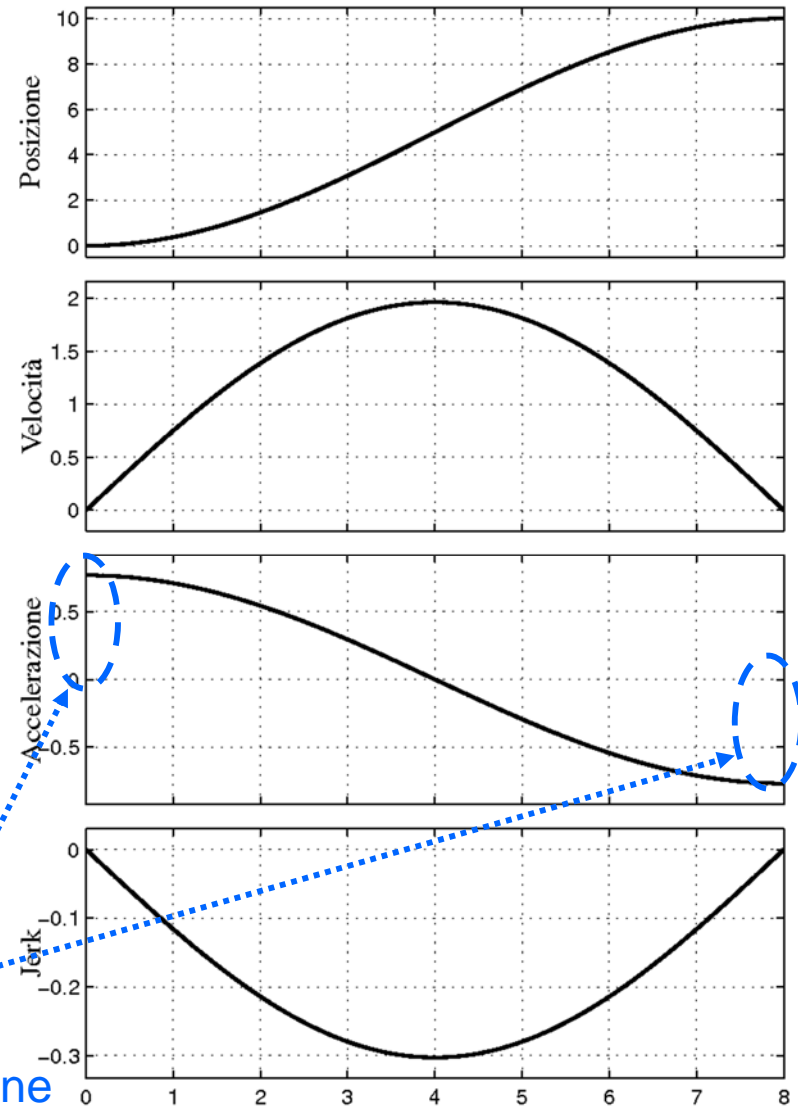
problema dell' inversione di  $T$  numericamente malcondizionato

# Traiettoria armonica

- Presenta derivate continue in tutti i punti interni all'intervallo temporale  $(t_0, t_1)$ , per qualsiasi ordine di derivazione.
- Le equazioni che descrivono la traiettoria e le sue derivate sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) = \frac{h \pi}{T} \sin \left( \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) = \frac{h \pi^2}{T^2} \cos \left( \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \dddot{q}(t) = -\frac{h \pi^3}{T^3} \sin \left( \frac{\pi(t-t_0)}{T} \right) \end{array} \right.$$

$$t_0 = 0, t_1 = 8, q_0 = 0, q_1 = 10$$

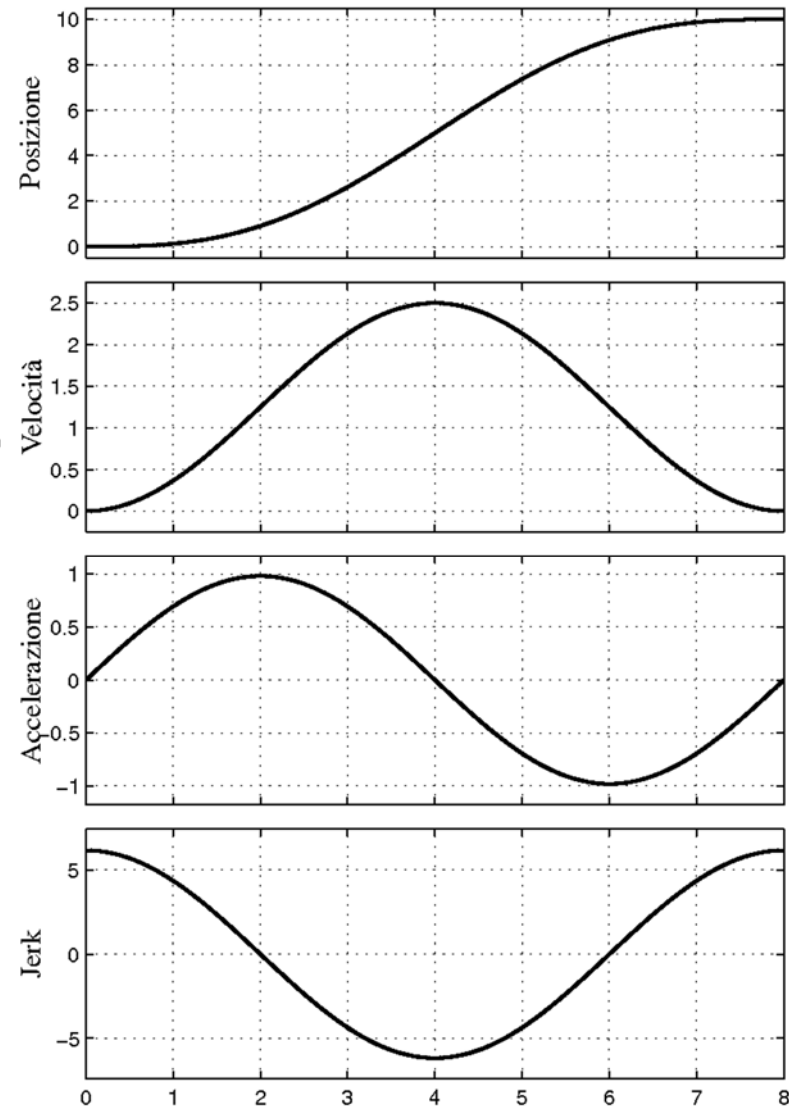


# Traiettoria cicloidale

- Per ovviare al problema della discontinuità dell'accelerazione negli istanti iniziali e finali si può impiegare una traiettoria cicloidale le cui equazioni risultano

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = h \left( \frac{t-t_0}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \right) + q_0 \\ \dot{q}(t) = \frac{h}{T} \left( 1 - \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \right) \\ \ddot{q}(t) = \frac{h}{T^2} 2\pi \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \\ \dddot{q}(t) = \frac{h}{T^3} 4\pi^2 \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \end{array} \right.$$

$$t_0 = 0, t_1 = 8, q_0 = 0, q_1 = 10$$



# Traiettorie per sviluppo in serie di Fourier

- Calcolate sviluppando in serie di Fourier espressioni di traiettorie “elementari” e considerando un numero finito di componenti (limitate in frequenza), al fine di ottenere spettri frequenziali opportuni.

- **Gutman 1-3**

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{15}{32\pi} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{96\pi} \sin \left( \frac{6\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

- **Freudestein 1-3**

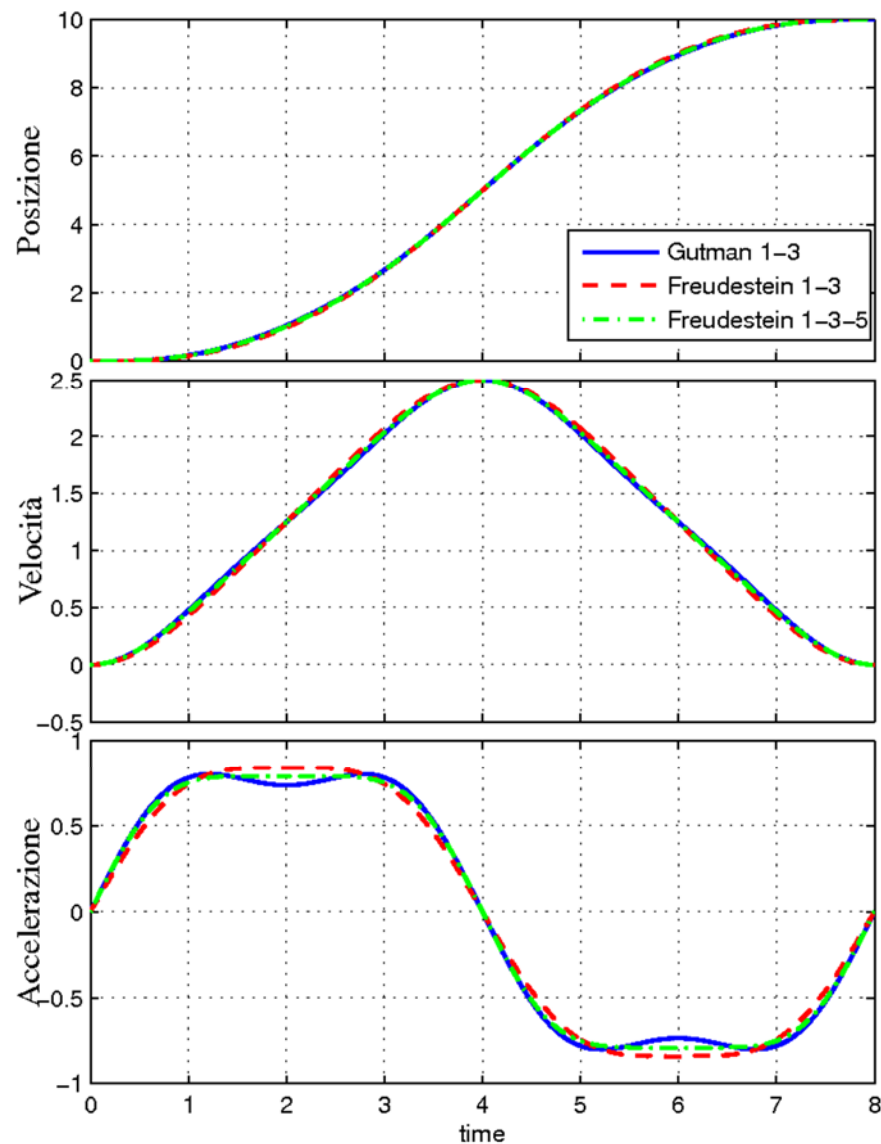
$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{27}{56\pi} \sin \left( \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \right) - \frac{1}{168\pi} \sin \left( \frac{6\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

