

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomtici.html>

# **METODI DI CONTROLLO AVANZATI**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

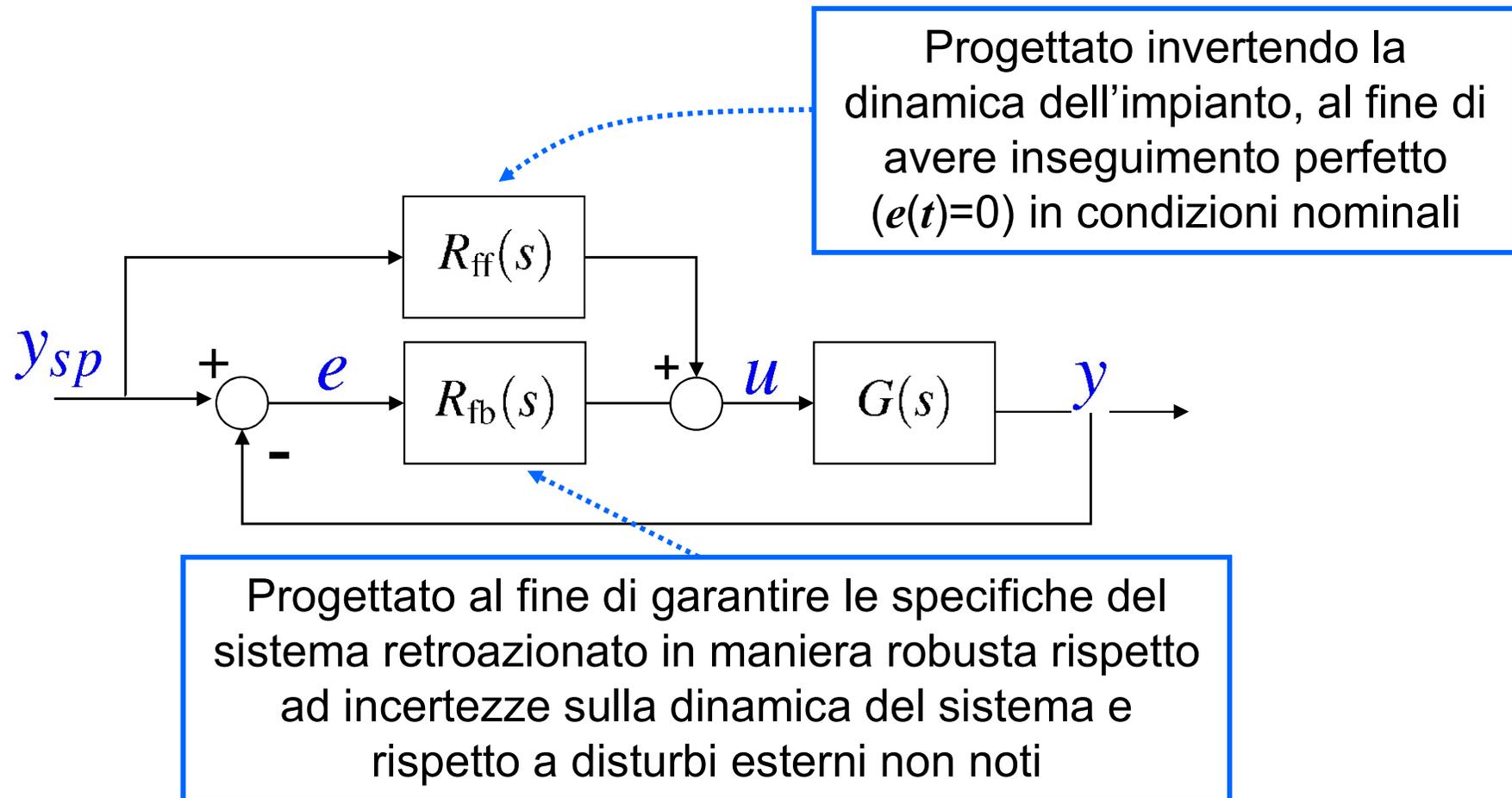
# Metodi di controllo avanzati

---

- Compensazione in avanti del riferimento
- Prefiltraggio del segnale di riferimento
- Controllo in cascata
- Compensazione in avanti di un disturbo misurabile

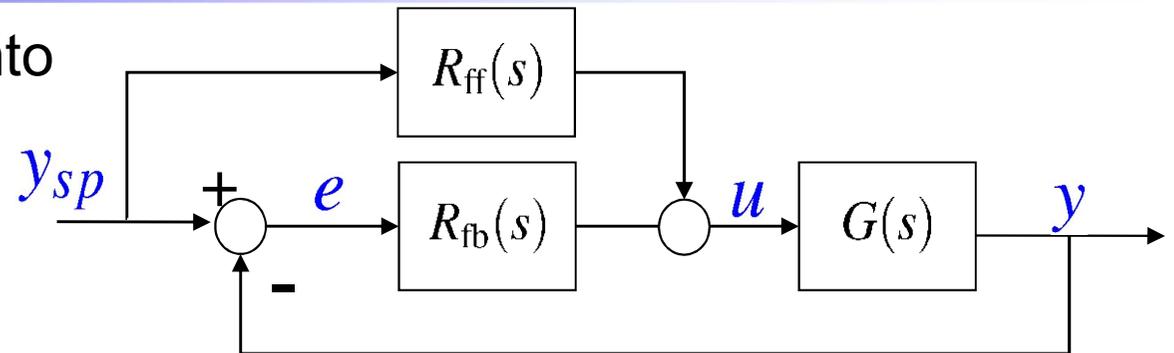
# Compensazione in avanti del riferimento

- Uno schema consente di unire i vantaggi del controllo in avanti (feedforward), ovvero prestazioni ottime in condizioni nominali, con quelli del controllo in retroazione (feedback), ovvero robustezza rispetto alle incertezze è il seguente



# Compensazione in avanti del riferimento

- La funzione di trasferimento tra set-point e uscita si modifica nel seguente modo:



$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \underbrace{\frac{R_{fb}(s)G(s)}{1 + R_{fb}(s)G(s)}}_{\text{Vecchia funzione di sensitività complementare (retroazione)}} + \frac{R_{ff}(s)G(s)}{1 + R_{fb}(s)G(s)}$$

Vecchia funzione di sensitività complementare (retroazione)

$$\text{Se } R_{ff}(s) = G^{-1}(s) \implies \frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = 1 \implies y(t) \equiv y_{sp}(t)$$

Poiché  $G(s)$  è strettamente propria, la  $R_{ff}(s)$  ideale risulterebbe impropria e quindi non fisicamente realizzabile. Tuttavia è possibile ottenere una funzione  $R_{ff}(s)$  che approssima  $G^{-1}(s)$  solo in un preciso intervallo frequenziale

# Compensazione in avanti del riferimento

- Si considera il dominio della frequenza

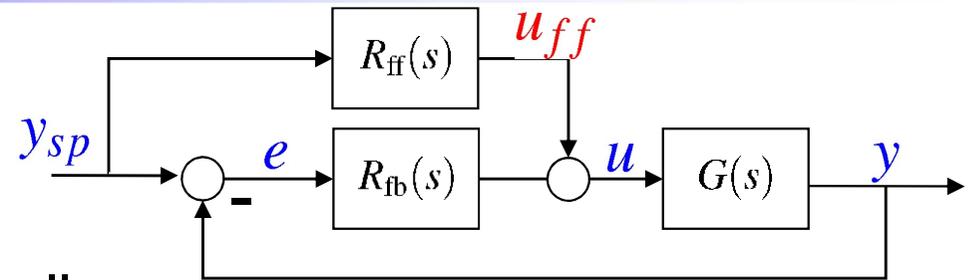
Trasformata di Fourier

$$Y(j\omega) = \frac{R_{fb}(j\omega)G(j\omega) + R_{ff}(j\omega)G(j\omega)}{1 + R_{fb}(j\omega)G(j\omega)} Y_{sp}(j\omega)$$

- La relazione  $R_{ff}(j\omega) = G^{-1}(j\omega)$  dovrà essere soddisfatta per quelle pulsazioni dove lo spettro del segnale di riferimento è diverso da zero ( $|Y_{sp}(j\omega)| \neq 0$ )  $\implies$  aggiunta di poli in  $R_{ff}(s)$  per fisica realizzabilità
- **Altre problematiche realizzative:**
  - Necessità di avere un modello affidabile di  $G(s)$  nel campo di pulsazioni in cui agisce il segnale di riferimento
  - Moderazione della variabile di controllo

# Compensazione in avanti del riferimento

- Moderazione della variabile di controllo



La funzione di sensitività del controllo

risulta 
$$\frac{U(s)}{Y_{sp}(s)} = Q(s) = \frac{R_{fb}(s)}{1 + R_{fb}(s)G(s)} + \frac{R_{ff}(s)}{1 + R_{fb}(s)G(s)}$$

Nell'ipotesi che  $|R_{fb}(s)G(s)| \ll 1 \quad \forall \omega > \omega_c$

si ha che

$$|Q(j\omega)| \approx |R_{fb}(j\omega)| + |R_{ff}(j\omega)| \quad \forall \omega > \omega_c$$

Quindi se  $R_{ff}(s) = G(s)^{-1}$  e  $G(s)$  ha grado relativo  $> 0$  si ha che la funzione di sensitività del controllo presenta un andamento passa alto



Introdurre poli fuori banda in  $R_{ff}(s)$  e/o evitare di invertire poli di fuori banda  $G(s)$

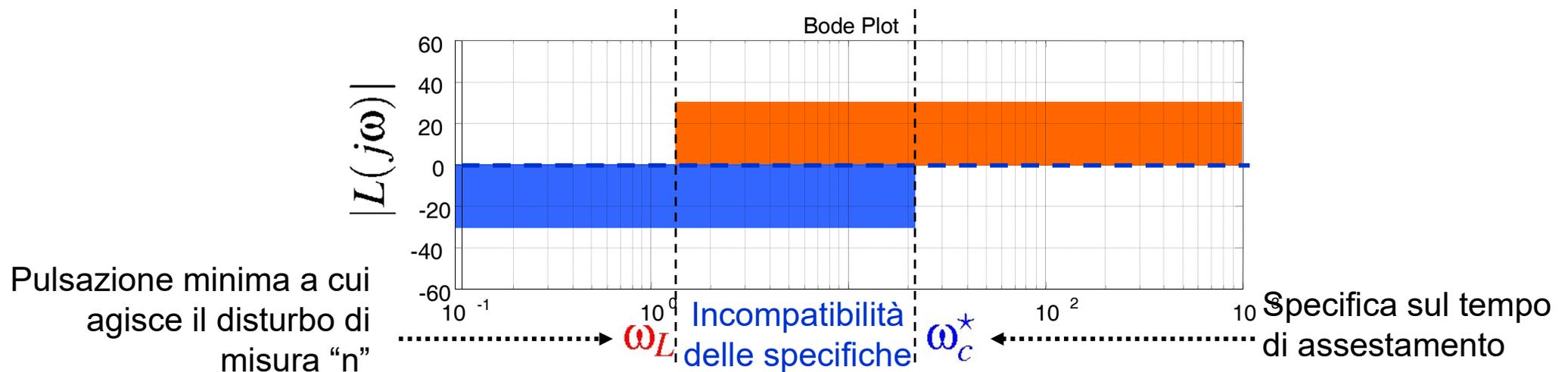
# Compensazione in avanti del riferimento

- Impiego dell'azione in avanti
  - Presenza di misure “rumorose” (o di ritardi) che limitano la massima pulsazione di attraversamento del guadagno di anello  $L(j\omega)$  ad assumere “bassi” valori



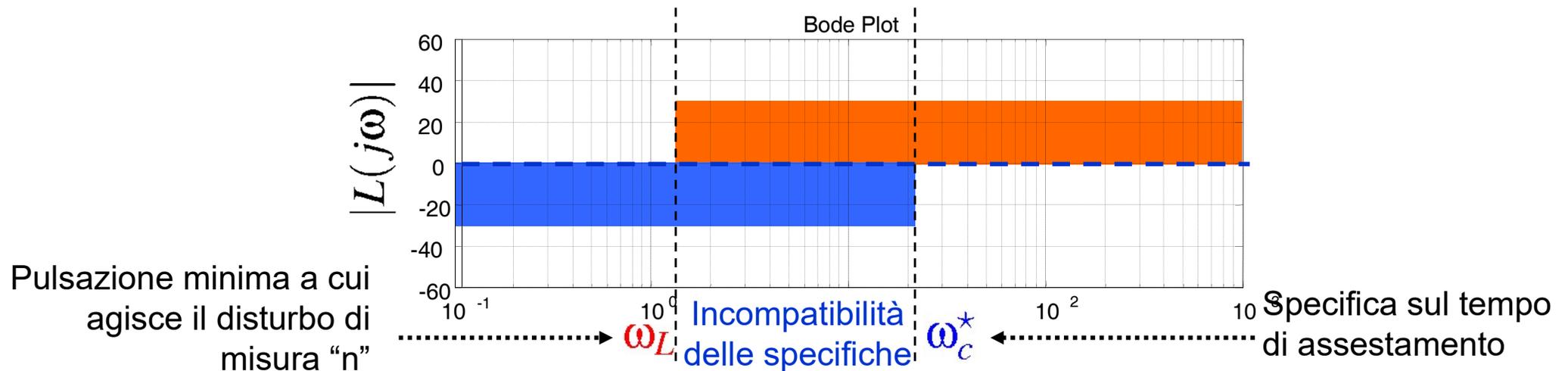
Dinamica lenta del sistema in retroazione

- Presenza di specifiche sull'uscita controllata che richiedono un tempo di assestamento molto più basso rispetto a quello ottenibile con il solo controllore in retroazione



# Compensazione in avanti del riferimento

- Soluzione nel caso di incompatibilità delle specifiche



- Progettare il regolatore in retroazione in modo da garantire robustezza asintotica e bassa sensibilità ai disturbi
- Progettare l'azione in avanti al fine di migliorare il transitorio dell'uscita (in termini di velocità)

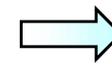
# Compensazione in avanti del riferimento

- Esempio

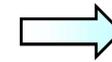
$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.01s)(1 + 0.0004s)^2}$$

Specifiche:

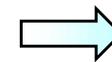
- $e_\infty = 0$  (ingresso a gradino)
- $T_a \leq 0.02 \text{ s}$ ,  $S\% \leq 20\%$
- Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo "n" che agisce nello spettro  $\omega_n \geq 50 \text{ Hz}$  ( $=314 \text{ rad/s}$ )



Polo nell'origine

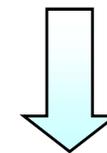
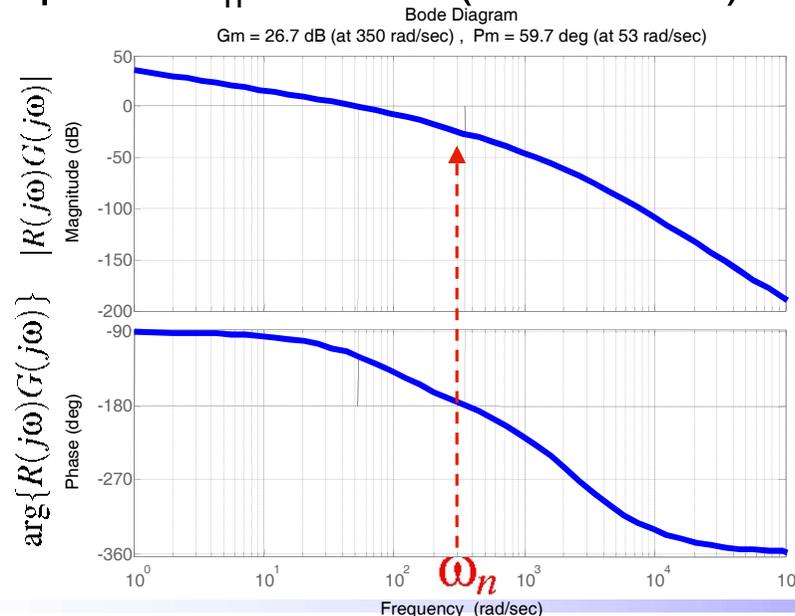


$$\omega_c^* \approx 300 \text{ rad/s}, M_f \approx 50^\circ$$



$$\omega_c^* \ll 314 \text{ rad/s}$$

Specifiche contrastanti

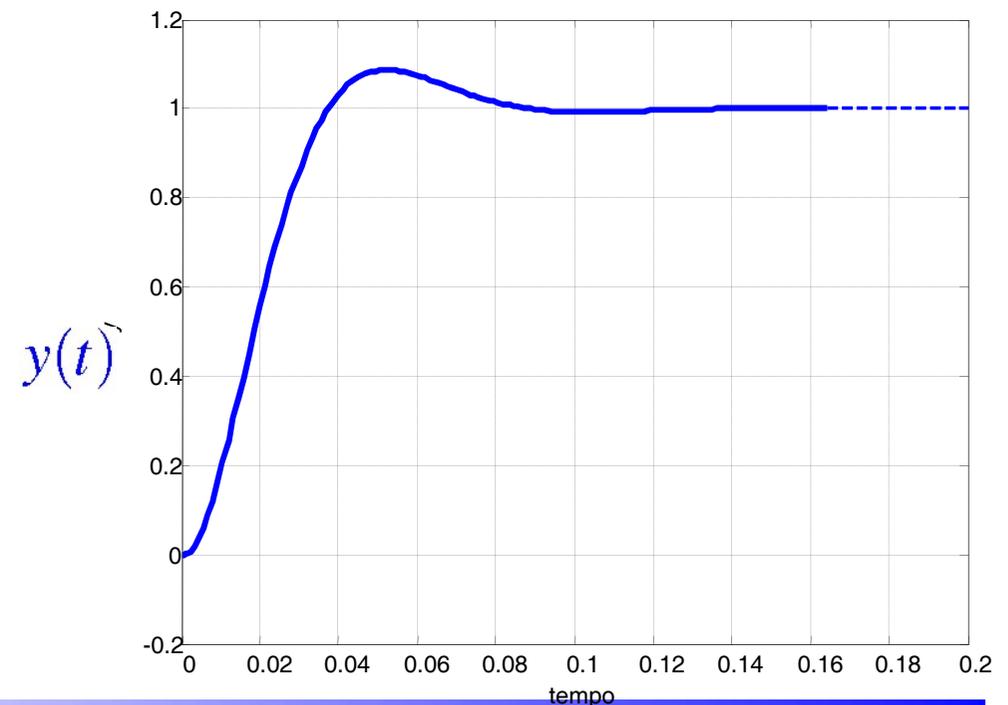
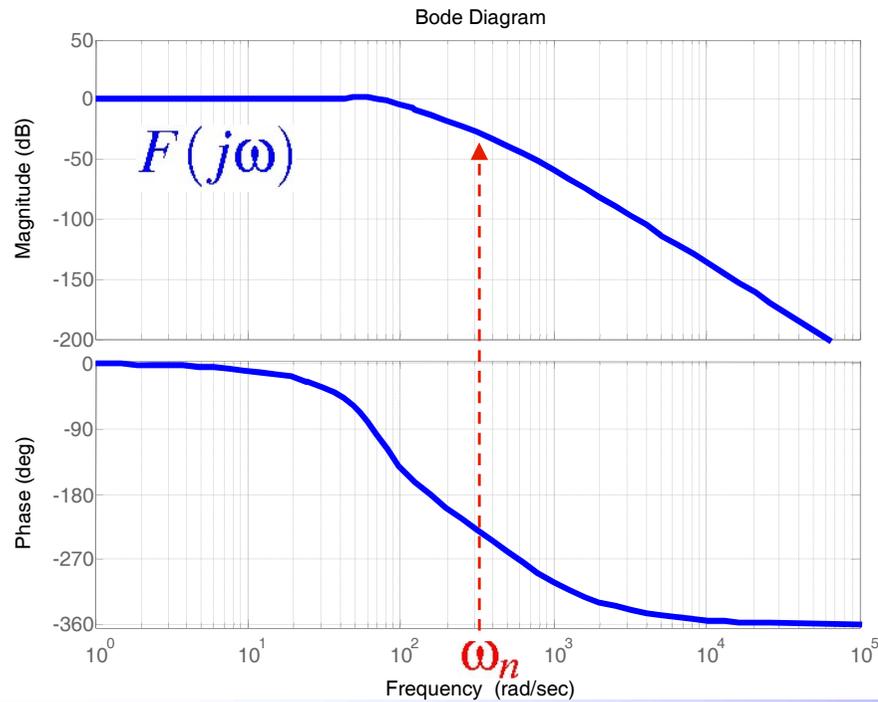
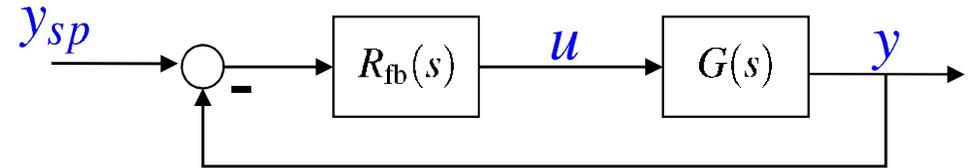