- **Freudestein 1-3-5**

$$q(t) = h \left[ \frac{t - t_0}{T} - \frac{0.9438}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T} + \frac{1}{54} \sin \frac{6\pi(t - t_0)}{T} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{1250} \sin \frac{10\pi(t - t_0)}{T} \right) \right] + q_0$$

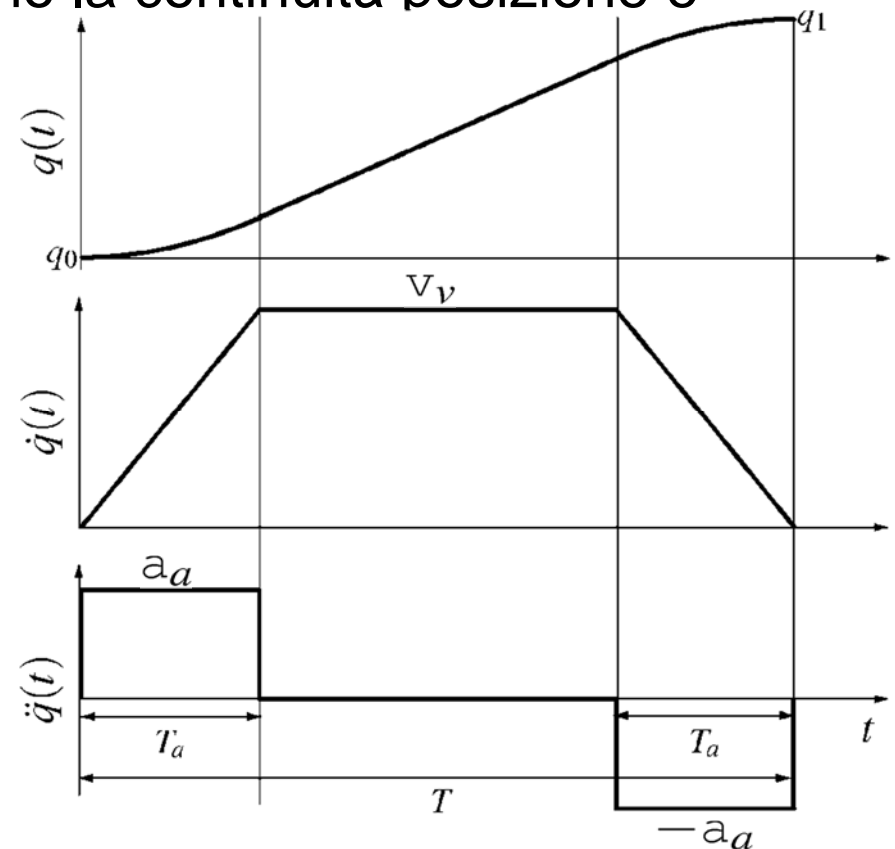
# Traiettorie per sviluppo in serie di Fourier

- Profili delle traiettorie



# Traiettorie composte

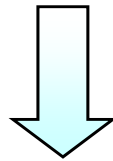
- Traiettorie ottenute giustapponendo funzioni elementari (polinomiale trigonometriche, ecc.) al fine di rispondere alle più molteplici esigenze e specifiche
- Sono scomponibili in “tratti”, ciascuno caratterizzato da una specifica espressione. Si garantisce quantomeno la continuità posizione e velocità tra segmenti consecutivi
- La traiettoria più comune e nota appartenente a questa categoria è sicuramente la **traiettoria trapezoidale** in velocità, caratterizzata da 3 segmenti ad accelerazione costante (in un tratto positiva, in uno negativa e nel terzo nulla)





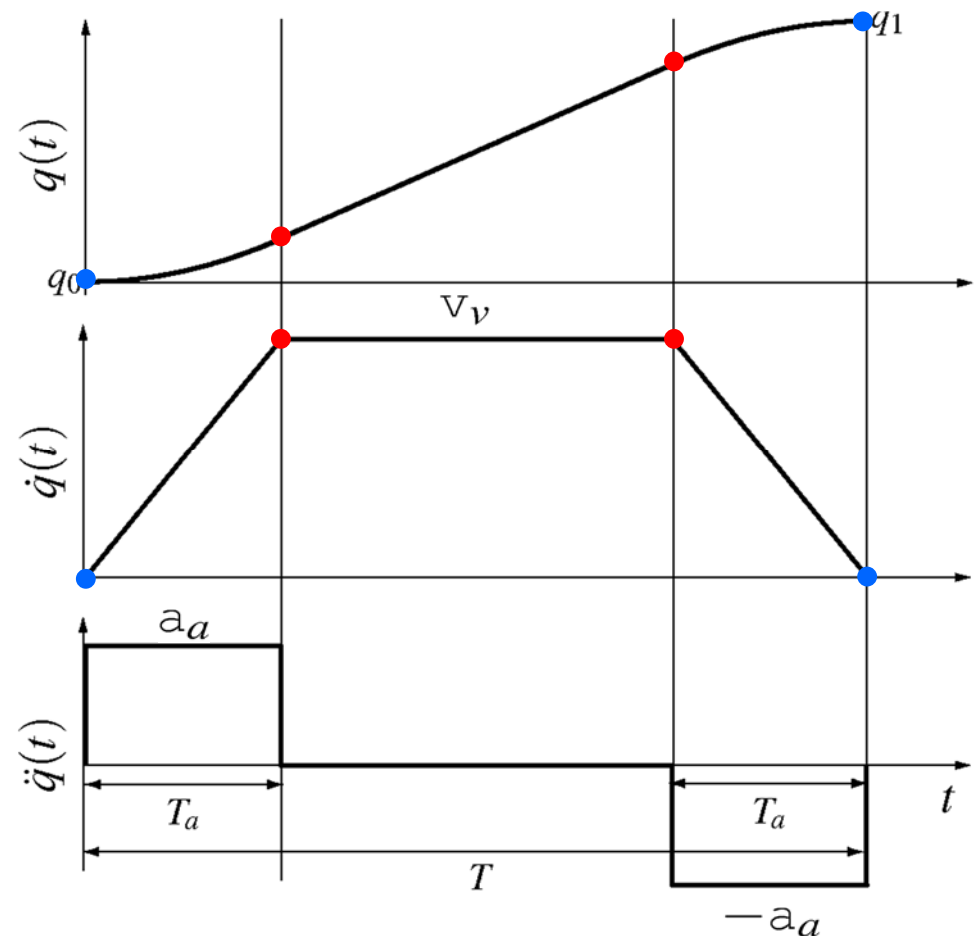
# Traiettoria trapezoidale

- Si considera  $t_0 = 0$  (di conseguenza la durata  $T$  della traiettoria coincide con  $t_1$ )
- Si assume che i valori di accelerazione e di decelerazione siano uguali in valore assoluto e che le rispettive fasi abbiano uguale durata  $T_a$



Si garantisce automaticamente che se la traiettoria parte con velocità nulla terminerà con velocità nulla

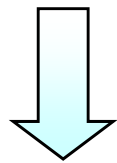
- Il calcolo dei coefficienti che definiscono i 3 tratti viene fatto imponendo i valori iniziali e finali desiderati e le condizioni di continuità tra segmenti contigui



# Traiettoria trapezoidale

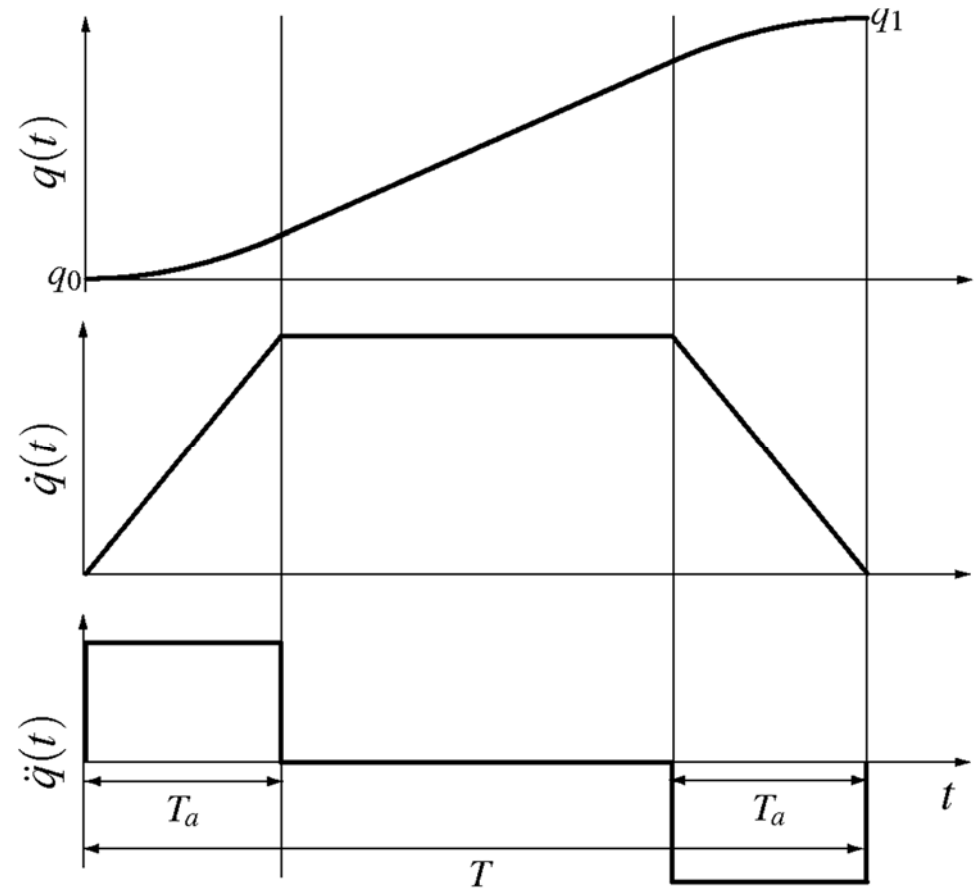
- Calcolo della traiettoria:
  - Fase di accelerazione  $t \in [0, T_a]$

$$\begin{cases} q_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \dot{q}_a(t) = a_1 + 2a_2 t \\ \ddot{q}_a(t) = 2a_2 \end{cases}$$