Il regolatore è progettato assumendo  $\omega_c^* \approx 50$

$$R(s) = \frac{60}{s}$$

# Compensazione in avanti del riferimento

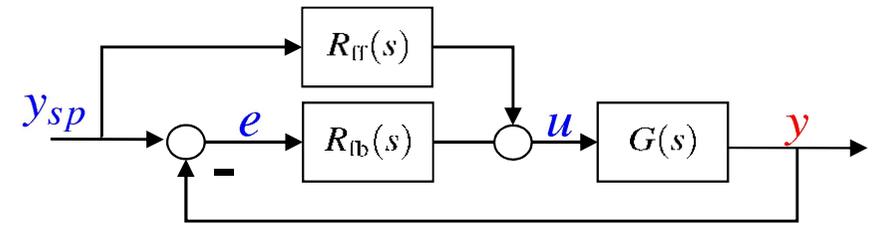
- Senza compensazione in avanti
- $|F(j\omega)|_{\text{dB}} < -20, \omega > 314\text{rad/s}$
- $T_a$  troppo alto



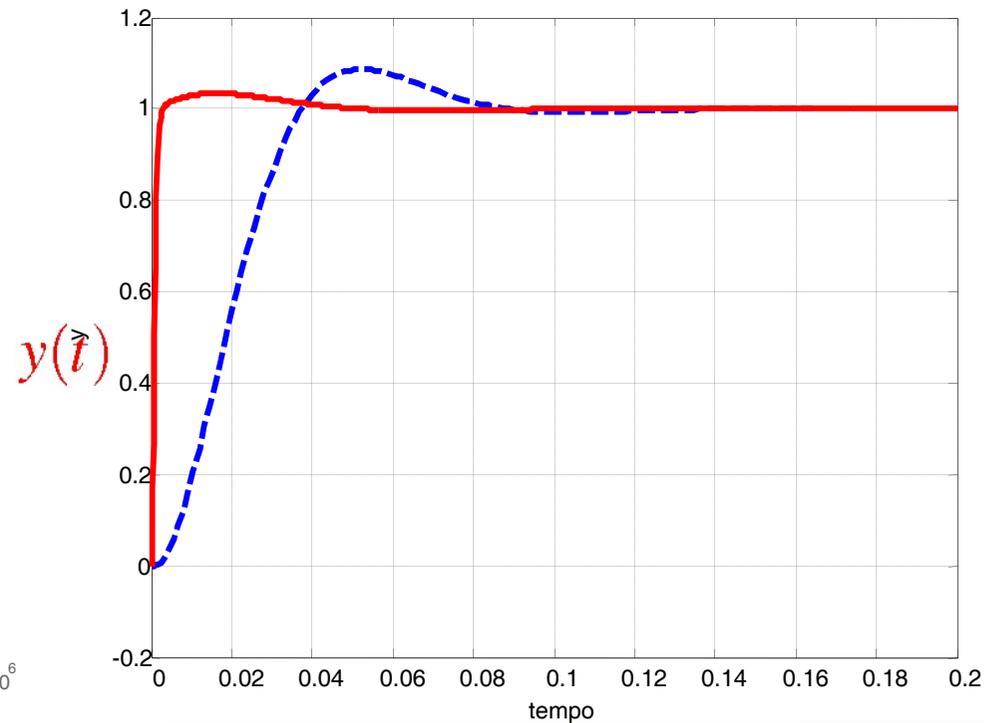
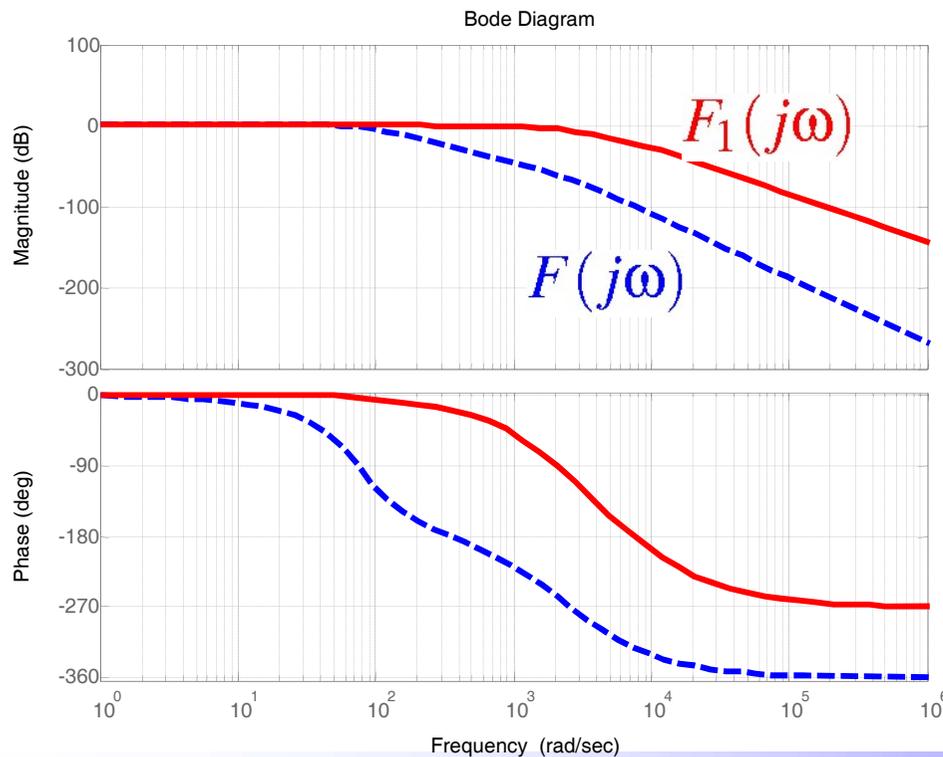
# Compensazione in avanti del riferimento

- Si considera ora un'azione in avanti che approssima  $G^{-1}(s)$  invertendo il polo più lento (e quindi dominante) in  $s = -100$

$$R_{ff}(s) = \frac{(1 + 0.01s)}{(1 + 0.0001s)} \quad \Rightarrow \quad F_1(s) = F(s) + \frac{R_{ff}(s)G(s)}{1 + R_{fb}(s)G(s)}$$



- La funzione di trasferimento tra disturbo "n" e uscita rimane  $-F(s)$



# Compensazione in avanti del riferimento

- Implementazione dell'azione in avanti ( $u_{ff}(t)$ ):

- Data una fdt

$$G(s) = K \frac{b(s)}{a(s)} = K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

a fase minima (poli-zeri “stabili”), e con grado relativo  $\rho = n - m$ , si può scrivere

$$G^{-1}(s) = \frac{1}{K} \frac{a(s)}{b(s)} = c_\rho s^\rho + c_{\rho-1} s^{\rho-1} + \dots + c_0 + G_0(s)$$

con  $G_0(s)$  strettamente propria

- L'azione in avanti  $U_{ff}(s) = R_{ff}(s)Y_{sp}(s)$  con  $R_{ff}(s) = G^{-1}(s)$  può essere riscritta nel dominio temporale come

$$u_{ff}(t) = c_\rho y_{sp}^{(\rho)}(t) + \dots + c_1 y_{sp}^{(1)}(t) + c_0 y_{sp}(t) + \int_0^t \gamma_0(t - \tau) y_{sp}(\tau) d\tau$$

$$\text{con } \gamma_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\}$$

## Compensazione in avanti del riferimento

$$u_{ff}(t) = \underbrace{c_\rho y_{sp}^{(\rho)}(t) + \dots + c_1 y_{sp}^{(1)}(t) + c_0 y_{sp}(t)}_{\text{Combinazione lineare del riferimento e delle sue derivate fino all'ordine } \rho} + \int_0^t \gamma_0(t-\tau) y_{sp}(\tau) d\tau$$

Combinazione lineare del riferimento e delle sue derivate fino all'ordine  $\rho$

Riferimento filtrato dalla fdt  $G_0(s)$

- Affinchè l'azione di controllo in avanti  $u_{ff}(t)$  risulti limitata occorre che il riferimento  $y_{sp}(t)$  e tutte le sue derivate fino all'ordine  $\rho$  siano limitate (continuità fino all'ordine  $\rho-1$ )



Importanza di una scelta opportuna del segnale di set-point

- Particolarmente semplice risulta il caso in cui la fdt  $G(s)$  non presenta zeri

$$u_{ff}(t) = c_\rho y_{sp}^{(\rho)}(t) + \dots + c_1 y_{sp}^{(1)}(t) + c_0 y_{sp}(t)$$

# Compensazione in avanti del riferimento

- Esempio

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.01s)(1 + 0.002s)}$$

Specifiche:

- $e_\infty = 0$  (ingresso a gradino)
- $T_a \leq 0.02 \text{ s}$ ,  $S\% \leq 20\%$
- Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo "n" che agisce nello spettro  $\omega_n \geq 50 \text{ Hz}$  ( $=314 \text{ rad/s}$ )



Polo nell'origine

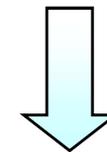
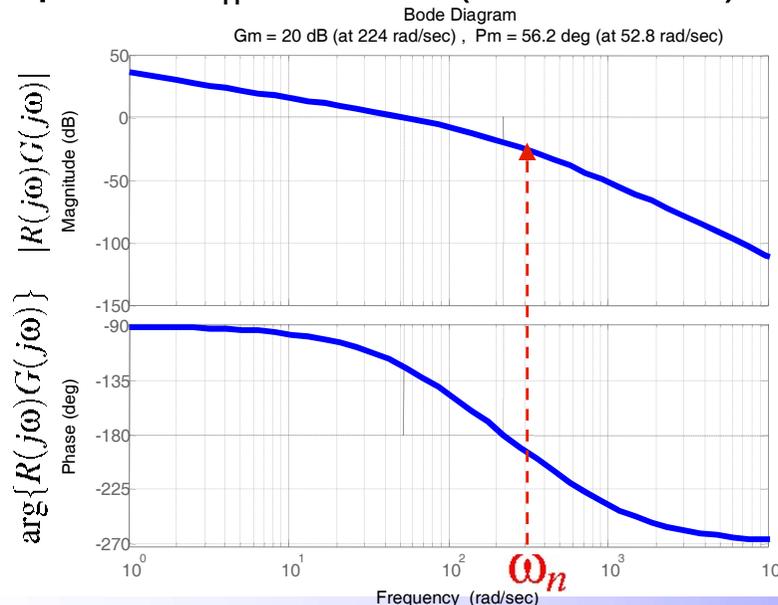


$\omega_c^* \approx 300 \text{ rad/s}$ ,  $M_f \approx 50^\circ$



$\omega_c^* \ll 314 \text{ rad/s}$

Specifiche contrastanti



Il regolatore è progettato assumendo  $\omega_c^* \approx 55$

$$R(s) = \frac{60}{s}$$

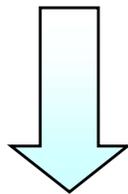
# Compensazione in avanti del riferimento

- Si considera una traiettoria polinomiale di grado 3 (continuità di posizione e velocità)

$$y_{sp}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

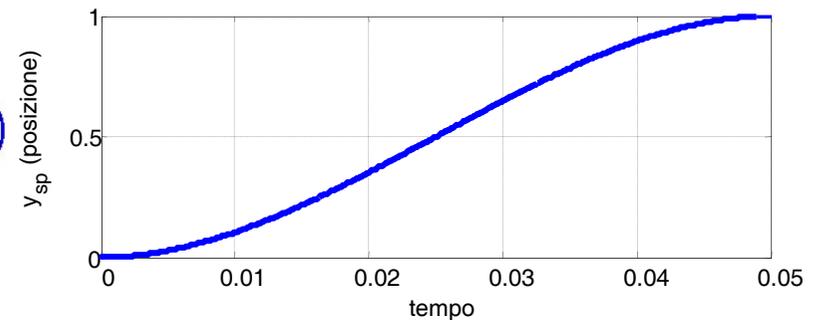
di durata  $t_d = 0.02\text{ s}$

$$\begin{cases} y_{sp}(0) & = & 0 \\ \dot{y}_{sp}(0) & = & 0 \\ y_{sp}(t_d) & = & 1 \\ \dot{y}_{sp}(t_d) & = & 0 \end{cases}$$

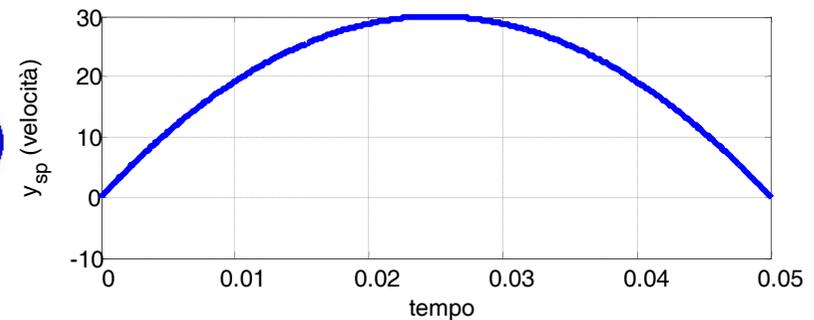


$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \\ a_2 & = & 1200 \\ a_3 & = & -16000 \end{cases}$$

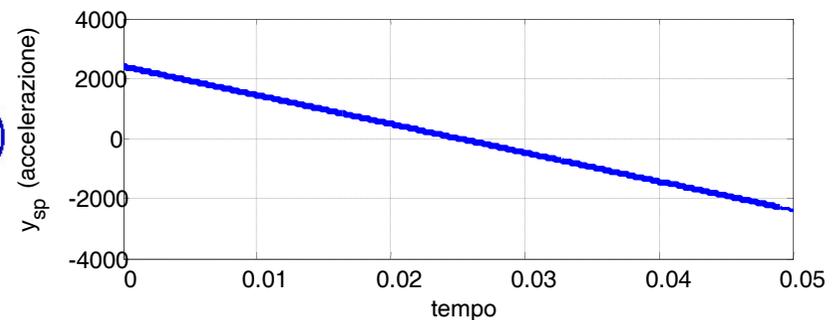
$$y_{sp}(t)$$



$$\dot{y}_{sp}(t)$$

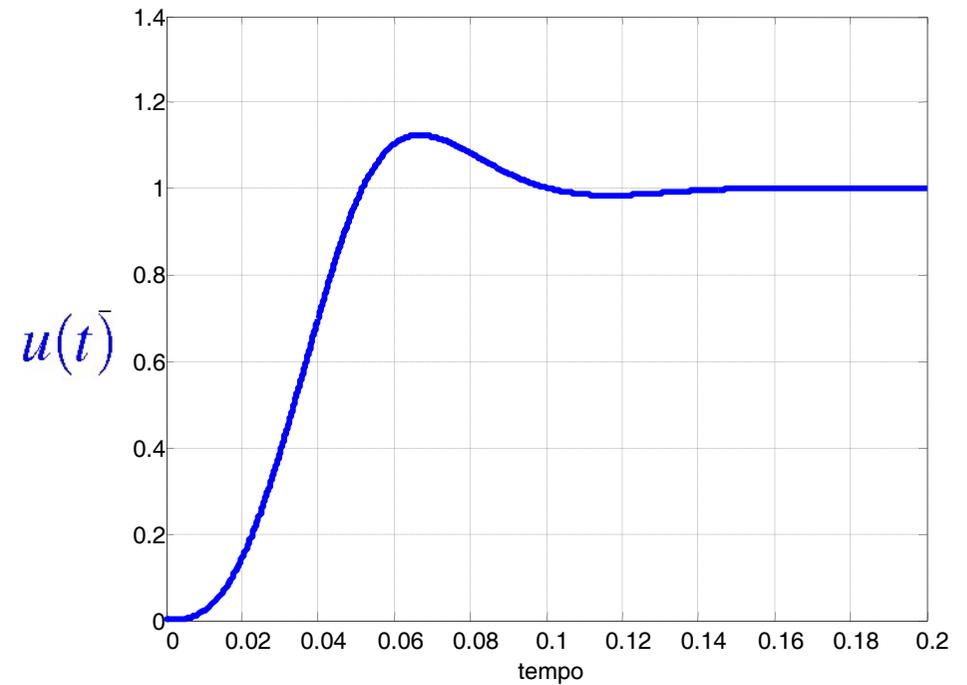
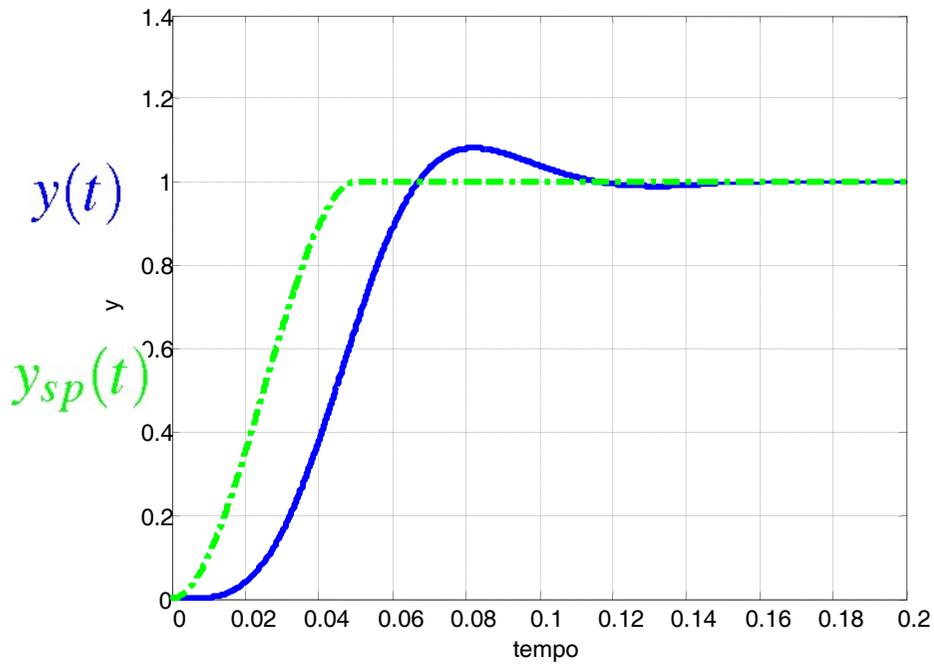
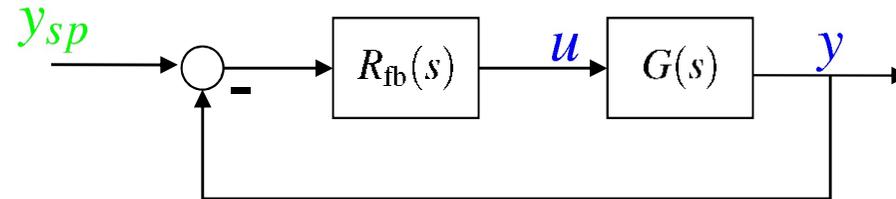


$$\ddot{y}_{sp}(t)$$



# Compensazione in avanti del riferimento

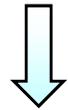
- Senza compensazione in avanti



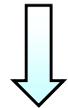
# Compensazione in avanti del riferimento

- Calcolo dell'azione in avanti ottenuta invertendo

$$G(s) = \frac{1}{0.00002s^2 + 0.012s + 1}$$



$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = 0.00002s^2 + 0.012s + 1$$

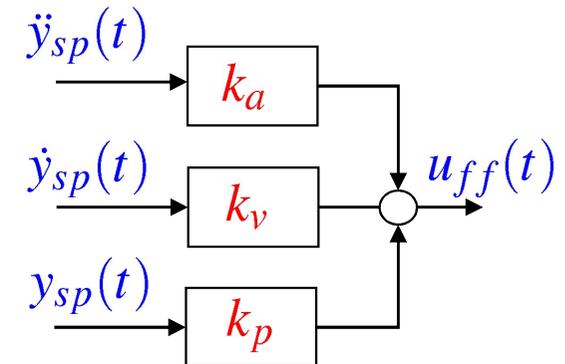
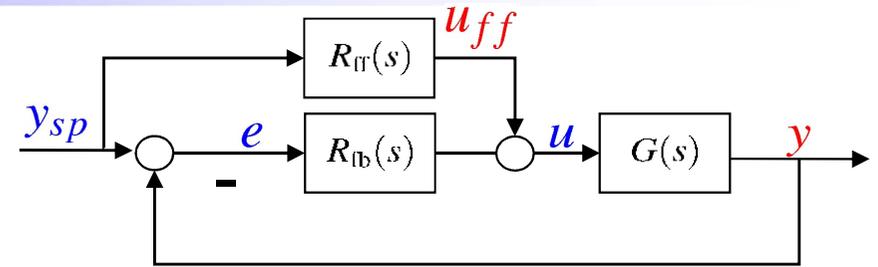


$$U_{ff}(s) = R_{ff}(s) Y_{sp}(s) = 0.00002 s^2 Y_{sp}(s) + 0.012 s Y_{sp}(s) + Y_{sp}(s)$$



Antitrasformando e interpretando l'operatore "s" come operatore di derivazione

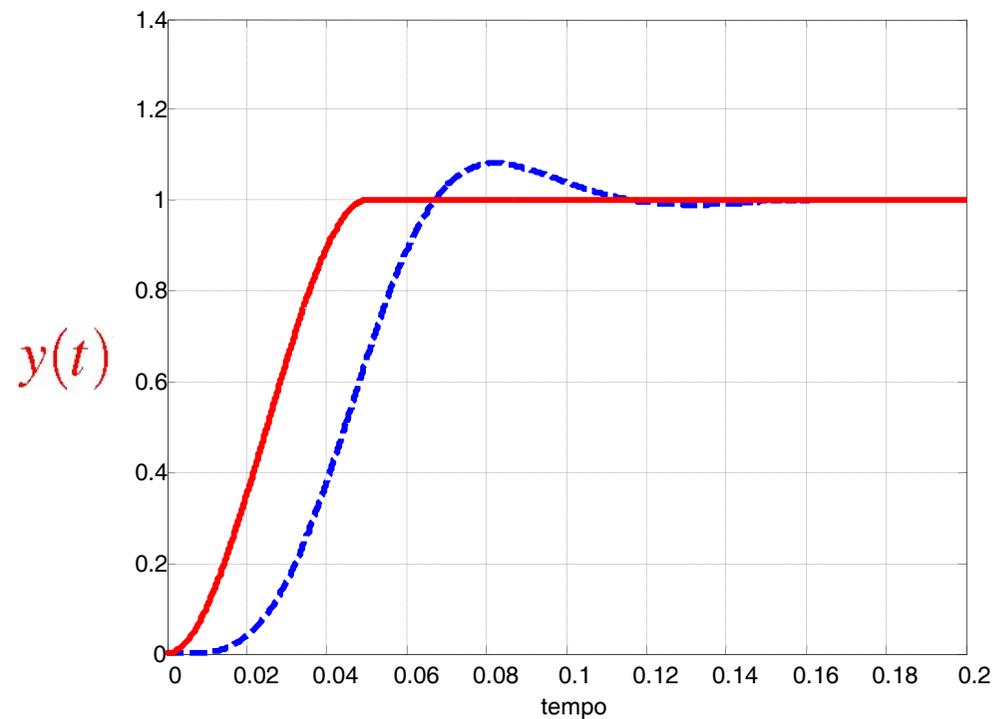
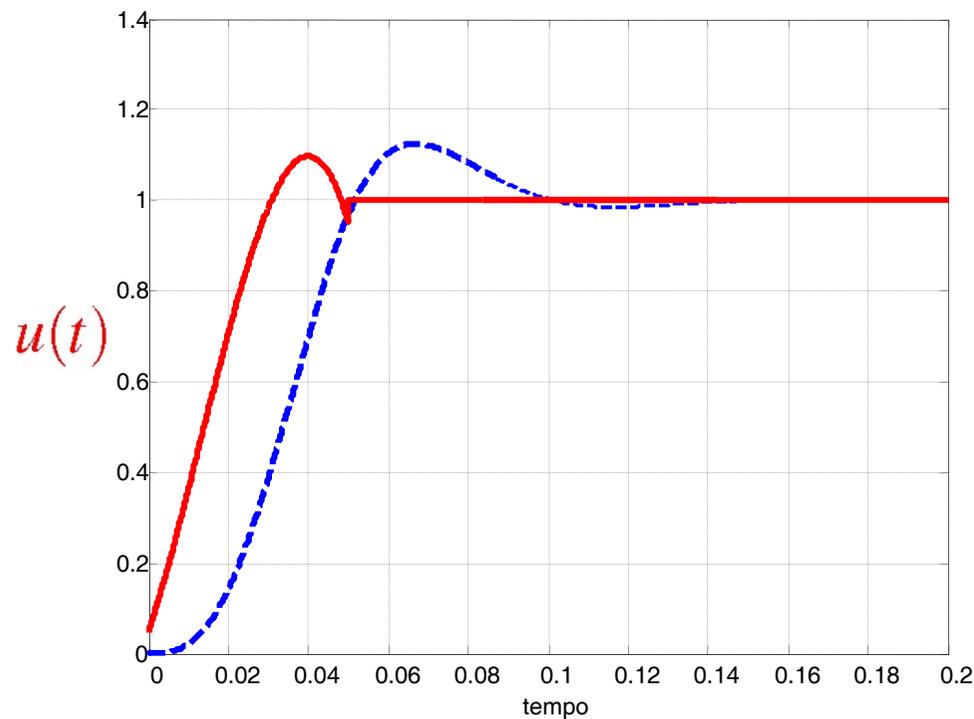
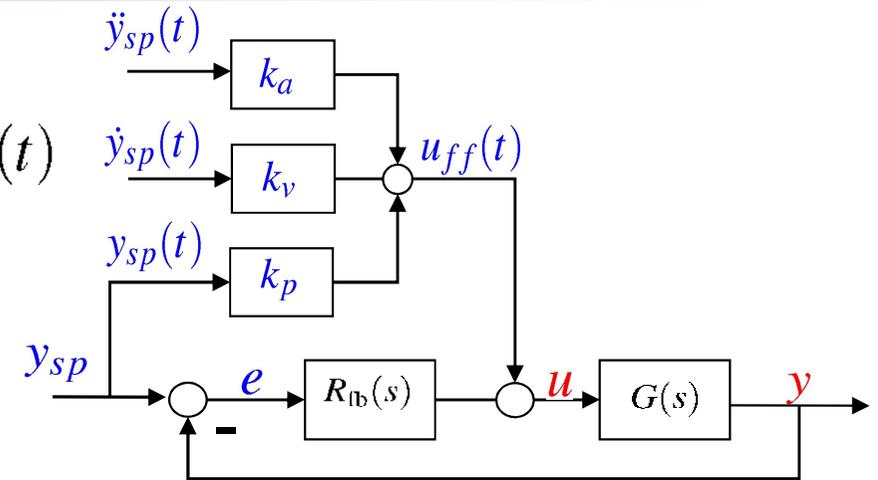
$$u_{ff}(t) = \underbrace{0.00002}_{k_a} \ddot{y}_{sp}(t) + \underbrace{0.012}_{k_v} \dot{y}_{sp}(t) + \underbrace{1}_{k_p} y_{sp}(t)$$



# Compensazione in avanti del riferimento

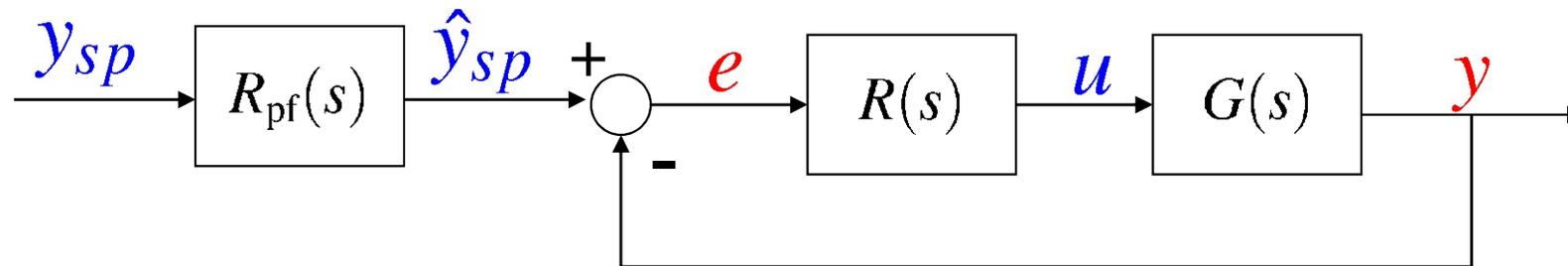
- Sfruttando l'azione in avanti

$$u_{ff}(t) = 0.00002 \ddot{y}_{sp}(t) + 0.012 \dot{y}_{sp}(t) + y_{sp}(t)$$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

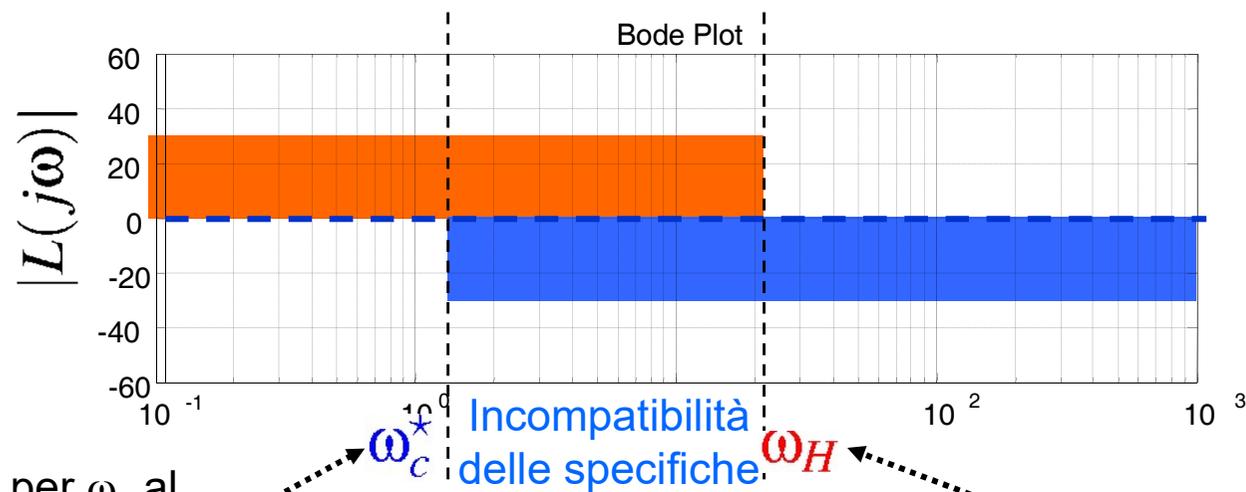
- Filtraggio del segnale di riferimento al fine di modificarne le componenti frequenziali che sono iniettate nel sistema in retroazione



- **Obiettivi:**
  - a) Progettare  $R_{pf}(s)$  al fine di moderare la variabile di controllo senza alterare le prestazioni dinamiche (tempo di assestamento) del sistema chiuso in retroazione
  - b) Progettare  $R_{pf}(s)$  al fine di ampliare la banda (“open loop”) del sistema controllato
  - c) Cancellare dinamiche parassite del sistema “closed loop”

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- **Caso a)** Impiego del prefiltraggio per moderare la variabile di controllo
  - Presenza di limiti di attuazione e di specifiche su  $T_a$  “blande” che spingerebbero ad assumere una pulsazione di attraversamento  $\omega_c \approx \omega_c^*$  bassa
  - Presenza di disturbi sull’uscita “d” collocati a pulsazioni  $\omega \approx \omega_H$  con  $\omega_H > \omega_c^*$  che obbliga a imporre pulsazioni di attraversamento  $\omega_c > \omega_c^*$



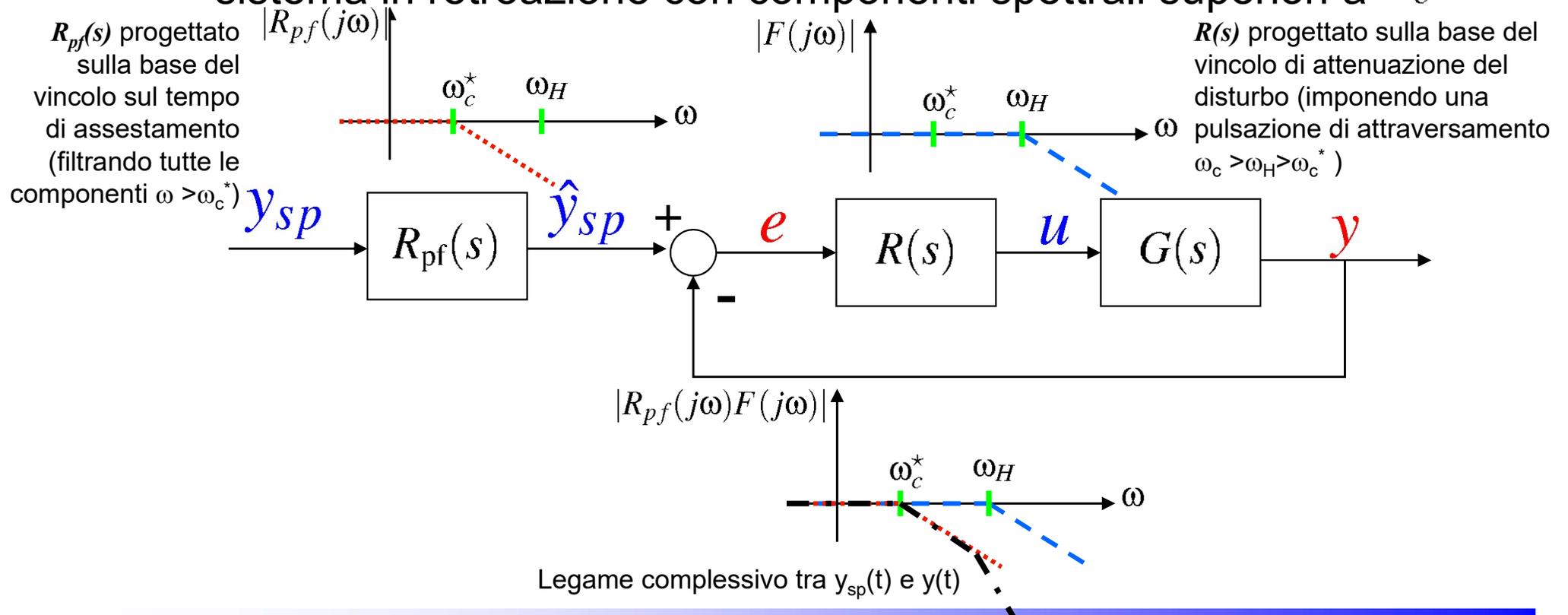
Valore desiderato per  $\omega_c$  al fine di rispettare le specifiche dinamiche e moderare lo sforzo di controllo

Massima pulsazione a cui agisce il disturbo “d”