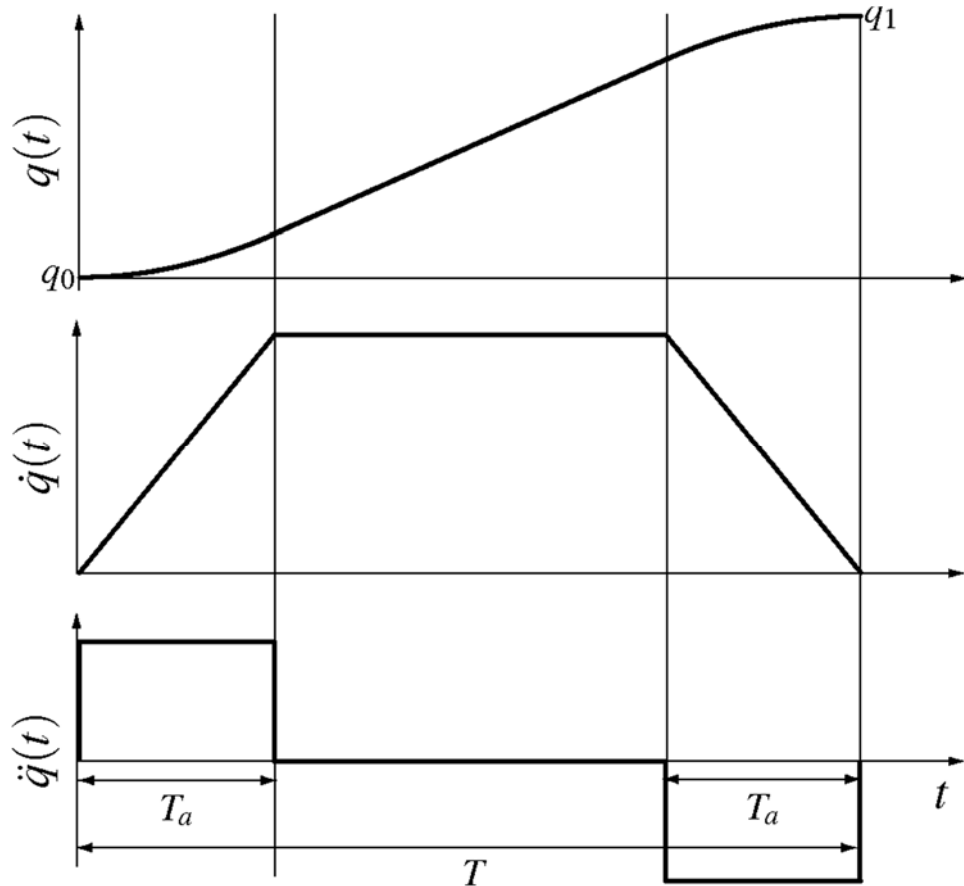
$$\begin{cases} q_a(0) = q_0 \\ \dot{q}_a(0) = 0 \\ \dot{q}_a(T_a) = v_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{v_v}{2T_a} \end{cases}$$



# Traiettoria trapezoidale

- Fase a velocità costante  $t \in [T_a, T - T_a]$



$$\begin{cases} q_b(t) = b_0 + b_1 t \\ \dot{q}_b(t) = b_1 \\ \ddot{q}_b(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} q_a(T_a) = q_0 + \frac{v_v T_a}{2} = q_b(T_a) = b_0 + b_1 T_a \\ \dot{q}_a(T_a) = v_v = \dot{q}_b(T_a) = b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = q_0 - \frac{v_v T_a}{2} \\ b_1 = v_v \end{cases}$$

# Traiettoria trapezoidale

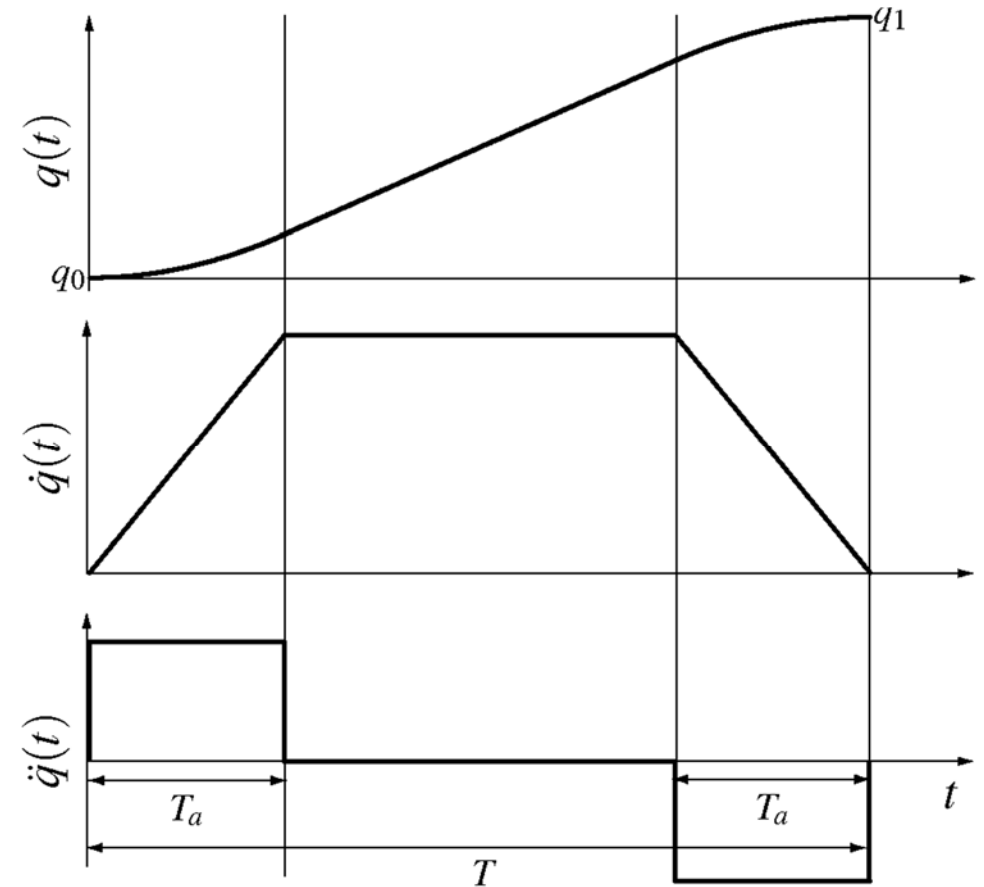
- Fase di decelerazione  $t \in [T - T_a, T]$

$$\begin{cases} q_c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \\ \dot{q}_c(t) = c_1 + 2c_2 t \\ \ddot{q}_c(t) = 2c_2 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} q_c(T) = q_1 \\ \dot{q}_c(T - T_a) = v_v \\ \dot{q}_c(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = q_1 - \frac{v_v T^2}{2T_a} \\ c_1 = \frac{v_v T}{T_a} \\ c_2 = -\frac{v_v}{2T_a} \end{cases}$$



# Traiettoria trapezoidale

- Nel caso  $t_0 \neq 0$

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{v_v}{2T_a}(t - t_0)^2, & t_0 \leq t < t_0 + T_a \\ q_0 + v_v \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a \leq t < t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{v_v}{2T_a}(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

- Per garantire la continuità del profilo di posizione è necessario imporre la condizione  $q_b(t_1 - T_a) = q_c(t_1 - T_a)$  da cui

$$v_v = \frac{q_1 - q_0}{T - T_a} = \frac{h}{T - T_a}$$

- Nell'espressione della traiettoria non compare l'accelerazione dei due tratti ad accelerazione costante ( $a_a, -a_a$ ), ma è possibile riscriverla mettendo in evidenza  $a_a$  sulla base della relazione

$$a_a = \frac{v_v}{T_a}$$

# Traiettoria trapezoidale

- Nel caso  $t_0 \neq 0$

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}a_a(t-t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_0 + v_v \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a < t \leq t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2}a_a(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases}$$

- con

$$v_v = \frac{h}{T - T_a} \qquad a_a = \frac{v_v}{T_a}$$

- Nell'equazione che definisce la traiettoria, sono presenti ancora alcuni gradi di libertà, ovvero parametri che possono essere assegnati ad arbitrio ( $v_v$ ,  $a_a$ ,  $T$ ,  $T_a$  oltre a  $q_0$ ,  $q_1$  e  $t_0$ ).
- Bisogna poi considerare gli ulteriori vincoli

$$T_a \leq T/2 \qquad a_a \geq \frac{4|h|}{T^2}$$

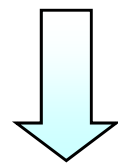
# Traiettoria trapezoidale

- Imposizione di velocità massima e accelerazione massima

$$v_y = v_{max}, \quad a_a = a_{max}$$

- la durata complessiva  $T$  della traiettoria e la e la durata  $T_a$  del periodo di accelerazione non sono predefinite ma devono essere calcolate come

$$\begin{cases} T_a = \frac{v_{max}}{a_{max}} \\ T = \frac{h}{v_{max}} + \frac{v_{max}}{a_{max}} \end{cases}$$



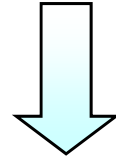
$$T_a \leq T/2 \quad \Leftrightarrow \quad h \geq \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Equazione della traiettoria:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2} a_{max} (t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_0 + v_{max} \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a < t \leq t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2} a_{max} (t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases}$$

# Traiettoria trapezoidale

- Se la condizione  $T_a \leq T/2 \Leftrightarrow h \geq \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$  non è verificata la velocità  $v_{max}$  non può essere raggiunta



la traiettoria (che risulta ancora realizzabile) sarà caratterizzata solo da una fase di accelerazione, seguita da una di decelerazione, senza tratto lineare intermedio

$$\begin{cases} T_a = \sqrt{\frac{h}{a_{max}}} \\ T = 2T_a \\ \dot{q}_{max} = a_{max}T_a = \sqrt{a_{max}h} = \frac{h}{T_a} \end{cases}$$

Massima velocità effettivamente raggiunta

Equazione della traiettoria:

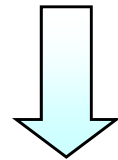
$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}a_{max}(t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_1 - \frac{1}{2}a_{max}(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases}$$



# Traiettoria trapezoidale

- Imposizione della durata complessiva  $T$  e del periodo di accelerazione  $T_a$

$$\begin{cases} v_v = \frac{h}{T - T_a} \\ a_a = \frac{h}{T_a(T - T_a)} \end{cases}$$



$$T_a = \alpha T,$$

$$0 < \alpha \leq 1/2$$

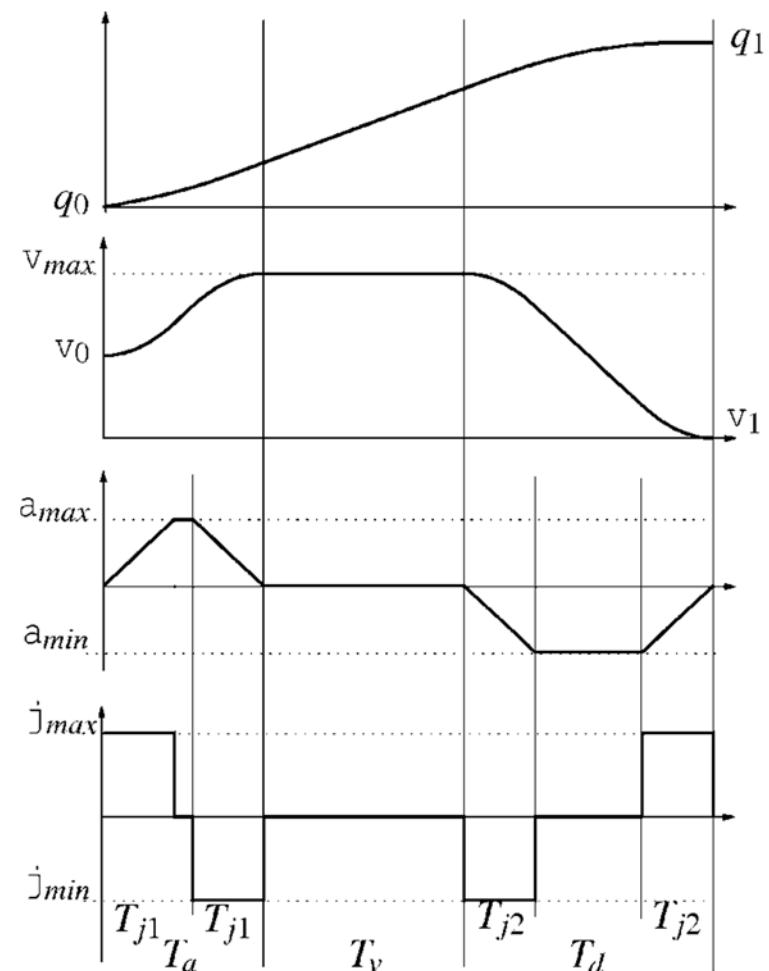
$$\begin{cases} v_v = \frac{h}{T(1 - \alpha)} \\ a_a = \frac{h}{T\alpha(1 - \alpha)} \end{cases}$$