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

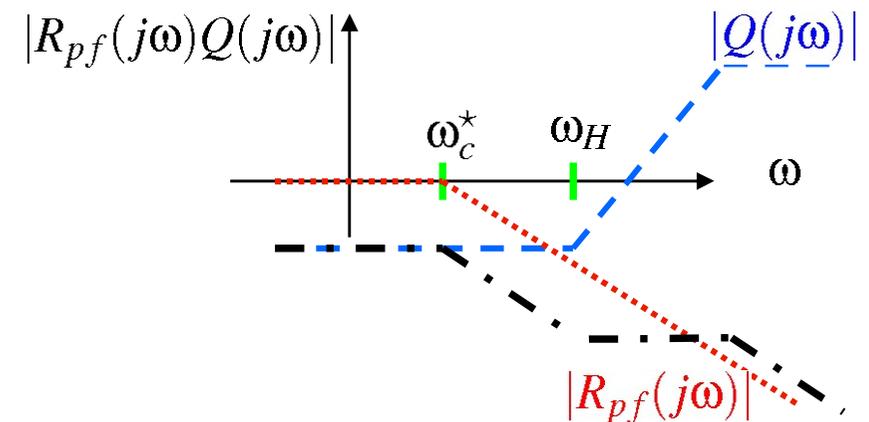
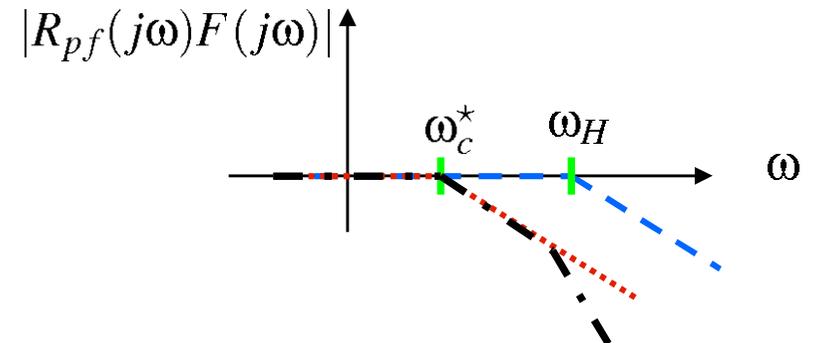
- **Caso a) Soluzione al problema**

- 1) Progettare  $R(s)$  in modo da attenuare il disturbo di tipo “ $d$ ” nel campo di frequenze in cui agisce (imponendo necessariamente delle dinamiche “veloci” al sistema in retroazione rispetto ai tempi di assestamento richiesti e alla necessità di moderare lo sforzo di controllo)
- 2) “Smussare” il segnale di riferimento in modo da non “eccitare” il sistema in retroazione con componenti spettrali superiori a  $\omega_c^*$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Dalla funzione di sensitività complementare complessiva si evince che il prefiltraggio del riferimento modifica (peggiora) il comportamento dinamico del sistema in retroazione
- D'altronde, considerando un filtraggio di tipo passa basso, la funzione di sensitività del controllo complessiva  $|R_{pf}(j\omega)Q(j\omega)|$  risulta attenuata in maniera considerevole alle alte frequenze



Il filtro  $R_{fp}(s)$  dovrebbe:

- avere guadagno statico unitario ( $R_{fp}(0) = 1$ ) al fine di non alterare il valore a regime di  $y(t)$
- essere un filtro passa basso con pulsazione di rottura intorno a  $\omega_c^*$

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Esempi di filtri

- Filtro del primo ordine:  $R_{\text{pf}}(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \tau = \frac{1}{\omega_c^*}$

- Filtro del secondo ordine reale:  $R_{\text{pf}}(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad \tau_1 \approx \tau_2 = \frac{0.65}{\omega_c^*}$

- Filtri “complessi”: es. filtri di Butterworth  $R_{\text{pf}}(s) = \frac{1}{B_n(s)}$

Ordine

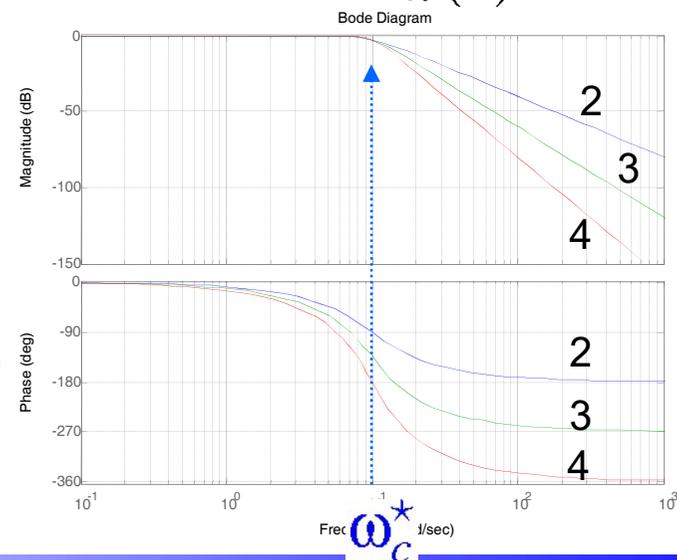
1  $B_1(s) = s' + 1$

2  $B_2(s) = s'^2 + 1.414s' + 1$

3  $B_3(s) = (s'^2 + s' + 1)(s' + 1)$

4  $B_4(s) = (s'^2 + 0.765s' + 1)(s'^2 + 1.848s' + 1)$

$$s' = \frac{s}{\omega_c^*}$$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- **Caso a) Esempio**

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(0.05s+1)}$$

Specifiche:

- 1)  $e_\infty = 0$  (ingresso a gradino)
- 2)  $T_a \leq 6 \text{ s}$ ,  $S\% \leq 20\%$
- 3) Attenuazione di almeno 10 dB di un disturbo “ $d$ ” che agisce nello spettro  $\omega_d \leq 3 \text{ rad/s}$



Polo nell'origine

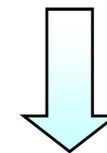
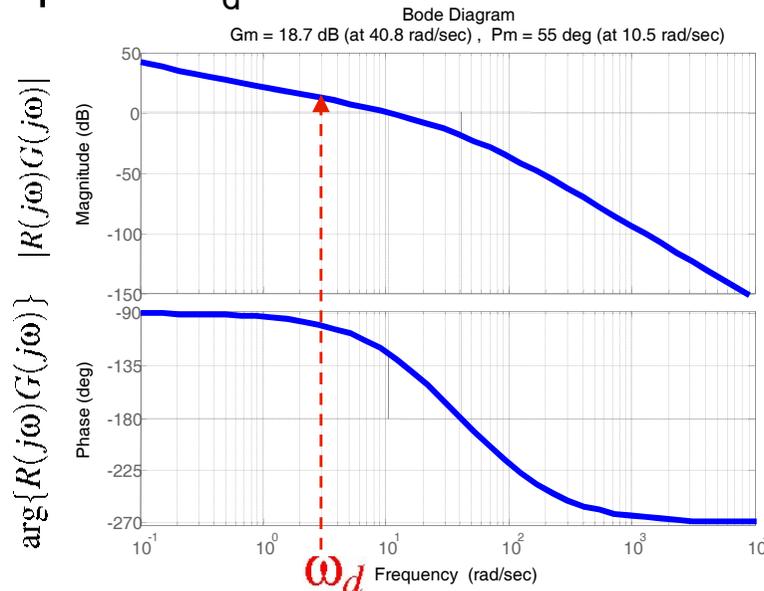


$\omega_c^* \approx 1 \text{ rad/s}$ ,  $M_f \approx 50^\circ$



$\omega_c^* \gg 3 \text{ rad/s}$

Specifiche contrastanti

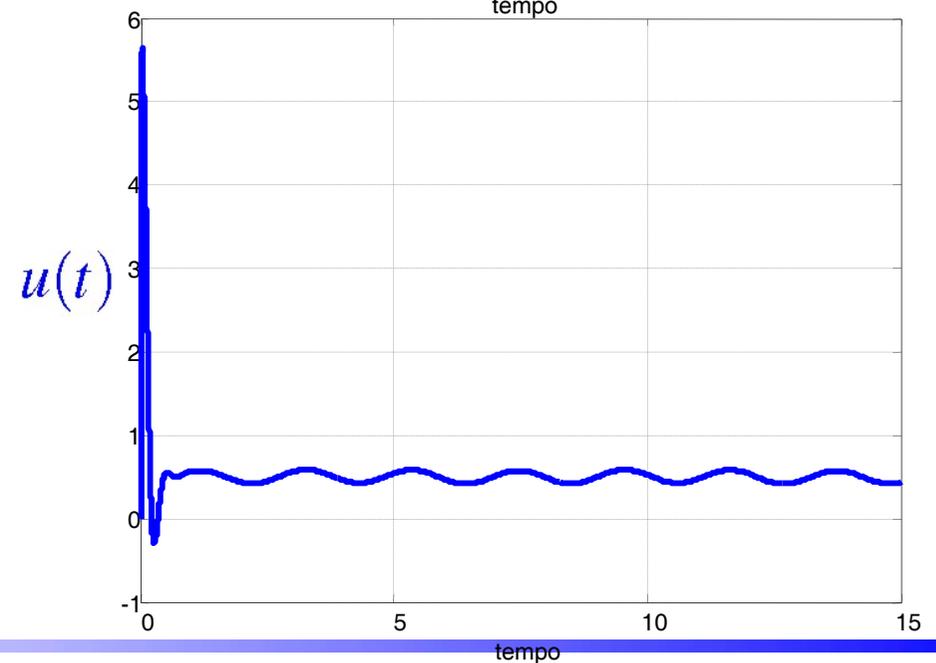
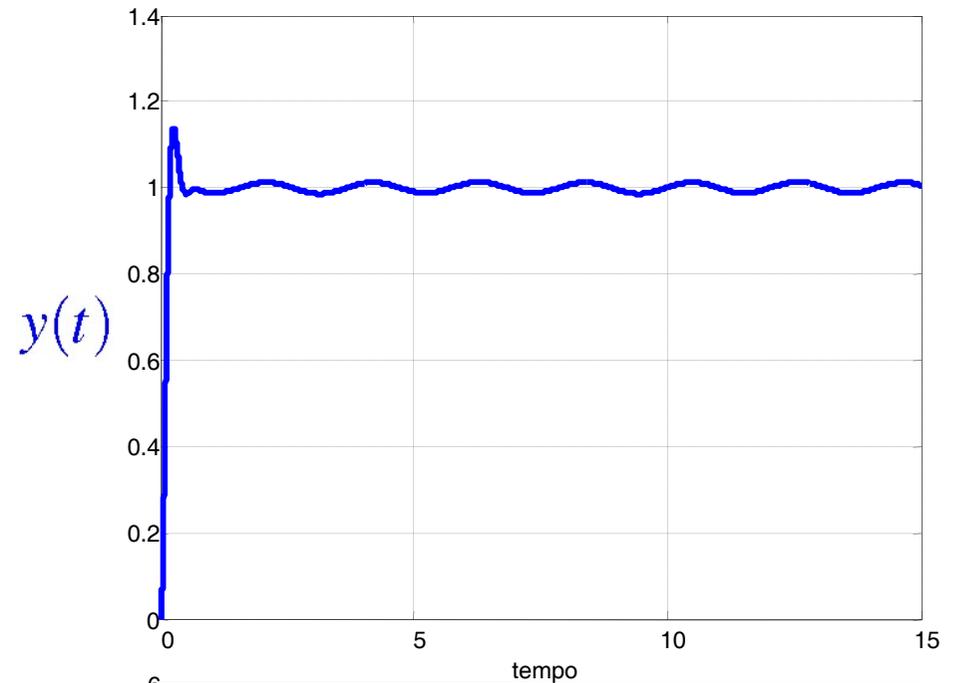
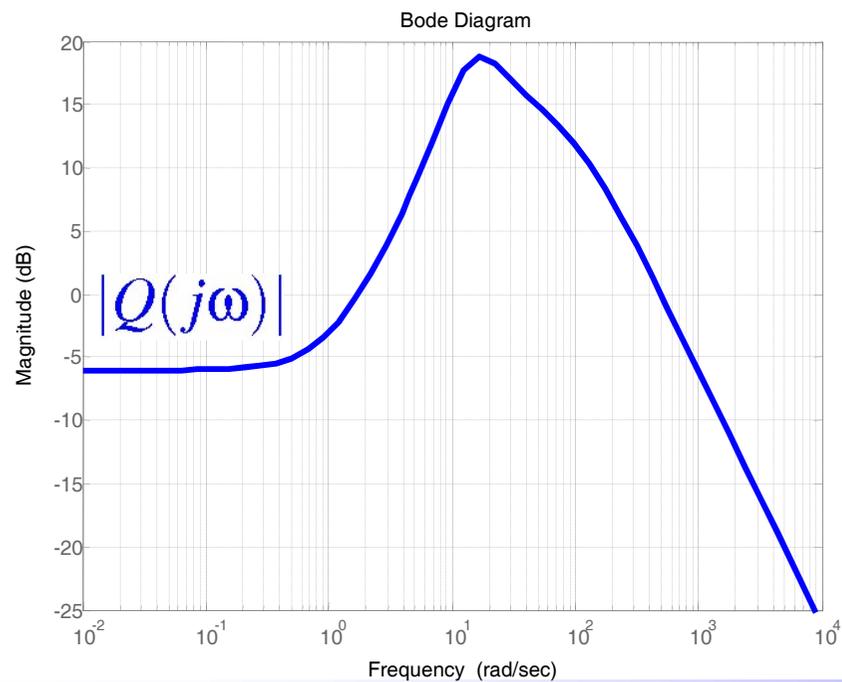


Il regolatore è progettato assumendo  $\omega_c^* \approx 10$

$$R(s) = \frac{6(s+1)}{s(0.012s+1)}$$

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Senza pre-filtro
- $d(t) = 0.05 \sin(3t) + 0.01 \sin(t)$



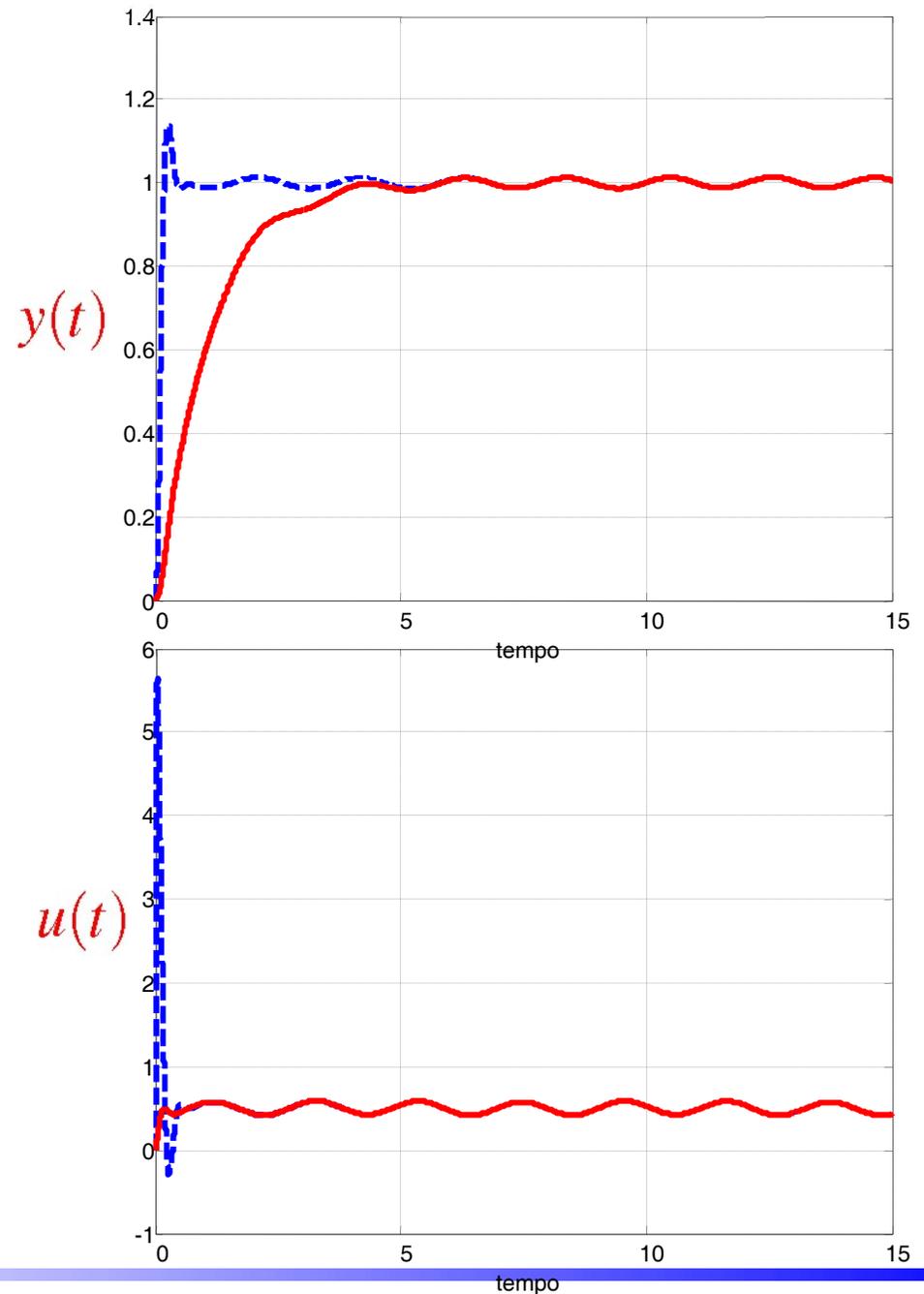
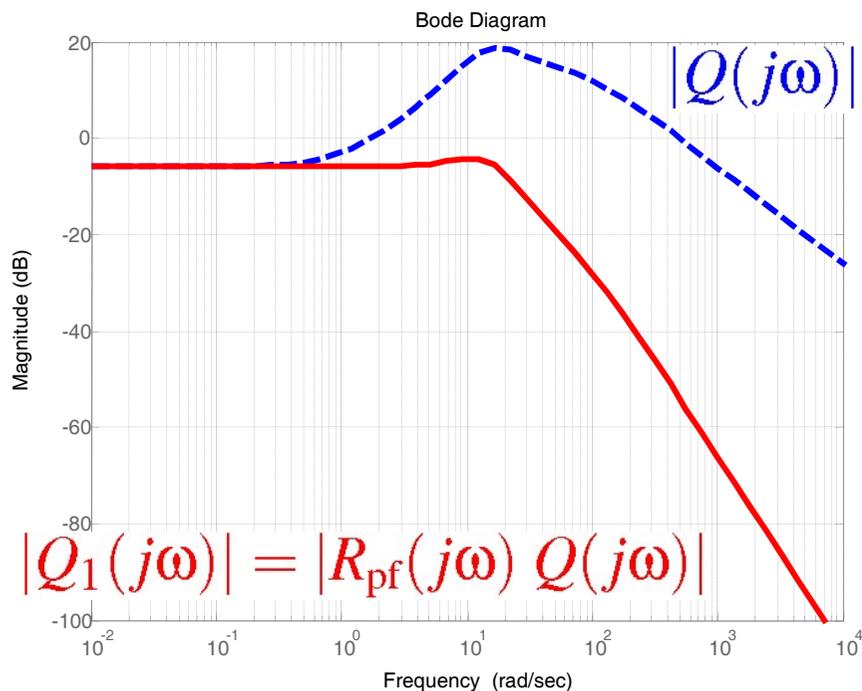
# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Si considera ora un pre-filtro del primo ordine

$$R_{\text{pf}}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

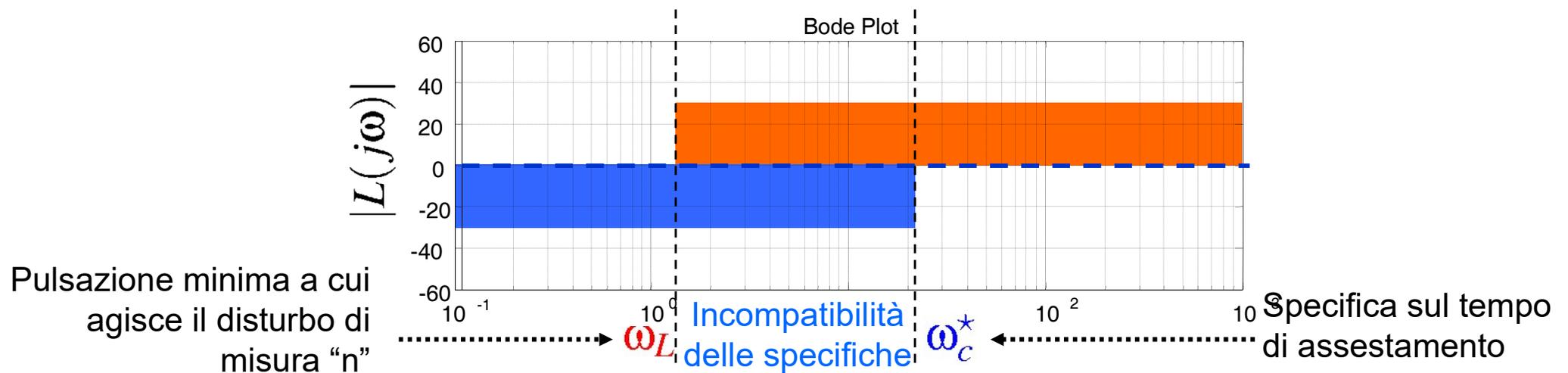
con pulsazione di taglio  $\omega_c^* = 1$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_c^*} = 1$$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

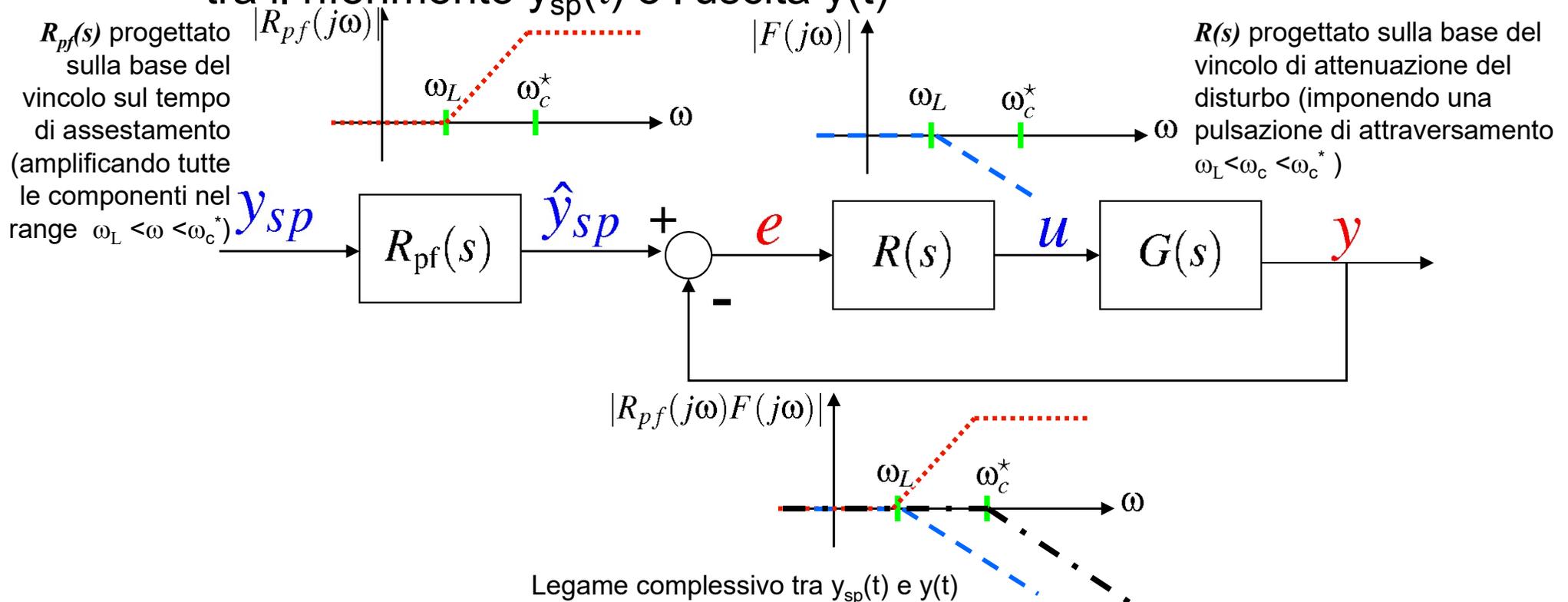
- **Caso b)** Impiego del prefiltraggio per ampliare la banda del sistema controllato
  - Presenza di specifiche “severe” sull’attenuazione di disturbi di tipo “ $n$ ” e/o presenza di ritardi nel sistema controllato che limitano la massima pulsazione di attraversamento (e quindi la velocità di risposta del sistema) ad essere  $\omega_c < \omega_L$
  - Presenza di specifiche sul tempo di assestamento che richiederebbero una pulsazione di attraversamento  $\omega_c^*$  superiore a quella imposta dai vincoli sopra ( $\omega_c^* > \omega_L$ )



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- **Caso b) Soluzione al problema**

- 1) Progettare  $R(s)$  in modo da attenuare il disturbo di tipo “ $n$ ” nel campo di frequenze in cui agisce (imponendo necessariamente delle dinamiche “lente” al sistema in retroazione rispetto ai tempi di assestamento richiesti e alla necessità di moderare lo sforzo di controllo)
- 2) Progettare il pre-filtro come passa alto al fine di ampliare la banda tra il riferimento  $y_{sp}(t)$  e l’uscita  $y(t)$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- **Caso b) Esempio**

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(0.05s+1)}$$

Specifiche:

- 1)  $e_\infty = 0$  (ingresso a gradino)
- 2)  $T_a \leq 1 \text{ s}$ ,  $S\% \leq 20\%$
- 3) Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo "n" che agisce nello spettro  $\omega_n \geq 5 \text{ rad/s}$



Polo nell'origine

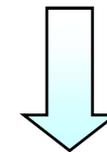
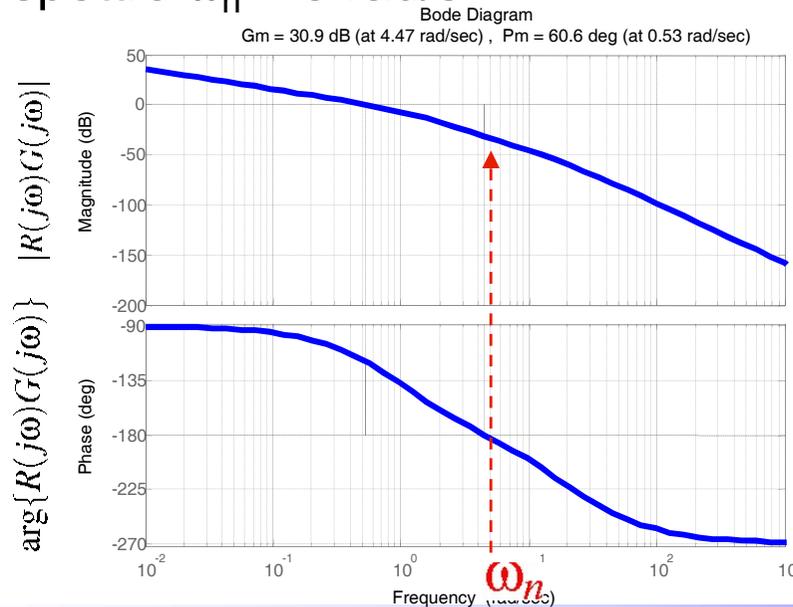


$\omega_c^* \approx 6 \text{ rad/s}$ ,  $M_f \approx 50^\circ$



$\omega_c^* \ll 5 \text{ rad/s}$

Specifiche contrastanti



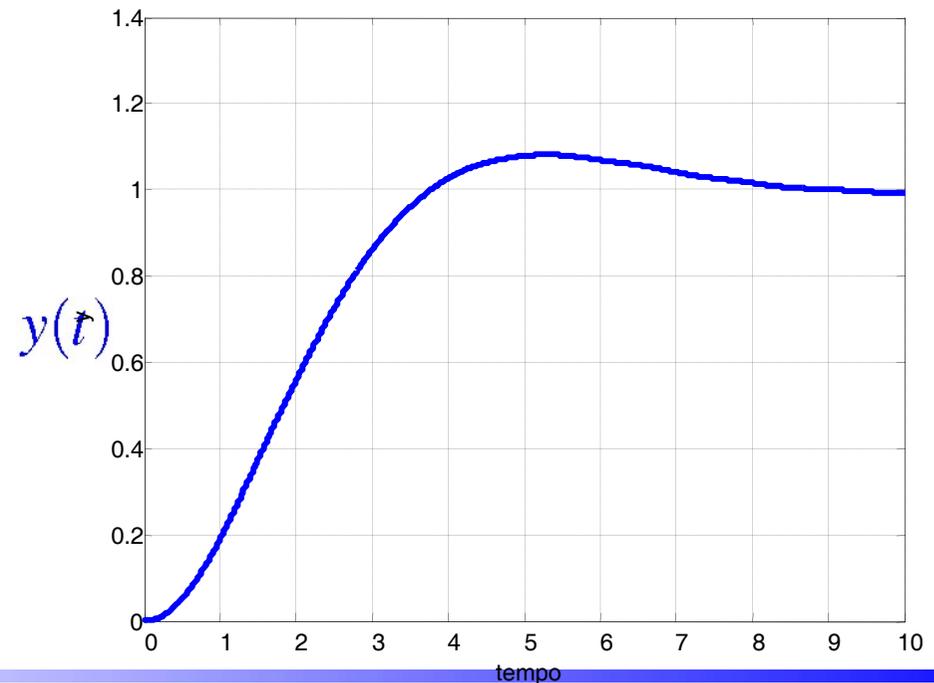
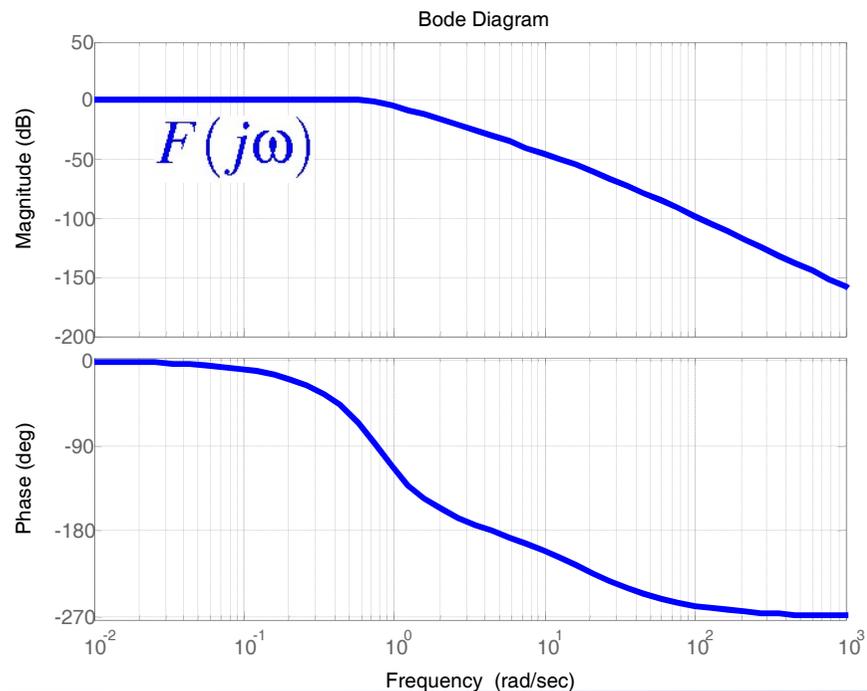
Il regolatore è progettato assumendo  $\omega_c^* \approx 0.5$

$$R(s) = \frac{0.3}{s}$$

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Senza pre-filtro
- $n(t) = 0.05 \sin(5t) + 0.01 \sin(6t)$

$$F(s) = \frac{12}{(s + 20.03)(s^2 + 0.9685s + 0.5991)} \quad \text{Poli dominanti}$$

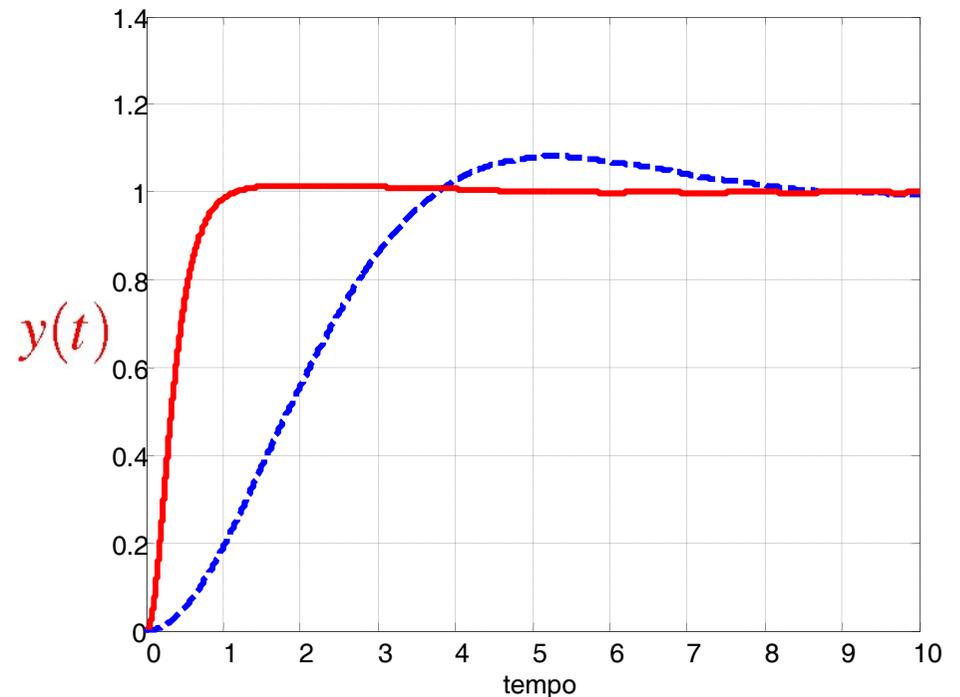
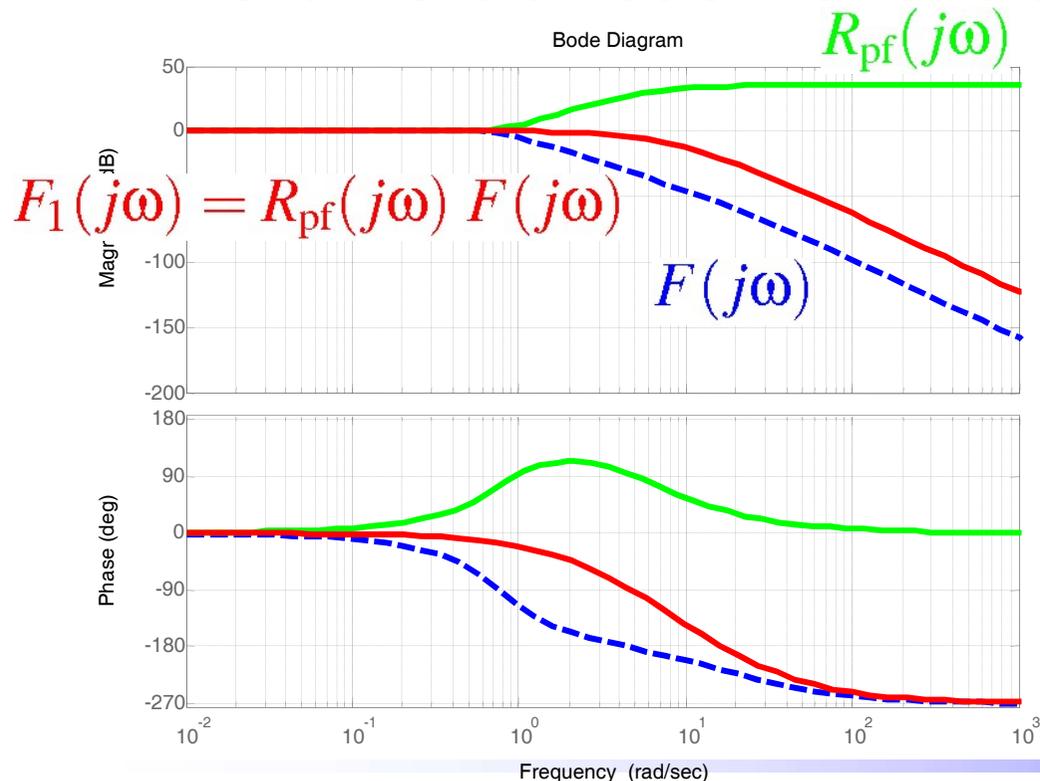


# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- Si considera ora un pre-filtro (passa alto) del secondo ordine, che cancella (quasi perfettamente) i poli dominanti di  $F(s)$  e aggiunge altri due poli complessi coniugati con  $\omega_n = 6$  (vedi specifica 2))

$$R_{\text{pf}}(s) = \frac{36}{0.6} \frac{(s^2 + s + 0.6)}{(s^2 + 12s + 36)} \Rightarrow F_1(s) \approx \frac{720}{(s + 20.03)(s^2 + 12s + 36)}$$