Equazione della traiettoria:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}a_a(t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + T_a \\ q_0 + v_v \left( t - t_0 - \frac{T_a}{2} \right), & t_0 + T_a < t \leq t_1 - T_a \\ q_1 - \frac{1}{2}a_a(t_1 - t)^2, & t_1 - T_a < t \leq t_1. \end{cases}$$

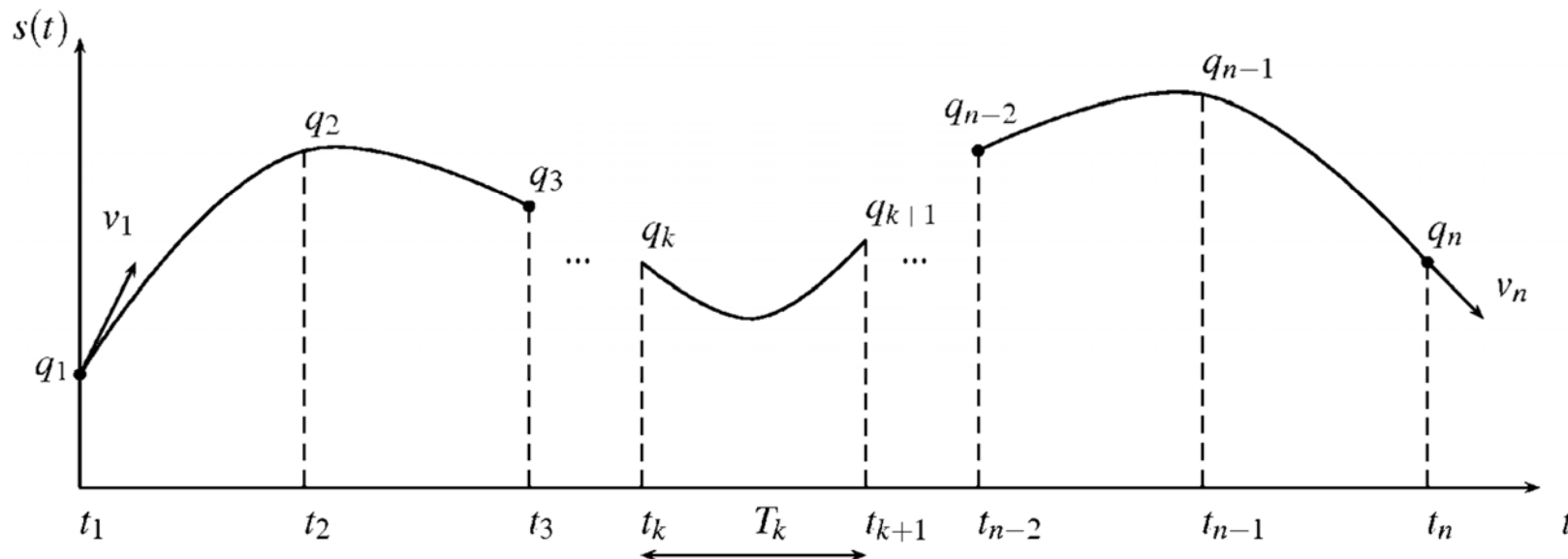
## Traiettorie composte con ordine di continuità maggiore

- L'esigenza di traiettorie più “dolci” ha indotto lo sviluppo di profili di moti con raccordi polinomiali di ordine maggiore di 2 (accelerazione continua), e quindi con il jerk costante a tratti (**traiettoria doppia-S in velocità o a 7 segmenti**), o anche di traiettorie con jerk continuo (**traiettoria a 15 segmenti**).
- **Traiettoria doppia S in velocità**  
Come la traiettoria trapezoidale, la doppia S è costituita da una fase di accelerazione, una di decelerazione e un tratto intermedio a velocità costante. Ma in questo caso, i segmenti di accelerazione e decelerazione sono a loro volta costituiti da diverse fasi a jerk costante (prima positivo, poi nullo e infine negativo, e/o viceversa)



# Traiettorie spline

- **Traiettorie multi-punto** ottenute come unione di  $n-1$  funzioni polinomiali (grado tipicamente 3 o 5) con condizioni di passaggio per  $n$  punti e di continuità della funzione complessiva e delle sue derivate (fino ad un certo ordine).
- Si può dimostrare che la spline è la funzione interpolante a **curvatura minima**, a parità di condizioni di continuità sulle derivate.



# Traiettorie spline

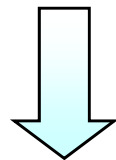
- Per ottenere condizioni di continuità sulle velocità e sulle accelerazioni sono tipicamente impiegati polinomi di grado tre (cubici).
- Le spline cubiche risultano definite da
$$s(t) = \{q_k(t), t \in [t_k, t_{k+1}], k = 1, \dots, n-1\},$$
$$q_k(t) = a_{k0} + a_{k1}(t - t_k) + a_{k2}(t - t_k)^2 + a_{k3}(t - t_k)^3.$$
- Si hanno 4 coefficienti per ciascuno degli  $n - 1$  polinomi: in totale  $4(n - 1)$  parametri da definire.
- D'altra parte si hanno i seguenti vincoli:
  - $2(n - 1)$  condizioni di passaggio per i punti, in quanto ogni cubica deve interpolare i punti alle sue estremità
  - $n - 2$  condizioni sulla continuità delle velocità nei punti intermedi
  - $n - 2$  condizioni sulla continuità delle accelerazioni nei punti intermedi
- Si hanno dunque
$$4(n - 1) - 2(n - 1) - 2(n - 2) = 2$$
gradi di libertà che possono essere utilizzati per imporre opportune condizioni sulla velocità iniziale e finale.

## Spline cubica con velocità iniziale e finale preassegnata

- Il calcolo dei coefficienti  $a_{ki}$  avviene secondo il seguente algoritmo.

- Si assumono note le velocità  $v_k, k = 1, \dots, n-1$ , nei punti intermedi. Per ciascun polinomio cubico si hanno quattro condizioni al contorno su posizione e velocità:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_k(t_k) = a_{k0} = q_k \\ \dot{q}_k(t_k) = a_{k1} = v_k \\ q_k(t_{k+1}) = a_{k0} + a_{k1}T_k + a_{k2}T_k^2 + a_{k3}T_k^3 = q_{k+1} \\ \dot{q}_k(t_{k+1}) = a_{k1} + 2a_{k2}T_k + 3a_{k3}T_k^2 = v_{k+1} \end{array} \right. \quad T_k = t_{k+1} - t_k$$

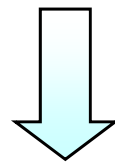


$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k,0} = q_k \\ a_{k,1} = v_k \\ a_{k,2} = \frac{1}{T_k} \left[ \frac{3(q_{k+1} - q_k)}{T_k} - 2v_k - v_{k+1} \right] \\ a_{k,3} = \frac{1}{T_k^2} \left[ \frac{2(q_k - q_{k+1})}{T_k} + v_k + v_{k+1} \right] \end{array} \right.$$

## Spline cubica con velocità iniziale e finale preassegnata

- Per calcolare il valore delle velocità  $v_k$  si impone la continuità delle accelerazioni nei punti intermedi:

$$\ddot{q}_k(t_{k+1}) = \boxed{2a_{k,2} + 6a_{k,3}T_k = 2a_{k+1,2}} = \ddot{q}_{k+1}(t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, n-2$$



sostituendo le espressioni dei coefficienti  $a_{k,2}$ ,  $a_{k,3}$ ,  $a_{k+1,2}$  e moltiplicando per  $(T_k T_{k+1})/2$

$$T_{k+1}v_k + 2(T_{k+1} + T_k)v_{k+1} + T_k v_{k+2} = \frac{3}{T_k T_{k+1}} [T_k^2 (q_{k+2} - q_{k+1}) + T_{k+1}^2 (q_{k+1} - q_k)]$$
$$k = 0, \dots, n-2$$

## Spline cubica con velocità iniziale e finale preassegnata

- Le relazioni precedenti possono essere raccolte e scritte in forma matriciale

$$A' \mathbf{v}' = \mathbf{c}'$$

$$A' = \begin{bmatrix} T_1 & 2(T_0 + T_1) & T_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & 2(T_1 + T_2) & T_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & T_{n-2} & 2(T_{n-3} + T_{n-2}) & T_{n-3} & 0 \\ & & 0 & T_{n-1} & 2(T_{n-2} + T_{n-1}) & T_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = ([v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n]^T,$$

Valori noti

$$\mathbf{c}' = [c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}]^T$$

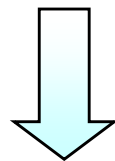
Termine noto dipendente da posizioni e istanti temporali

Le colonne di  $A'$  corrispondenti possono essere eliminate

## Spline cubica con velocità iniziale e finale preassegnata

- Le relazione matriciale finale risulta

$$\begin{bmatrix} 2(T_0 + T_1) & T_0 & 0 & \dots & 0 \\ T_2 & 2(T_1 + T_2) & T_1 & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & T_{n-2} & 2(T_{n-3} + T_{n-2}) & T_{n-3} \\ 0 & \dots & & 0 & T_{n-1} & 2(T_{n-2} + T_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{T_0 T_1} [T_0^2 (q_2 - q_1) + T_1^2 (q_1 - q_0)] - T_1 v_0 \\ \frac{3}{T_1 T_2} [T_1^2 (q_3 - q_2) + T_2^2 (q_2 - q_1)] \\ \vdots \\ \frac{3}{T_{n-3} T_{n-2}} [T_{n-3}^2 (q_{n-1} - q_{n-2}) + T_{n-2}^2 (q_{n-2} - q_{n-3})] \\ \frac{3}{T_{n-2} T_{n-1}} [T_{n-2}^2 (q_n - q_{n-1}) + T_{n-1}^2 (q_{n-1} - q_{n-2})] - T_{n-2} v_n \end{bmatrix}$$



Dalla conoscenza di  $v_k$  si ricavano i coefficienti  $a_{ki}$



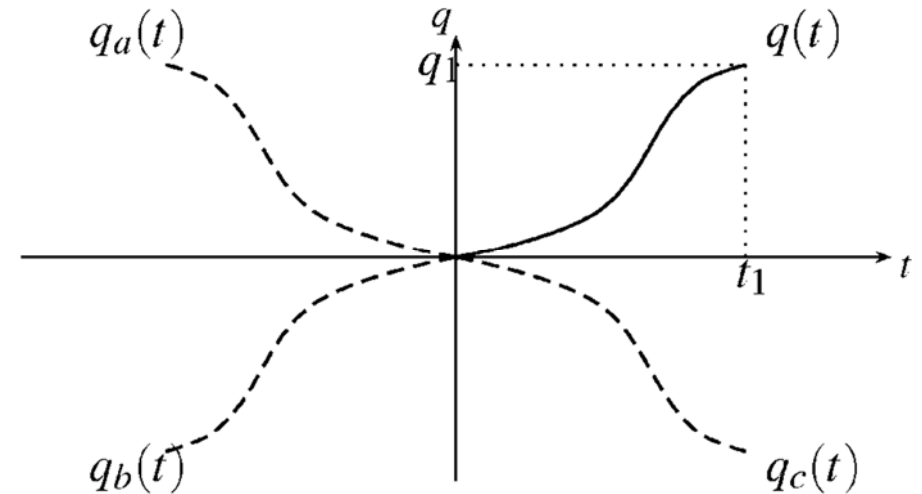
# Operazioni sulle traiettorie

- Operazioni geometriche sulle traiettorie

- $q_a(t) = q(-t), \quad t \in [-t_1, 0].$

- $q_b(t) = -q(-t), \quad t \in [-t_1, 0].$

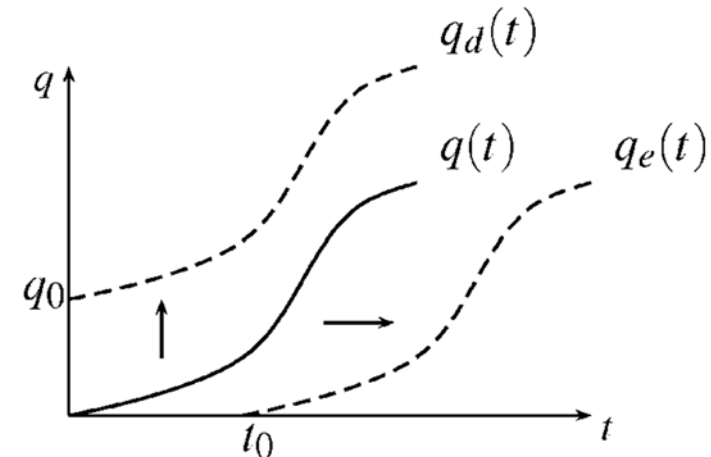
- $q_c(t) = -q(t), \quad t \in [0, t_1].$



- Traslazione spaziale e temporale

- $q_d(t) = q(t) + q_0, \quad t \in [0, t_1].$

- $q_e(t) = q(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + t_1].$



- Utile nel caso in cui si voglia modificare l'istante di tempo iniziale o la posizione iniziale di una traiettoria generica

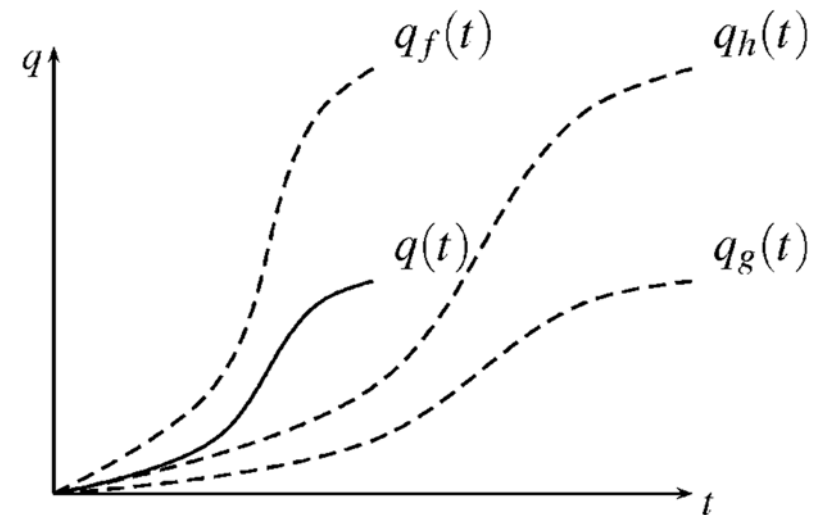
# Operazioni sulle traiettorie

- Scalatura spaziale e temporale
  - con riferimento a una traiettoria normalizzata  $q(t) \in [0, 1]$  con  $t \in [0, 1]$  si ha che

6.  $q_f(t) = h q(t).$

7.  $q_g(t) = q(t/T).$

8.  $q_h(t) = h q(t/T).$



## Messa in scala temporale di traiettorie

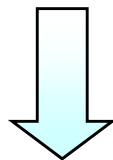
- Un generica traiettoria  $q = q(t)$  può essere resa più veloce o più lenta considerando una nuova variabile temporale  $t'$  legata a  $t$  per mezzo di una funzione strettamente crescente  $t = \sigma(t')$

$$\tilde{q}(t') = (q \circ \sigma)(t') = q(\sigma(t'))$$

$$\dot{\tilde{q}}(t') = \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\sigma(t')}{dt'}$$

$$\ddot{\tilde{q}}(t') = \frac{dq(\sigma)}{d\sigma} \frac{d^2\sigma(t')}{dt'^2} + \frac{d^2q(\sigma)}{d\sigma^2} \left( \frac{d\sigma(t')}{dt'} \right)^2$$

⋮

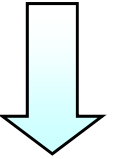


Definendo in maniera opportuna la funzione  $\sigma$  è possibile modificare le derivate temporali di  $\tilde{q}(t')$  a seconda delle necessità.

# Messa in scala temporale di traiettorie

- Caso particolare

$$t = \sigma(t') = \lambda t' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{t}{\lambda}$$


$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}(t') &= \lambda \dot{q}(t) \\ \ddot{\tilde{q}}(t') &= \lambda^2 \ddot{q}(t) \\ \tilde{q}^{(3)}(t') &= \lambda^3 q^{(3)}(t) \\ &\vdots \\ \tilde{q}^{(n)}(t') &= \lambda^n q^{(n)}(t).\end{aligned}$$

# Messa in scala temporale di traiettorie

- Per soddisfare determinati vincoli sulle massime velocità, accelerazioni, ecc., è conveniente considerare traiettorie espresse in forma normalizzata

$$0 \leq q_N(\tau) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

e quindi applicare operazioni di scalatura geometrica e temporale.

$$q(t) = q_0 + (q_1 - q_0) \tilde{q}_N(t) = q_0 + h \tilde{q}_N(t)$$

$$\tilde{q}_N(t) = q_N(\tau), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - t_0}{T}.$$



$$\begin{aligned} q^{(1)}(t) &= \frac{h}{T} q_N^{(1)}(\tau) \\ q^{(2)}(t) &= \frac{h}{T^2} q_N^{(2)}(\tau) \\ q^{(3)}(t) &= \frac{h}{T^3} q_N^{(3)}(\tau) \\ &\vdots \\ q^{(n)}(t) &= \frac{h}{T^n} q_N^{(n)}(\tau) \end{aligned}$$

Ovviamente i massimi valori di velocità, accelerazione, ecc. si ottengono in corrispondenza dei massimi delle funzioni  $q_N^{(1)}, q_N^{(2)}, \dots$

Variando la durata  $T$  della traiettoria è possibile soddisfare i vincoli sulle saturazioni cinematiche

# Messa in scala temporale di traiettorie

- Traiettoria polinomiale di grado 3

$$q_N(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = 6\tau - 6\tau^2$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = 6 - 12\tau$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = -12.$$



$$q_N^{(1)}_{max} = q_N^{(1)}(0.5) = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \dot{q}_{max} = \max |\dot{q}| = \frac{3|h|}{2T}$$
$$q_N^{(2)}_{max} = q_N^{(2)}(0) = 6 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q}_{max} = \max |\ddot{q}| = \frac{6|h|}{T^2}.$$

Operando sulla durata  $T$  della traiettoria è possibile rispettare i vincoli su velocità e accelerazione

# Messa in scala temporale di traiettorie

- Traiettoria polinomiale di grado 5

$$q_N(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = 30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = 60 - 360\tau + 360\tau^2$$



$$\begin{aligned} q_N^{(1)}{}_{max} &= q_N^{(1)}(0.5) = \frac{15}{8} & \implies & \dot{q}_{max} = \max |\dot{q}| = \frac{15|h|}{8T} \\ q_N^{(2)}{}_{max} &= q_N^{(2)}(0.2123) = \frac{10\sqrt{3}}{3} & \implies & \ddot{q}_{max} = \max |\ddot{q}| = \frac{10\sqrt{3}|h|}{3T^2} \\ q_N^{(3)}{}_{max} &= q_N^{(3)}(0) = 60 & \implies & q_{max}^{(3)} = \max |q^{(3)}| = 60 \frac{|h|}{T^3}. \end{aligned}$$

# Messa in scala temporale di traiettorie

- Traiettoria cicloidale

$$q_N(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = 1 - \cos 2\pi\tau$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = 2\pi \sin 2\pi\tau$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = 4\pi^2 \cos 2\pi\tau$$



$$q_N^{(1)}_{max} = q_N^{(1)}(0.5) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{q}_{max} = \max |\dot{q}| = 2 \frac{|h|}{T}$$

$$q_N^{(2)}_{max} = q_N^{(2)}(0.25) = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q}_{max} = \max |\ddot{q}| = 2\pi \frac{|h|}{T^2}$$

$$q_N^{(3)}_{max} = q_N^{(3)}(0) = 4\pi^2 \quad \Longrightarrow \quad q_{max}^{(3)} = \max |q^{(3)}| = 4\pi^2 \frac{|h|}{T^3}$$