- La funzione di trasferimento tra disturbo "n" e uscita rimane  $-F(s)$



# Prefiltraggio del segnale di riferimento

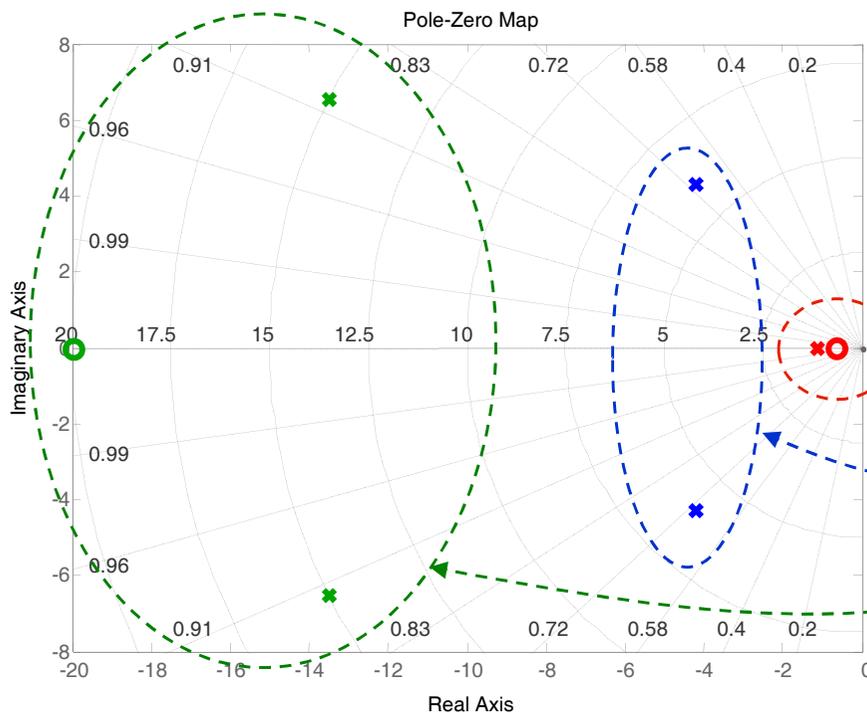
- **Caso c)** Impiego del prefiltraggio per cancellare dinamiche parassite del sistema “closed loop”
  - Presenza di dinamiche parassite nel sistema in retroazione, es. **coppie poli-zeri quasi in cancellazione** entro la banda del sistema

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

con

$$D_F(s) = D_p(s) D_d(s) D_{fb}(s)$$

$$N_F(s) = N_p(s) N_d(s) N_{fb}(s)$$



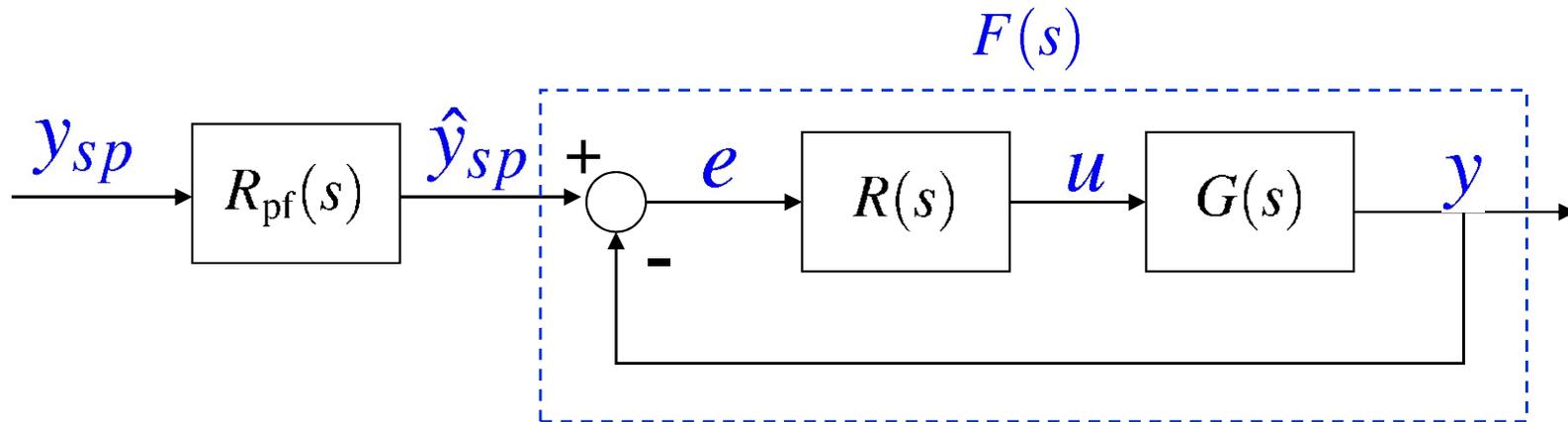
Dinamiche parassite

Dinamiche dominanti

Dinamiche fuori banda

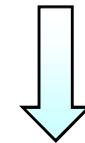
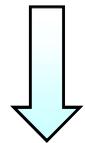
# Prefiltraggio del segnale di riferimento

- **Caso c)** Soluzione al problema
  - Progettare  $R_{pf}(s)$  in modo da cancellare le dinamiche parassite del sistema in retroazione  $F(s)$



$$F(s) = \frac{N_p(s) N_d(s) N_{fb}(s)}{D_p(s) D_d(s) D_{fb}(s)}$$

$$R_{pf}(s) = \frac{D_p(s)}{N_p(s)}$$



$$\frac{Y_{sp}(s)}{Y(s)} = \hat{F}(s) = R_{pf}(s) F(s) = \frac{\cancel{D_p(s)} \cancel{N_p(s)} N_d(s) N_{fb}(s)}{\cancel{N_p(s)} \cancel{D_p(s)} D_d(s) D_{fb}(s)}$$

# Prefiltraggio del segnale di riferimento

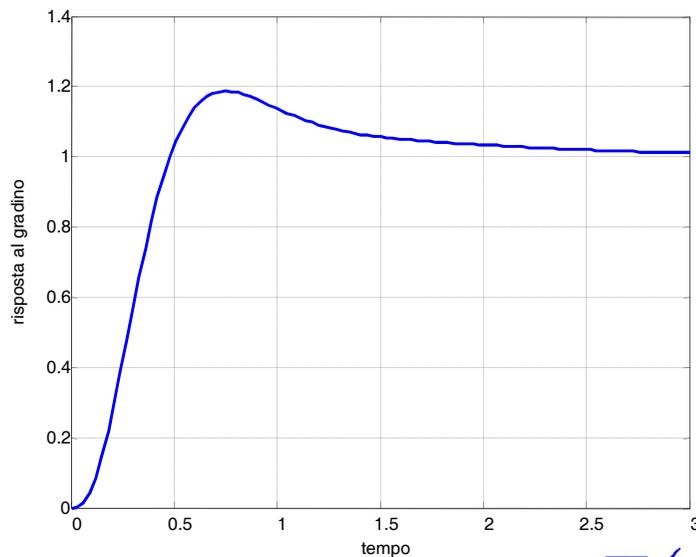
- **Caso c) Esempio**

$$F(s) = \frac{495(s+0.9)(s+20)}{(s+1.1)(s^2+8.4s+36)(s^2+27s+225)}$$

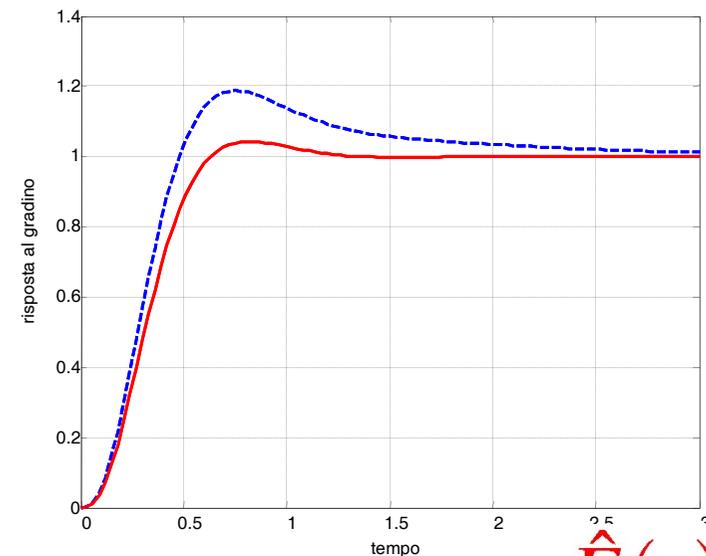
Dinamica parassita:  
Cancellazione imperfetta polo/zero

$$R_{pf}(s) = \frac{\frac{1}{1.1}s + 1}{\frac{1}{0.9}s + 1} \quad \Rightarrow \quad \hat{F}(s) = \frac{495(s+20)}{(s^2+8.4s+36)(s^2+27s+225)}$$

Attenzione a non alterare il guadagno statico di  $F(s)$ :  $R_{pf}(0)=1$



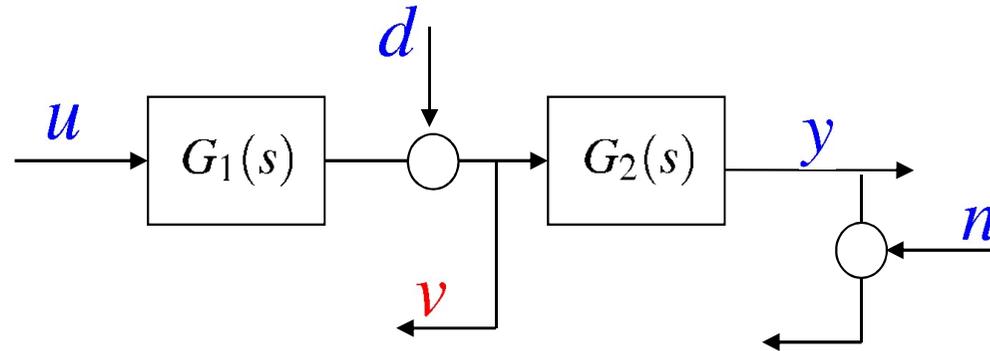
Risposta al gradino di  $F(s)$



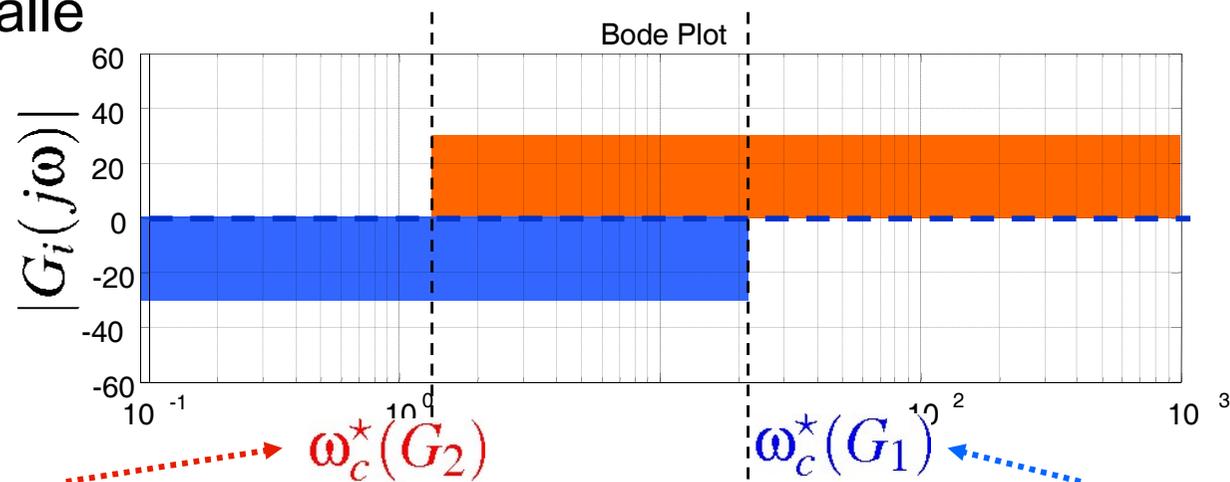
Risposta al gradino di  $\hat{F}(s)$

# Controllo in cascata

- Sistema controllato caratterizzato da due dinamiche in cascata, con la variabile intermedia misurabile



- Sistema a monte stabilizzabile imponendo dinamiche molto più veloci rispetto a quelle che caratterizzano la massima banda imponibile al sistema a valle

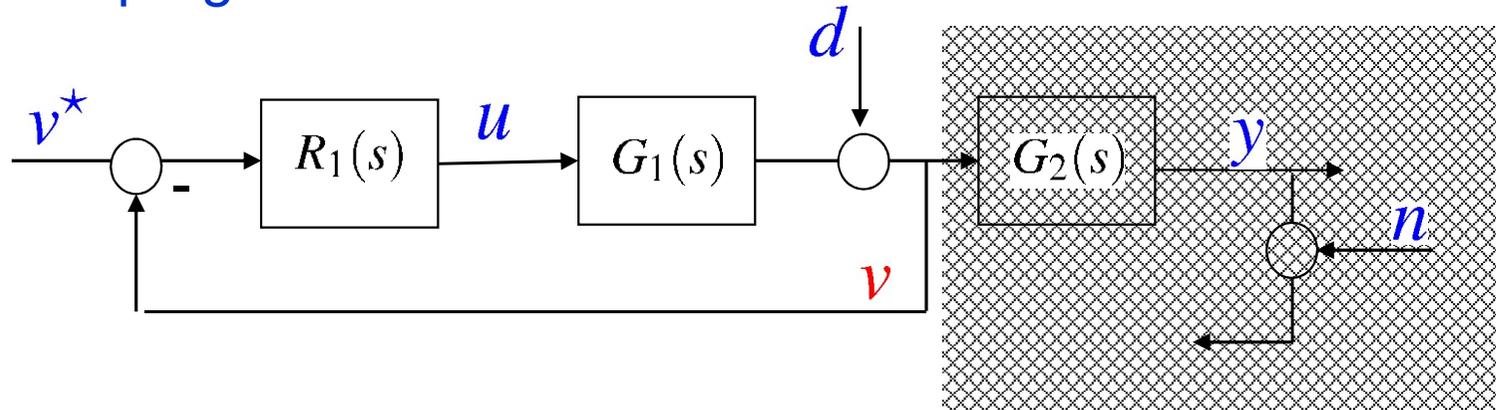


Massima pulsazione di attraversamento compatibile con  $G_2(s)$  (dinamiche proprie di  $G_2(s)$  “lente”, presenza di ritardi e disturbi di misura “n”)

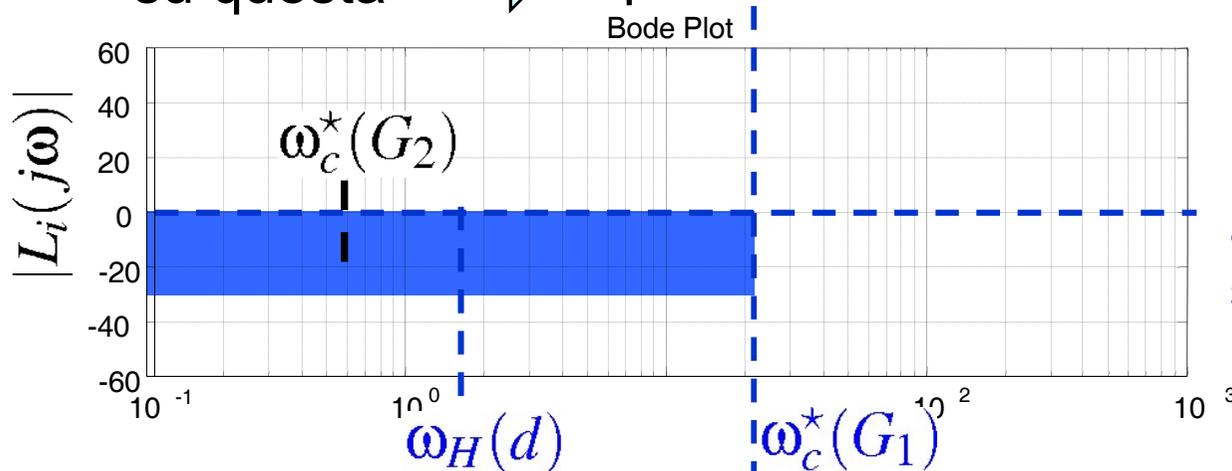
Minima pulsazione di attraversamento compatibile con  $G_1(s)$  (dinamiche proprie di  $G_1(s)$  “veloci”, presenza di disturbi di tipo “d” in alta frequenza)

# Controllo in cascata

- In queste condizioni il progetto può essere scomposto in due fasi:
  - Fase 1: progetto dell'anello interno**



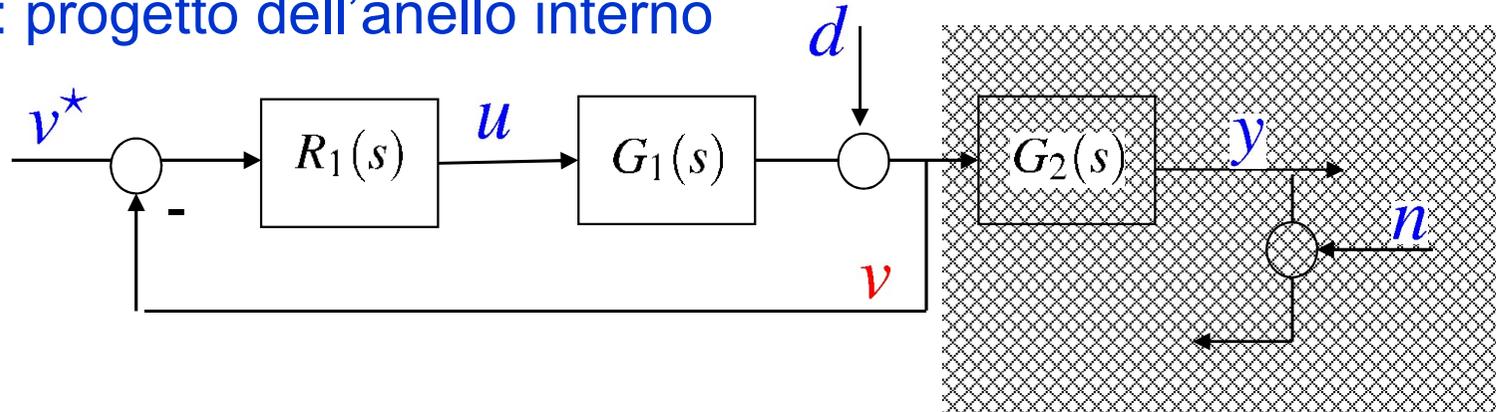
Il regolatore  $R_I(s)$  è progettato sulla base della dinamica di  $G_I(s)$  e del disturbo “ $d$ ” disinteressandosi della dinamica a valle e dei vincoli su questa  $\Rightarrow$  Imposizione di dinamiche “veloci”