# Messa in scala temporale di traiettorie

- Traiettoria armonica

$$q_N(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi\tau)$$

$$q_N^{(1)}(\tau) = \frac{\pi}{2} \sin \pi\tau$$

$$q_N^{(2)}(\tau) = \frac{\pi^2}{2} \cos \pi\tau$$

$$q_N^{(3)}(\tau) = -\frac{\pi^3}{2} \sin \pi\tau.$$



$$q_N^{(1)}_{max} = q_N^{(1)}(0.5) = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \dot{q}_{max} = \max |\dot{q}| = \frac{\pi|h|}{2T}$$

$$q_N^{(2)}_{max} = q_N^{(2)}(0) = \frac{\pi^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q}_{max} = \max |\ddot{q}| = \frac{\pi^2|h|}{2T^2}$$

$$|q_N^{(3)}|_{max} = |q_N^{(3)}(0.5)| = \frac{\pi^3}{2} \quad \Longrightarrow \quad |q_{max}^{(3)}| = \max |q^{(3)}| = \frac{\pi^3|h|}{2T^3}.$$

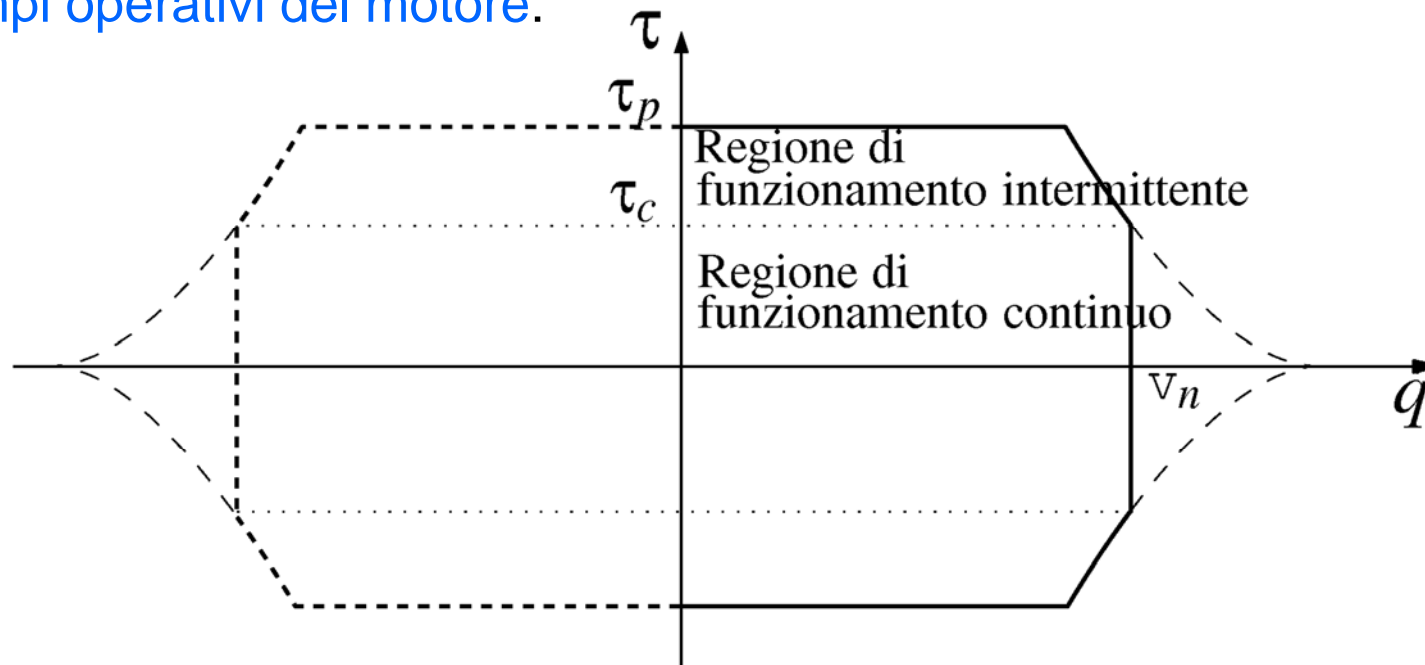
## Messa in scala temporale di traiettorie

- **Esempio:** si vuole realizzare una traiettoria con  $q_0 = 10$ ,  $q_1 = 50$ , con un attuatore caratterizzato da  $v_{max} = 30$  e  $a_{max} = 80$ .  
Con queste condizioni risulta ( $h = 40$ )

Traiettoria	Formule	Vincoli	$T_{min}$
Polinomiale grado 3	$\dot{q}_{max} = \frac{3h}{2T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{6h}{T^2}$	$T = \frac{3h}{60} = 2$ $T = \sqrt{\frac{6h}{80}} = 1.732$	2
Polinomiale grado 5	$\dot{q}_{max} = \frac{15h}{8T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2}$	$T = \frac{15h}{240} = 2.5$ $T = \sqrt{\frac{10\sqrt{3}h}{240}} = 1.699$	2.5
Armonica	$\dot{q}_{max} = \frac{\pi h}{2T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2}$	$T = \frac{\pi h}{60} = 2.094$ $T = \sqrt{\frac{\pi^2 h}{160}} = 1.571$	2.094
Cicloidale	$\dot{q}_{max} = \frac{2h}{T}$ $\ddot{q}_{max} = \frac{2\pi h}{T^2}$	$T = \frac{2h}{30} = 2.667$ $T = \sqrt{\frac{2\pi h}{80}} = 1.772$	2.667

# Utilizzazione del sistema di attuazione

- Dato un motore elettrico, è possibile dedurre dai cataloghi le seguenti caratteristiche:
  - coppia di picco ( $\tau_p$ ): massimo valore di coppia che il motore è in grado di generare istantaneamente;
  - coppia efficace o continuativa ( $\tau_c$ ): coppia che il motore è in grado di generare indefinitamente nel tempo;
  - velocità nominale ( $v_n$ ): massimo valore di velocità di rotazione del motore;
  - potenza massima: valore che identifica la taglia del motore;
  - **campi operativi del motore:**



# Utilizzazione del sistema di attuazione

- Le grandezze caratteristiche del sistema di attuazione devono essere confrontate con le caratteristiche dei profili di moto che si intende utilizzare, per verificarne la compatibilità:

- Compatibilità delle velocità

$$\dot{q}_{max} \leq v_n$$

- Compatibilità della coppia

$$\max_t \{\tau(t)\} = \tau_{max} \leq \tau_p.$$



Si considerano solo forze inerziali e d'attrito

$$\tau(t) = J_t \ddot{q}(t) + B_t \dot{q}(t) \leq \tau_p$$

Una legge di moto può essere effettivamente realizzata se il **task meccanico**, cioè la curva descritta da  $(\dot{q}(t), \tau(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , è interamente incluso nell'area definita dalla caratteristica velocità-coppia del motore

## Utilizzazione del sistema di attuazione

- Nel caso di traiettorie cicliche è necessario considerare anche il **problema termico**: il punto di lavoro di una traiettoria non può rimanere in maniera indefinita nella regione di lavoro intermittente.
- Una semplice condizione che consente di dedurre se una certa legge di moto è attuabile o meno riguarda il cosiddetto valore efficace della coppia che può essere calcolato come

$$\tau_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tau^2(t) dt} \leq \tau_c$$



Si considerano solo forze inerziali e d'attrito

$$\tau_{eff}^2 = J_t^2 \dot{q}_{eff}^2 + B_t^2 \ddot{q}_{eff}^2 \quad \text{con}$$

$$\ddot{q}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \ddot{q}^2(t) dt},$$

$$\dot{q}_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \dot{q}^2(t) dt}$$

# Utilizzazione del sistema di attuazione

- La conoscenza dei valori di picco ed efficaci dei profili di velocità e accelerazione di una determinata traiettoria risulta di fondamentale importanza per il dimensionamento del sistema di attuazione o viceversa per la scelta della leggi di moto più adatta, dato un certo motore.
- è conveniente definire alcuni **coefficienti adimensionali**, che non dipendono dallo spostamento  $h$  o dalla durata  $T$ , ma solo dalla “forma” della traiettoria:

- Coefficiente di velocità

$$C_v = \frac{\dot{q}_{max}}{h/T} \Rightarrow \dot{q}_{max} = C_v \frac{h}{T}$$

- Coefficiente di accelerazione

$$C_a = \frac{\ddot{q}_{max}}{h/T^2} \Rightarrow \ddot{q}_{max} = C_a \frac{h}{T^2}$$

- Per i valori efficaci:

$$C_{v,eff} = \frac{\dot{q}_{eff}}{h/T}, \quad C_{a,eff} = \frac{\ddot{q}_{eff}}{h/T^2}$$

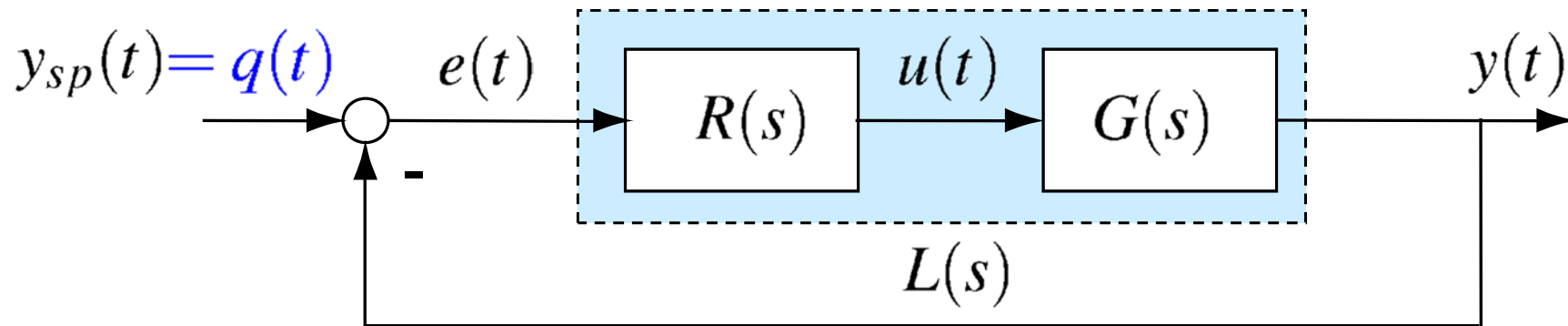
## Coefficienti di velocità e accelerazione

Traiettoria	$C_v$	$C_a$	$C_{v,eff}$	$C_{a,eff}$
Trapezoidale ( $T = 2T_a$ )	2	4	1.1547	4
Armonica	1.5708	4.9348	1.1107	3.4544
Cicloidale	2	6.2832	1.2247	4.4428
Polinomiale grado 3	1.5	6	1.0954	3.4131
Polinomiale grado 5	1.875	5.7733	1.1952	4.1402
Polinomiale grado 7	2.1875	7.5107	1.2774	5.0452
Gutman 1-3	2	5.1296	1.2006	4.2475
Freudenstein 1-3	2	5.3856	1.2106	4.3104
Freudenstein 1-3-5	2	5.0603	1.2028	4.2516

- Al fine di evitare un sovraccarico degli attuatori e l'applicazione di sollecitazioni eccessive ai componenti meccanici del sistema e al carico, i coefficienti sopra menzionati dovrebbero essere minimizzati.
- In generale, è necessario cercare un compromesso, poichè quando minimizzando un coefficiente gli altri generalmente crescono.

# Analisi dinamica delle traiettorie

- Con riferimento a un generico sistema in retroazione



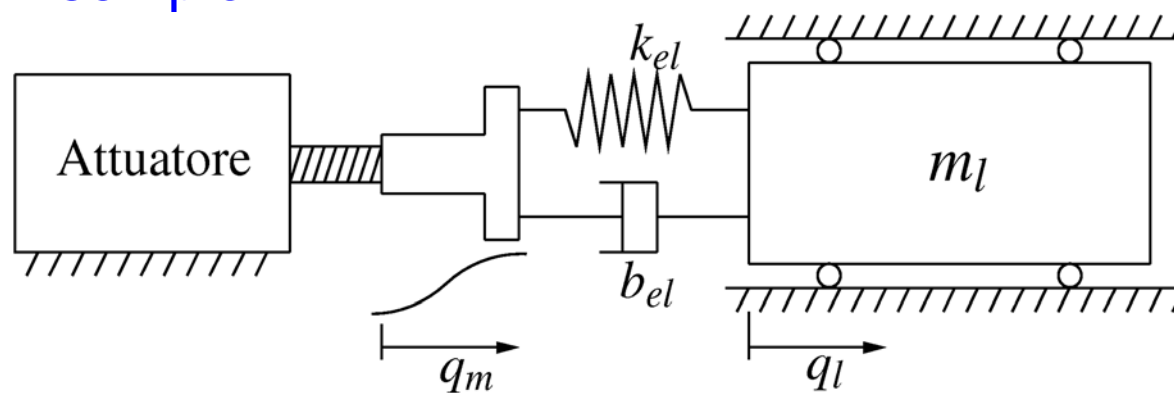
affinché l'errore di inseguimento sia trascurabile occorre far sì che lo spettro della traiettoria sia interamente contenuto entro la banda passante della funzione di sensitività complementare  $F(s)$  (ovvero la massima pulsazione della traiettoria sia inferiore alla  $\omega_c$  del guadagno d'anello  $L(s)$ )



# Analisi dinamica delle traiettorie

- Le traiettorie vengono considerate in funzione del modello del sistema meccanico che si deve attuare. Infatti le elasticità strutturali del sistema possono dare luogo all'insorgere di fenomeni vibratori.

Esempio:



Caso ideale: larghezza di banda del controllo di posizione del motore  $\gg$  rispetto alla frequenza di antirisonanza:  $q_m(t) \approx q^0(t)$

$$m_l \ddot{q}_l + b_{el} \dot{q}_l + k_{el} q_l = b_{el} \dot{q}_m + k_{el} q_m \quad \Leftrightarrow G_{lm}(s)$$

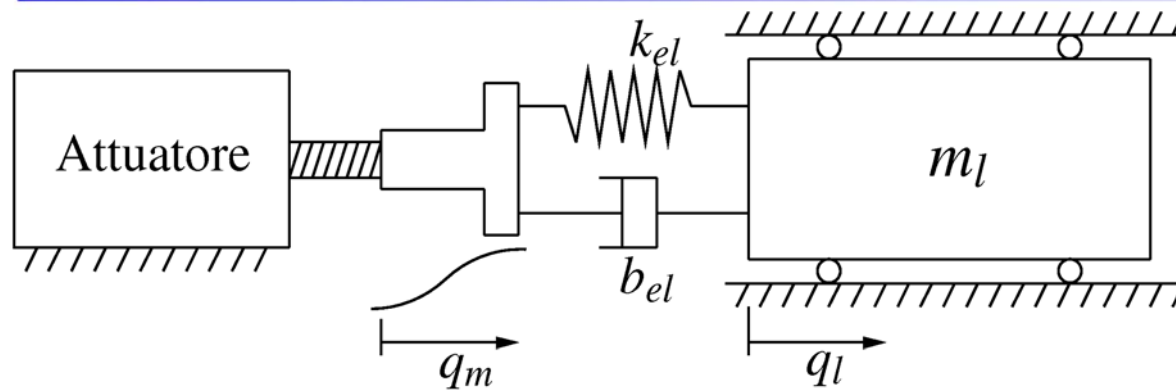
$$\Downarrow \quad z = q_l - q_m$$

$$m_l \ddot{z} + b_{el} \dot{z} + k_{el} z = -m_l \ddot{q}_m$$

$$\Downarrow \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k_{el}}{m_l}}, \quad \delta = \frac{b_{el}}{2\sqrt{m_l k_{el}}}$$

$$\ddot{z} + 2\delta_z \omega_z \dot{z} + \omega_z^2 z = -\ddot{q}_m$$

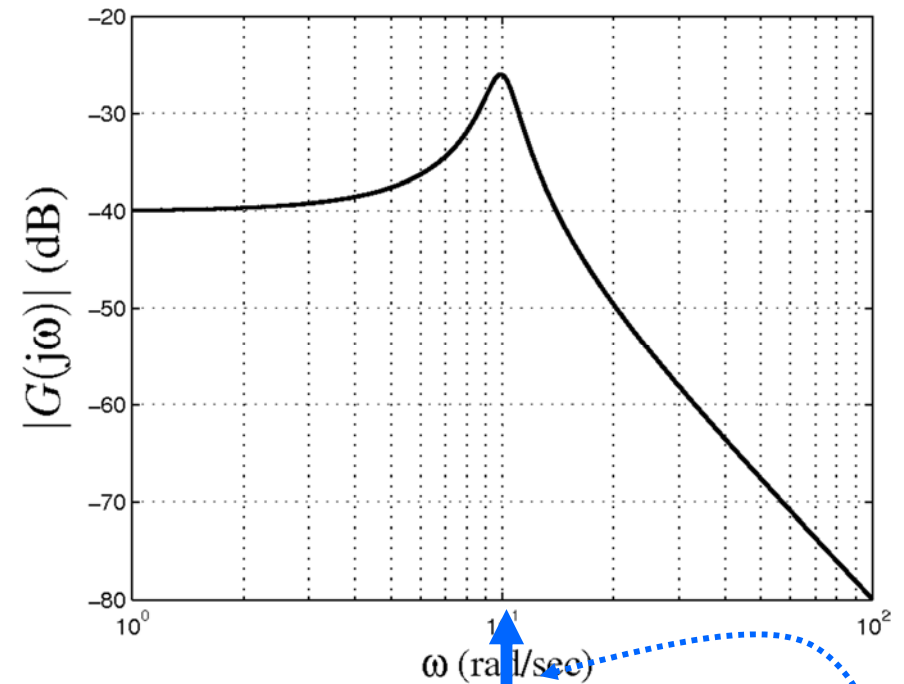
# Analisi dinamica delle traiettorie



Caso ideale  $q_m(t) = q^0(t)$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{A(s)} = \frac{-1}{s^2 + b_{el}/m_l s + k_{el}/m_l}$$

$$A(s) = \mathcal{L}[\dot{q}^0(t)] \quad Z(s) = \mathcal{L}[z(t)]$$



- Al fine di evitare delle vibrazioni (ovvero valori elevato dell' "errore"  $z(t)$ ) la pulsazione massima della traiettoria deve essere significativamente inferiore alla **pulsazione di risonanza** (alla quale l'ampiezza della risposta in frequenza ha un picco).

# Analisi spettrale delle traiettorie

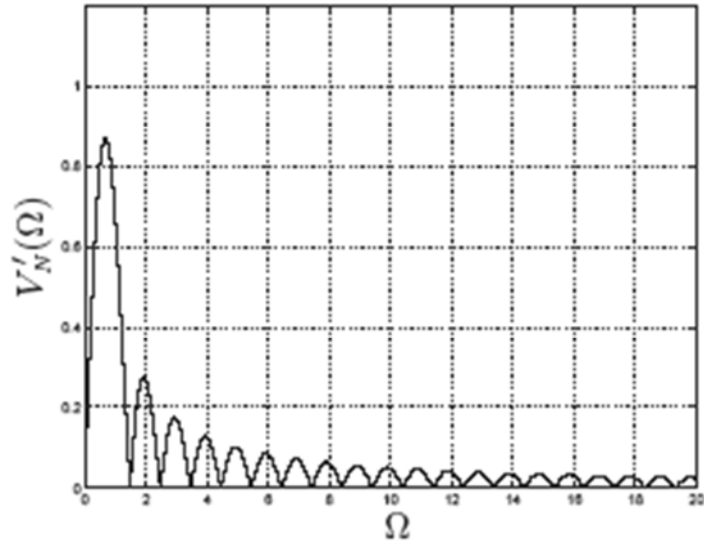
---

- Al fine di confrontare le traiettorie tra di loro e con le caratteristiche del sistema considerato viene ora analizzato il contenuto armonico (spettro) delle traiettorie fin qui prese in considerazione (**si considera il profilo di accelerazione**).
- Per poter effettuare un confronto sono state considerate traiettorie in forma normalizzata, cioè con  $h=1$  e  $T=1$ . Inoltre gli spettri sono espressi in funzione della variabile adimensionale  $\Omega$  definita come

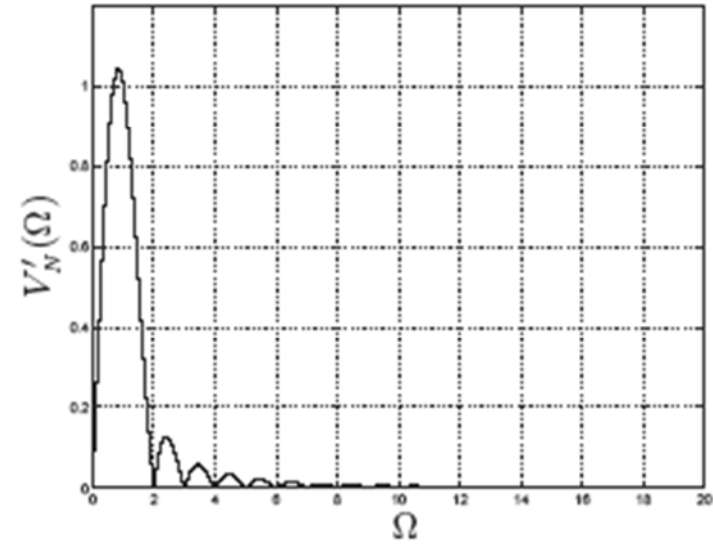
$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