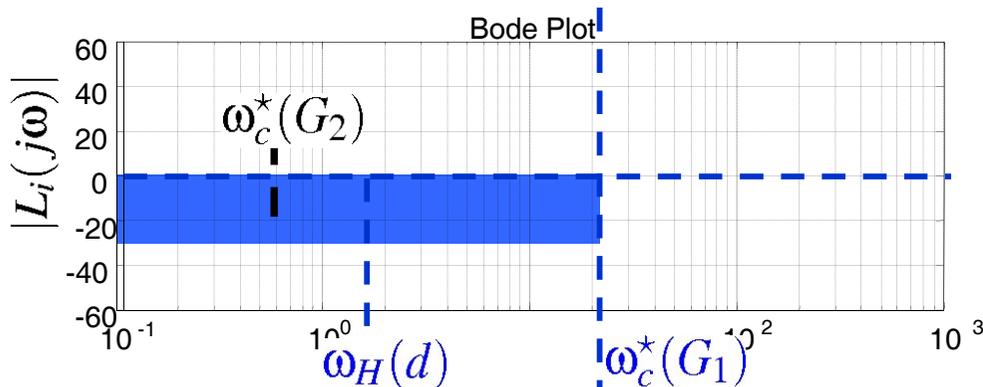
Il regolatore  $R_I(s)$  sarà progettato in modo che la  $L_I(s)=R_I(s)G_I(s)$  attraversi a  $\omega_c > \omega_c^*(G_I)$  e inoltre sia  $|L_I(j\omega)| \gg 1$  per  $\omega < \omega_H(d)$

# Controllo in cascata

- Fase 1: progetto dell'anello interno



$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + R_1(s)G_1(s)}}_{S_1(s)} D(s) + \underbrace{\frac{R_1(s)G_1(s)}{1 + R_1(s)G_1(s)}}_{F_1(s)} V^*(s)$$



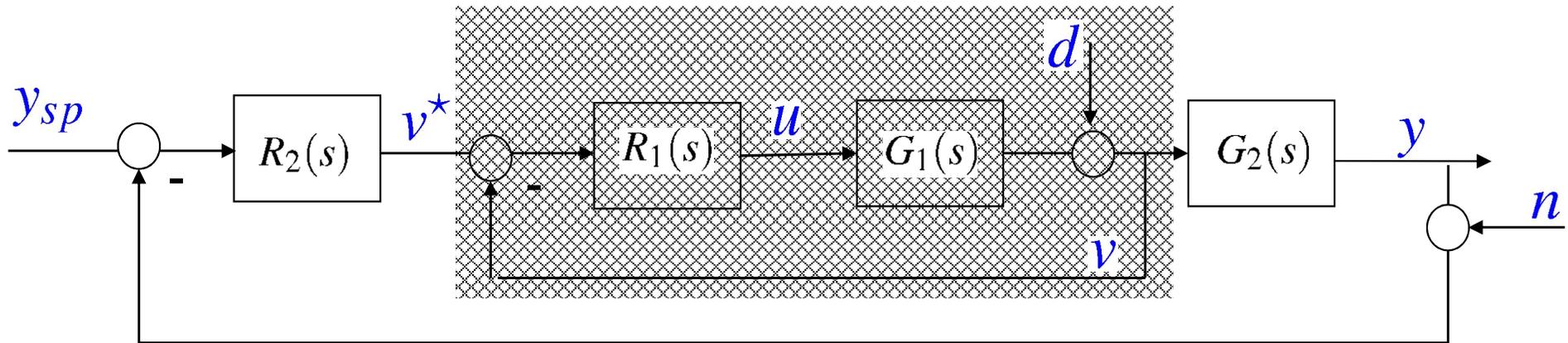
Progettare il regolatore in modo che  
 $|L_1(j\omega)| \gg 1 \quad \omega \geq \omega_c^*(G_1) \geq \omega_H(d)$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} |S_1(j\omega)| \approx 0 \\ |F_1(j\omega)| \approx 1 \end{array} \right\} \text{ per } \omega < \omega_c^*(G_2)$$

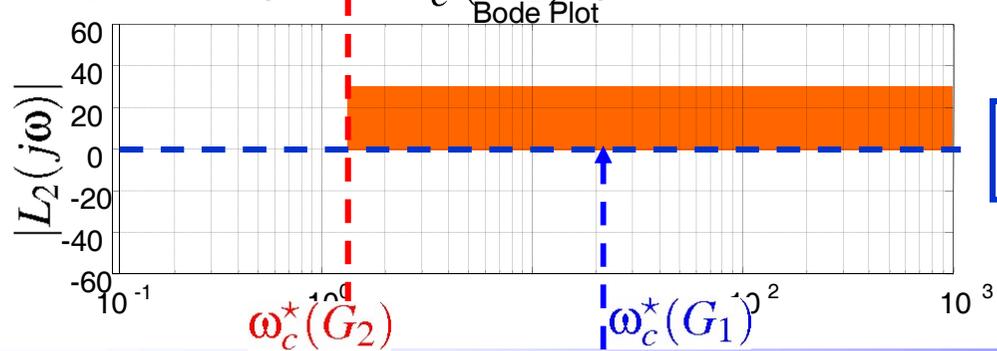
Disturbi “ $d$ ” praticamente assenti e  $v$  praticamente coincidente con  $v^*$  nel campo di pulsazioni  $\omega < \omega_c^*(G_2)$

# Controllo in cascata

- Fase 2: progetto dell'anello esterno



- Il regolatore  $R_2(s)$  è progettato sulla base della dinamica di  $G_2(s)$  e del disturbo “ $n$ ” senza considerare la dinamica dall’anello interno (che viene approssimata con un corto circuito, ovvero  $v = v^*$ ) imponendo pulsazioni di attraversamento compatibili con la dinamica di  $G_2(s)$  e con la presenza di un eventuale disturbo di tipo “ $n$ ” ( $\omega < \omega_c^*(G_2)$ )



↓

Dinamiche imposte “lente”

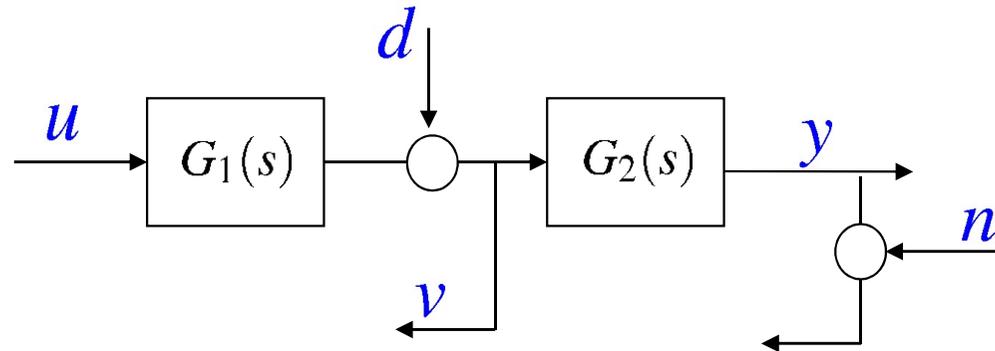
# Controllo in cascata

---

- Osservazioni:
  - Il progetto del regolatore in cascata si basa su un **disaccoppiamento frequenziale** dei due anelli di retroazione progettati che induce una doppia scala dei tempi nelle dinamiche controllate: l'anello interno risulta essere molto più veloce di quello esterno (le cui dinamiche risultano poi essere quelle dell'uscita del sistema complessivo)
  - In molti casi di interesse ingegneristico il controllo in cascata è l'unica soluzione al fine di soddisfare le specifiche (in apparenza contrastanti) sull'attenuazione dei disturbi in alta (" $n$ ") e in bassa (" $d$ ") frequenza
  - Questo approccio al controllo riduce un problema di controllo "complicato" (controllo di due dinamiche) in due sottoproblemi "semplici" (controllo delle due dinamiche considerate singolarmente)

# Controllo in cascata

- Esempio



$$G_1(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s + 1)(1 + 5s)}$$

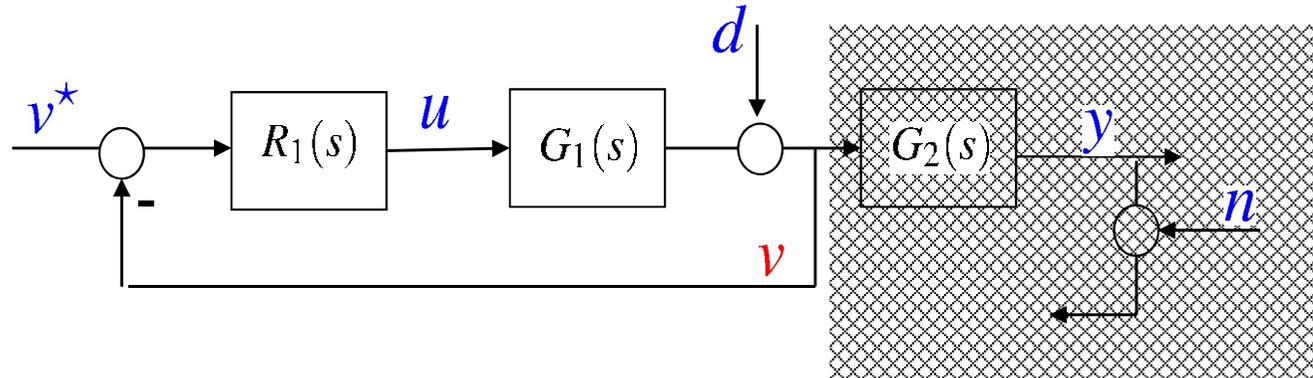
Specifiche:

- 1) Ingresso di set point:  $e_\infty = 0$  (ingresso a gradino),  $\omega_c^* \approx 0.2 \text{ rad/s}$ ,  $M_f \approx 65^\circ$
- 2) Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo “ $n$ ” che agisce nello spettro  $\omega_n \geq 10 \text{ rad/s}$
- 3) Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo “ $d$ ” che agisce nello spettro  $\omega_d \leq 0.5 \text{ rad/s}$ ,  $e_\infty = 0$  per ingresso di disturbo a gradino

Specifiche contrastanti

# Controllo in cascata

- Progettazione dell'anello interno

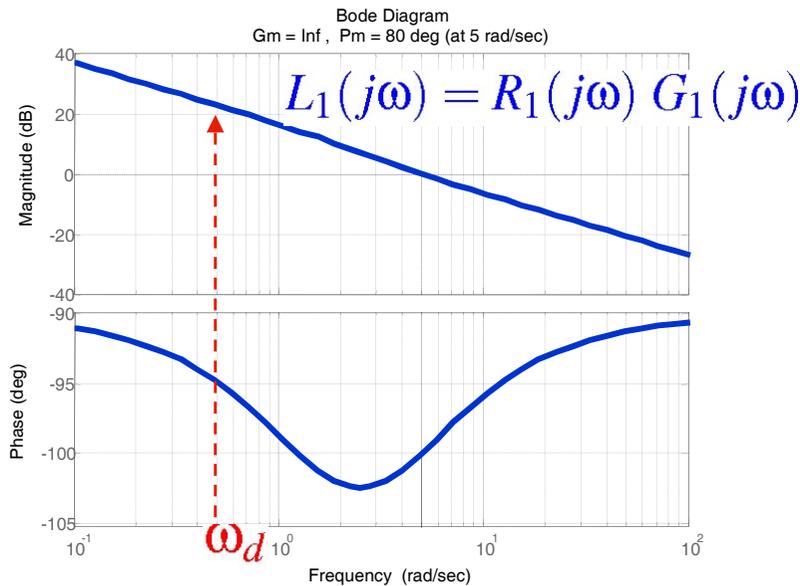


$$G_1(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s + 1)(1 + 5s)}$$

- Regolatore PI:  $R_1(s) = \frac{2.288s + 7.095}{s}$

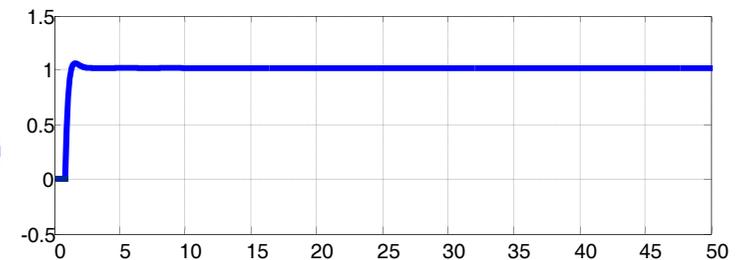
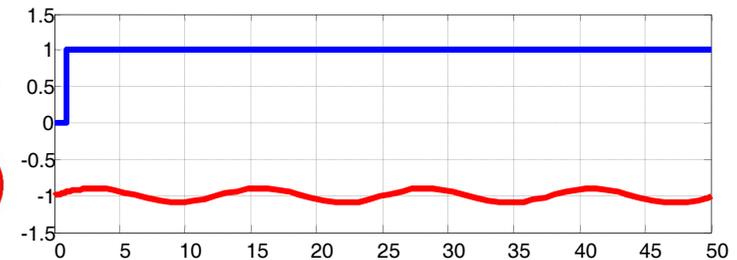
Polo nell'origine per il disturbo costante



$v^*(t)$

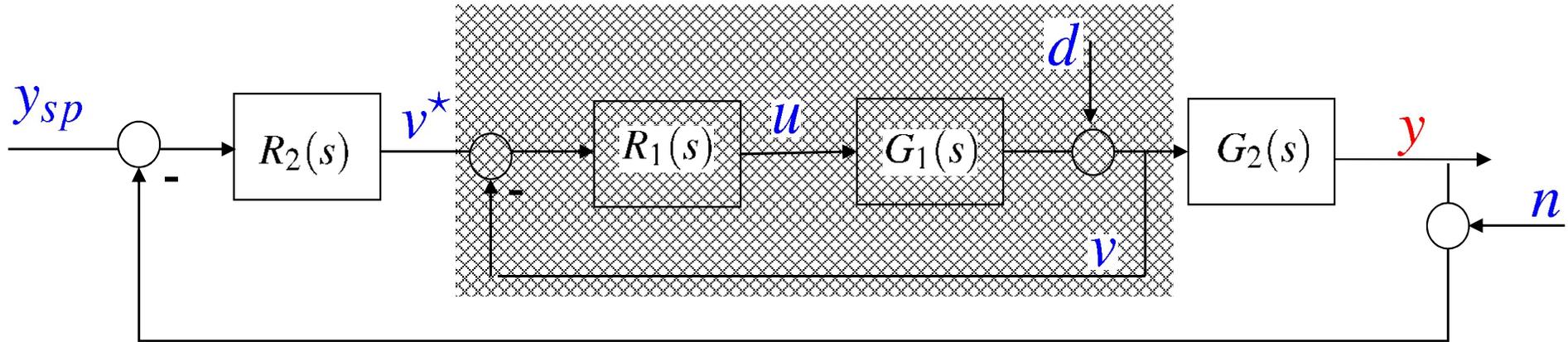
$d(t)$

$v(t)$

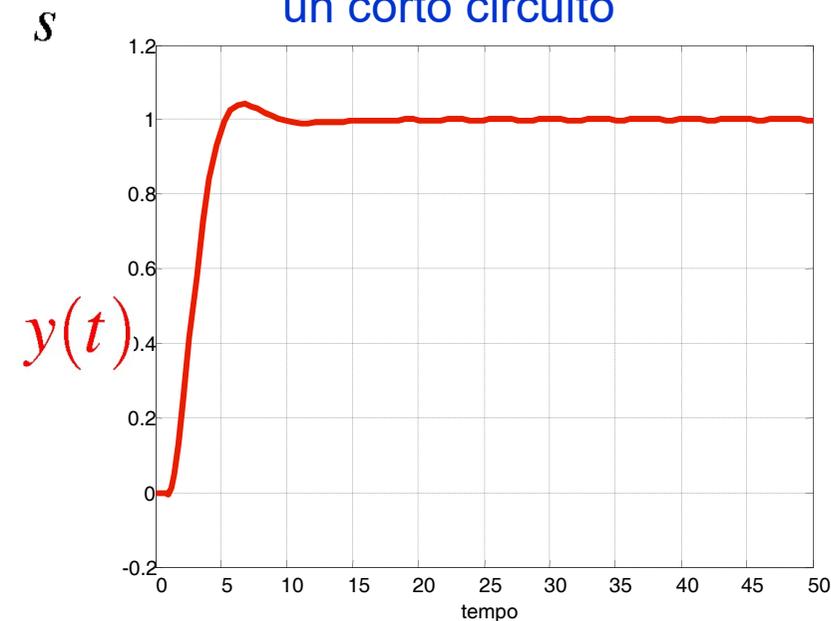
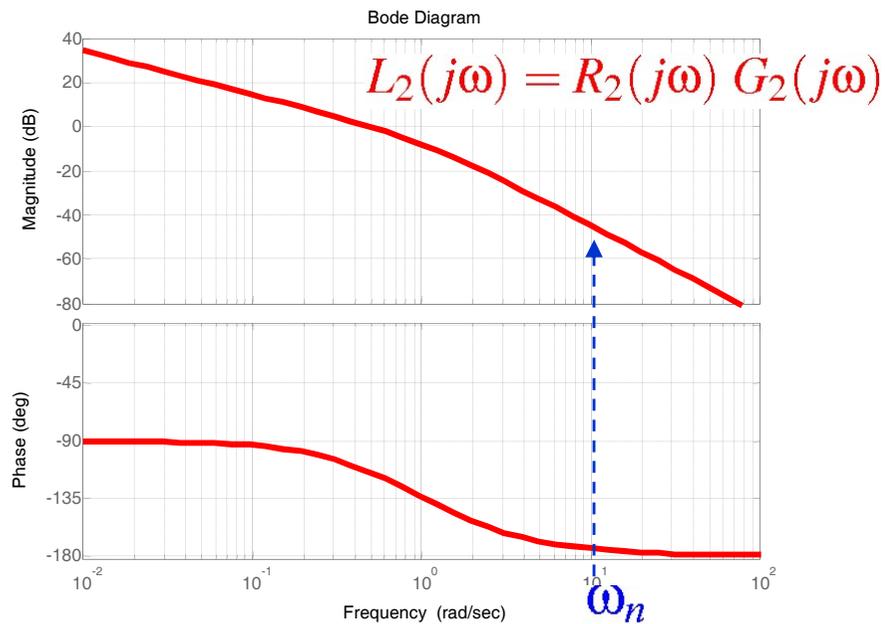