# Analisi spettrale dell'accelerazione

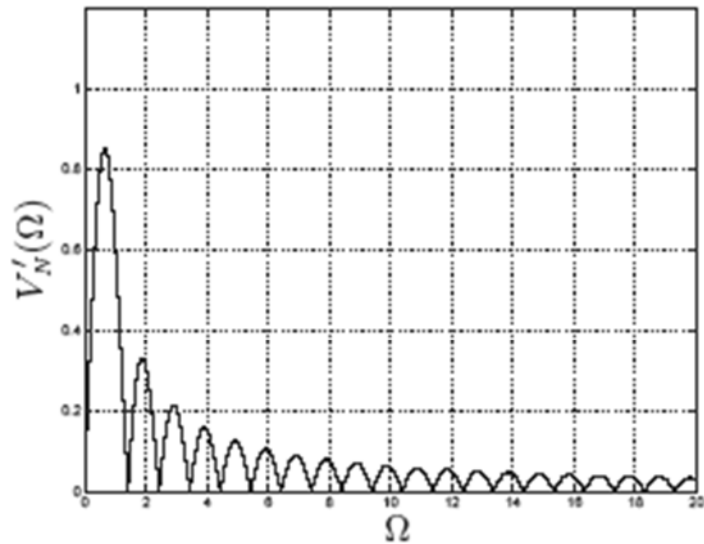
Armonica



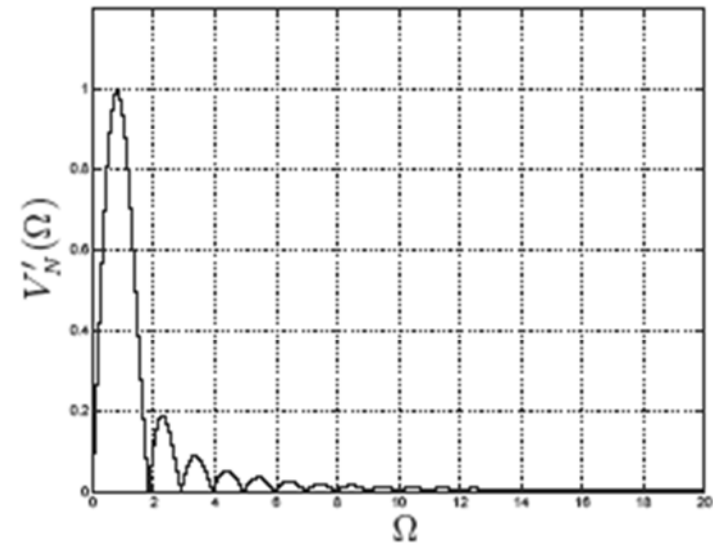
Cicloidale



Polinomiale grado 3

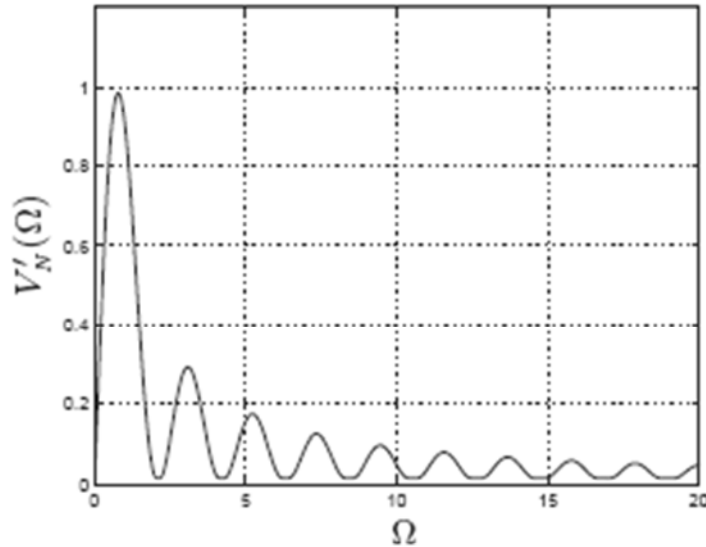


Polinomiale grado 5

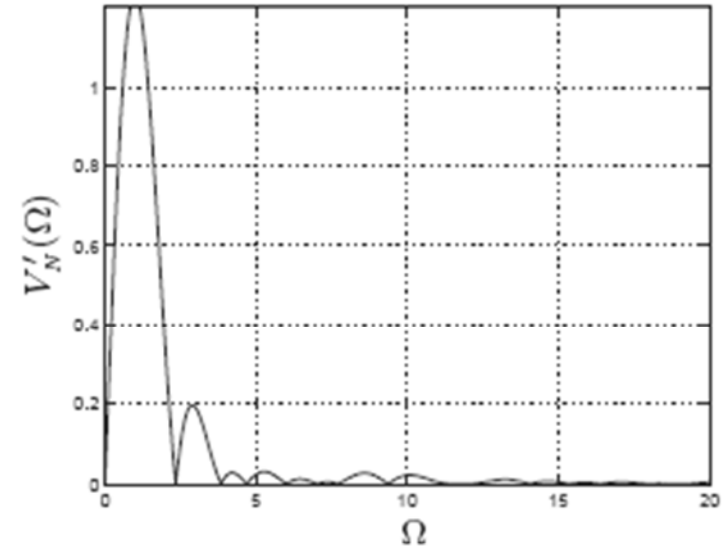


# Analisi spettrale dell'accelerazione

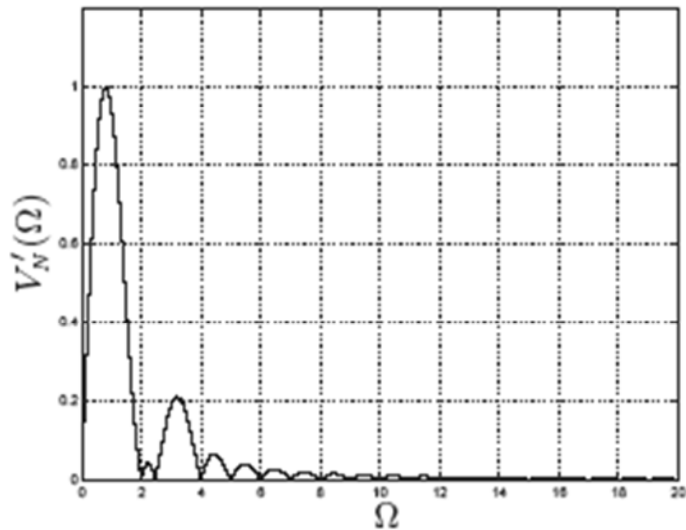
Trapezoidale ( $\alpha = 1/3$ )



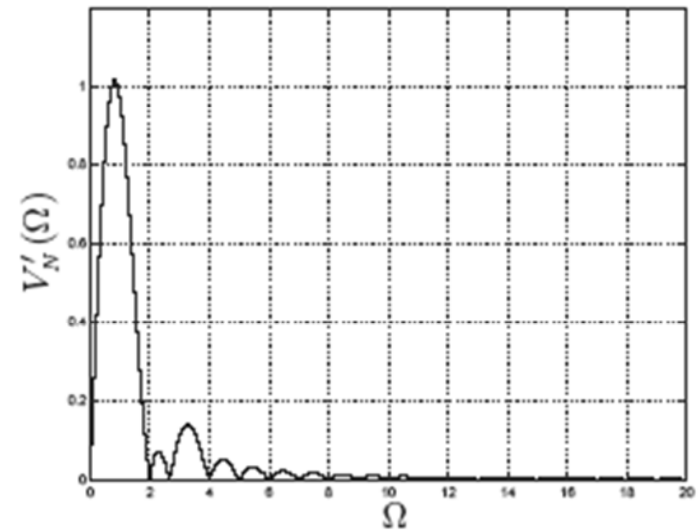
Doppia S ( $\alpha = 1/3, \beta = 1/2$ )



Gutman 1-3

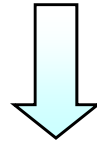


Freudenstein 1-3



# Analisi spettrale dell'accelerazione

- Gli spettri delle accelerazioni mostrati nelle slide precedenti sono stati ottenuti con  $h=1$ ,  $T=1$  e in funzione della variabile adimensionale  $\Omega$ .



Lo spettro reale risulta:

$$V(\omega) = V'(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T / 2\pi} = \frac{h}{T} V'_N(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T / 2\pi}.$$

- La durata della traiettoria ha un duplice effetto sul suo spettro:
  - l'ampiezza di  $V'_N$  viene scalata di  $1/T$
  - le pulsazioni sono scalate di  $T$  (nota che  $\Omega$  è proporzionale a  $\omega T$ )

# Analisi spettrale e scalatura di una traiettoria

- Data una generica legge di moto  $q(t)$  di durata  $T$  e caratterizzata da uno spettro dell'accelerazione  $V(\omega)$ , la traiettoria ottenuta scalando  $q(t)$ , cioè

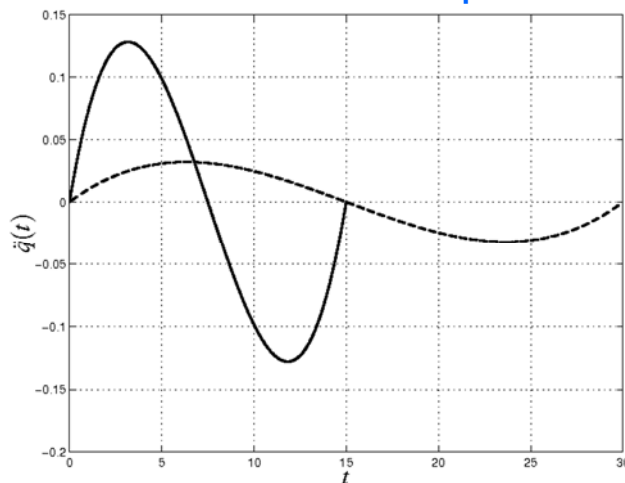
$$q'(t') = q(t) \Big|_{t = \lambda t'}, \quad t' \in [0, T'], \quad \text{con } T' = \frac{T}{\lambda}$$

è caratterizzata da uno spettro

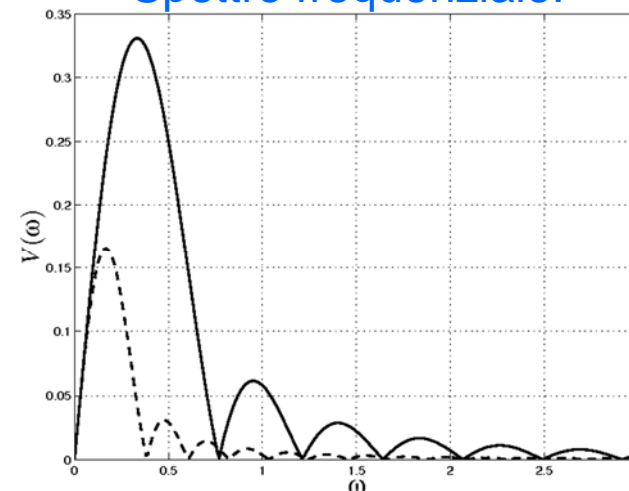
$$V_{\lambda}(\omega) = \lambda V(\omega/\lambda)$$

Esempio:

Andamento temporale:



Spettro frequenziale:



# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

**GENERAZIONE DEL RIFERIMENTO**  
**FINE**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>