# Controllo in cascata

- progettazione dell'anello esterno

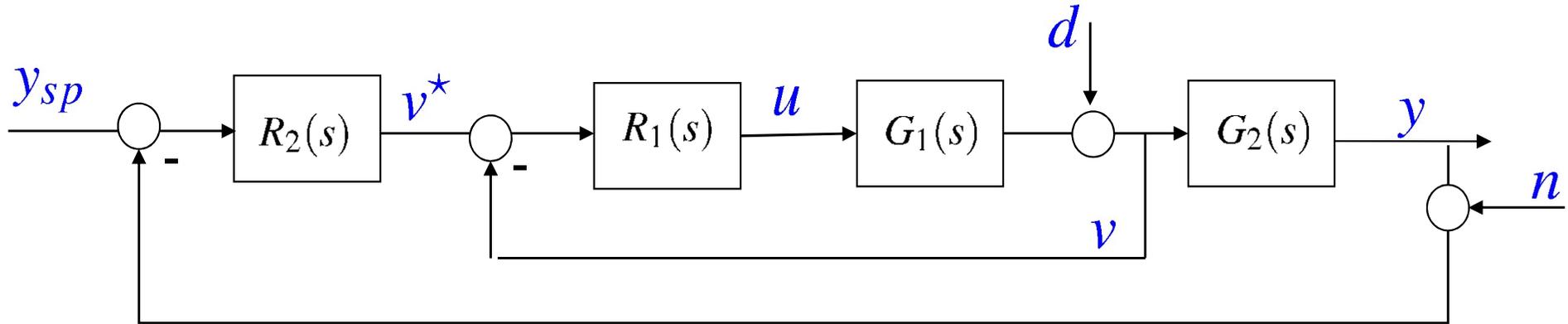


- Regolatore PI:  $R_2(s) = \frac{2.825s + 0.5206}{s}$  Considerando il loop interno come un corto circuito

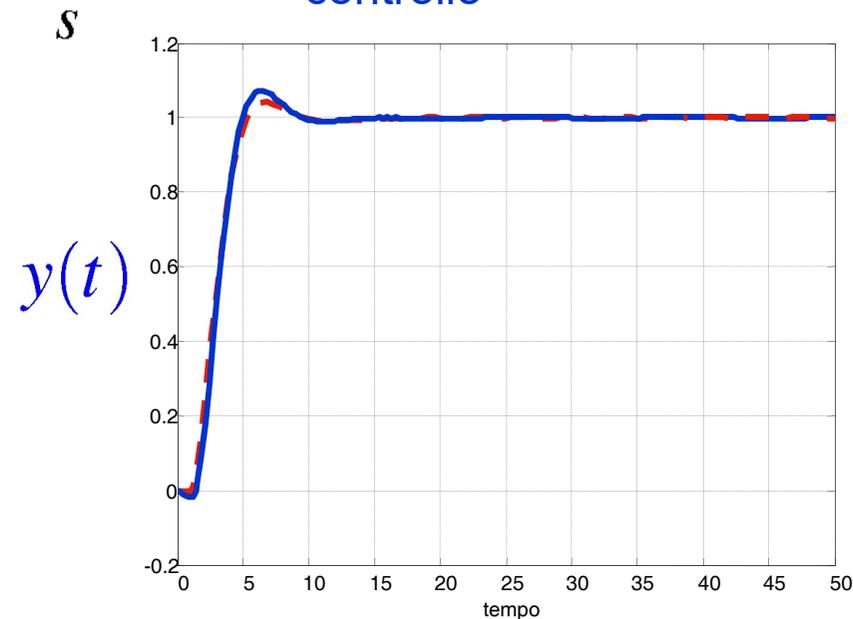
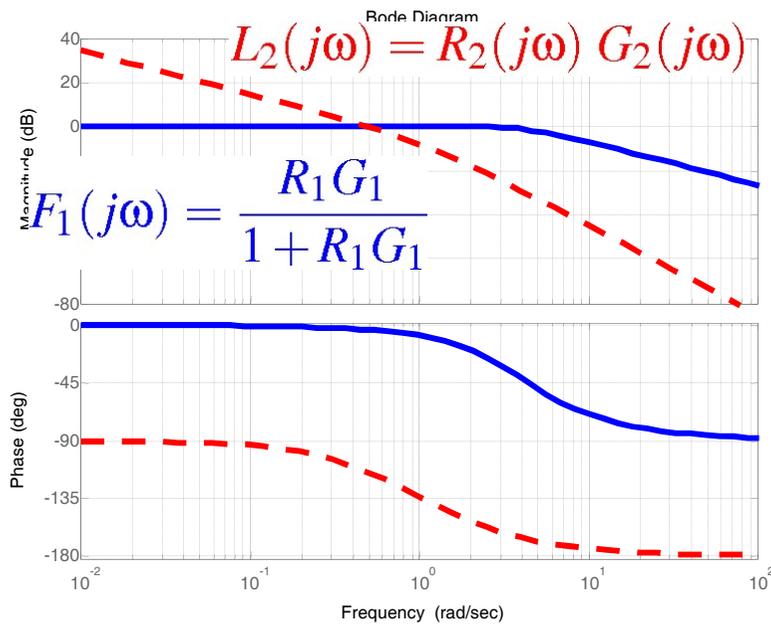


# Controllo in cascata

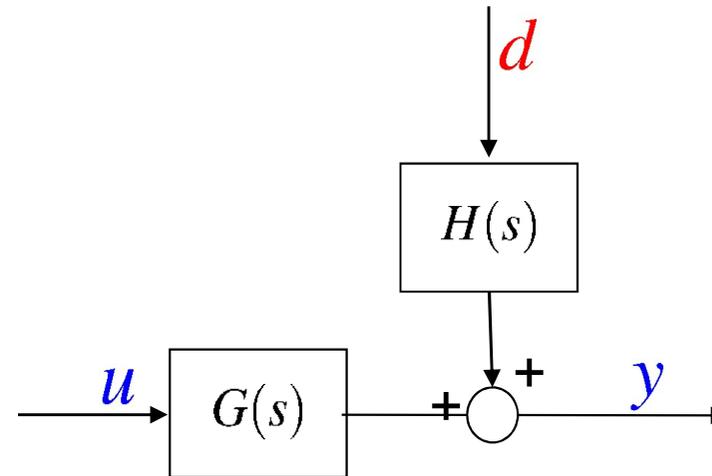
- progettazione dell'anello esterno



- Regolatore PI:  $R_2(s) = \frac{2.825s + 0.5206}{s}$  Si considerano entrambi i loop di controllo



## Compensazione in avanti di un disturbo misurabile



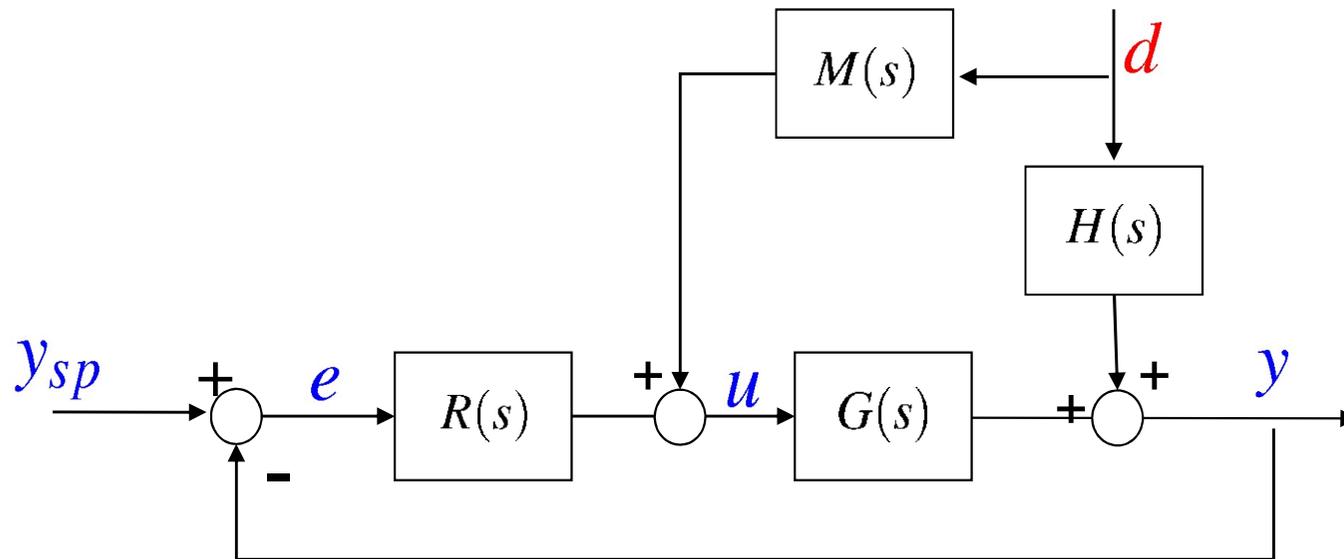
- Sistema descritto da

$$Y(s) = G(s)U(s) + H(s)D(s)$$

e caratterizzato quindi da un disturbo  $d$  sull'uscita misurabile (o stimabile in qualche modo)

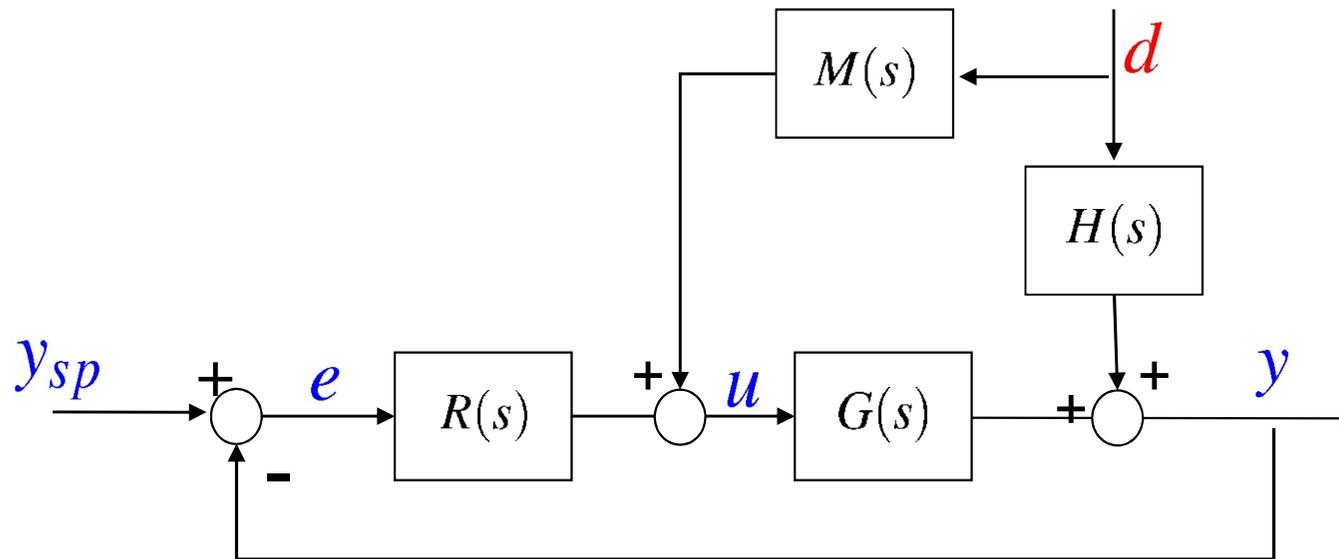
- Sfruttando il fatto che  $d$  è conosciuto è possibile compensare in anello aperto il disturbo sull'uscita agendo su  $u$

## Compensazione in avanti di un disturbo misurabile



- Considerazioni analoghe a quelle relative alla compensazione in avanti del riferimento:
  - $R(s)$  progettato al fine di garantire le specifiche del sistema retroazionato in maniera robusta
  - $M(s)$  per migliorare le performance in termini di riduzione del disturbo

## Compensazione in avanti di un disturbo misurabile



$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \underbrace{\frac{H(s)}{1 + R(s)G(s)}} + \frac{M(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Vecchia funzione di sensitività  
(solo retroazione)

$$M(s) = -H(s)G^{-1}(s) \implies \frac{Y(s)}{D(s)} = 0 \implies y(t) \equiv 0, \quad \forall d(t)$$

## Compensazione in avanti di un disturbo misurabile

- Problemi di realizzabilità di  $M(s) = -H(s)G^{-1}(s)$ 
  - zeri a parte reale positiva e ritardi in  $G(s)$
  - grado relativo
- Si può approssimare la fdt nell'intervallo di pulsazioni a cui agisce il disturbo  $d$  in modo tale che

$$M(j\omega) = -H(j\omega)G^{-1}(j\omega) \quad \text{per} \quad \omega \in [\omega_L, \omega_H]$$

- Per disturbi  $d$  **costanti**, si può ricorrere a un compensatore statico

$$M(s) = \mu_M = -\frac{H(0)}{G(0)}$$

# Compensazione in avanti di un disturbo misurabile

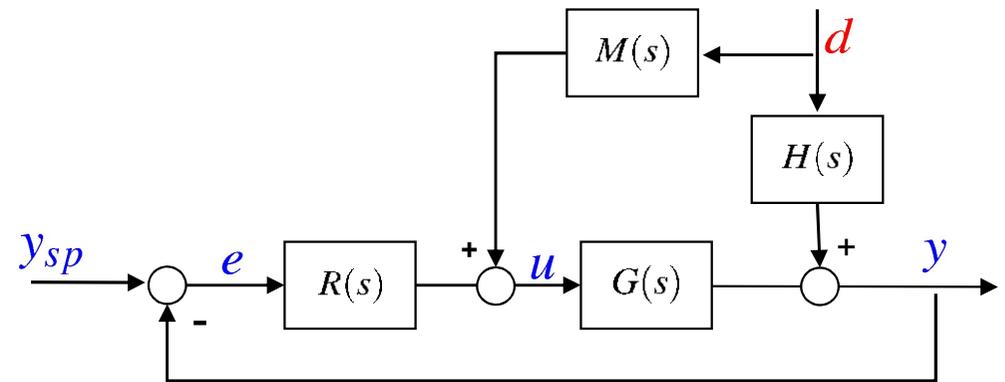
- Esempio

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+0.1s)}$$

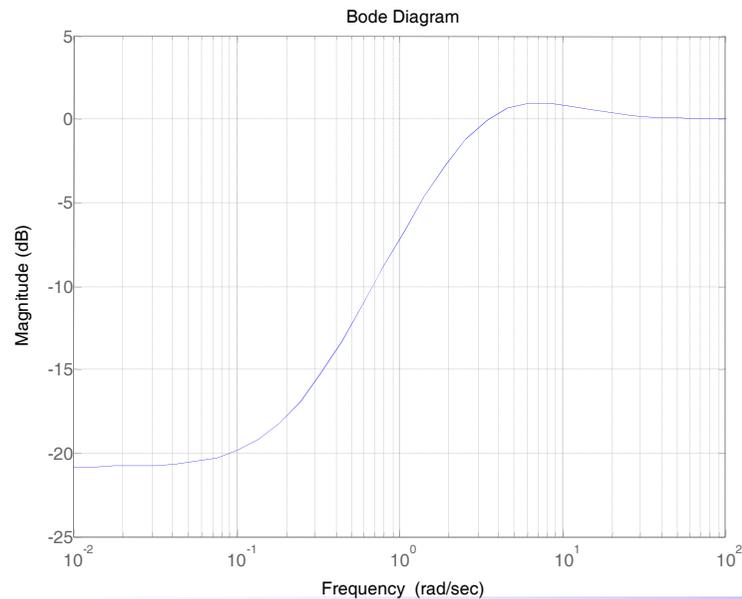
$$R(s) = \frac{5(s+1)}{(1+5s)}$$

$$d(t) = 0.3 \sin(0.3t) \text{ misurabile}$$

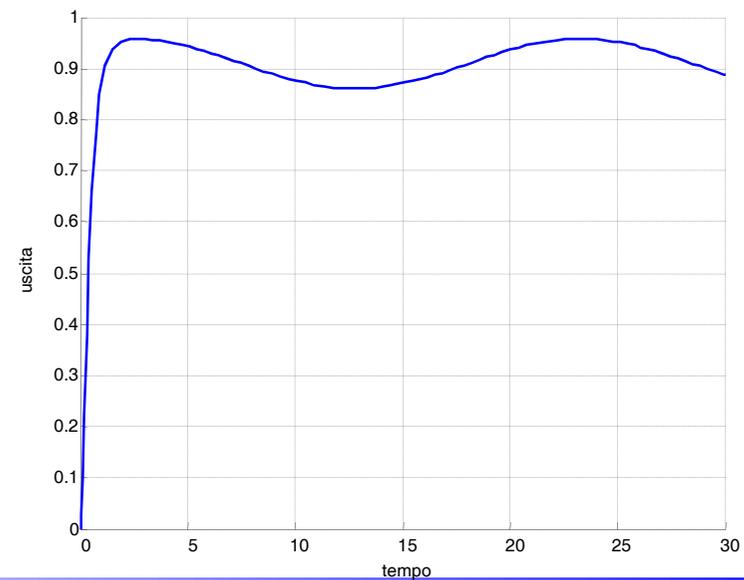
- Senza il compensatore  $M(s)$



Funzione di sensitività



Risposta al gradino



# Compensazione in avanti di un disturbo misurabile

- Nel caso ideale

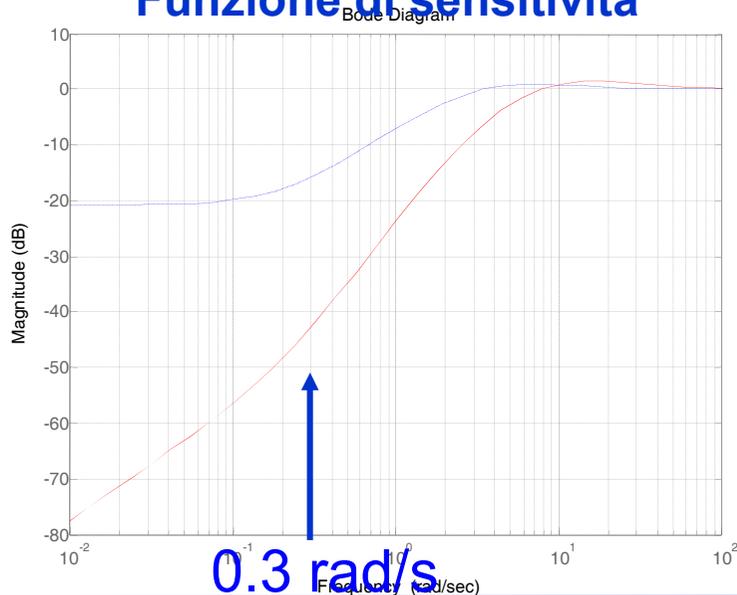
$$M(s) = -\frac{(1+s)(1+0.1s)}{2}$$

↓ Poiché  $M(s)$  non è fisicamente realizzabile la si approssima considerando solo il polo  $G(s)$  più lento

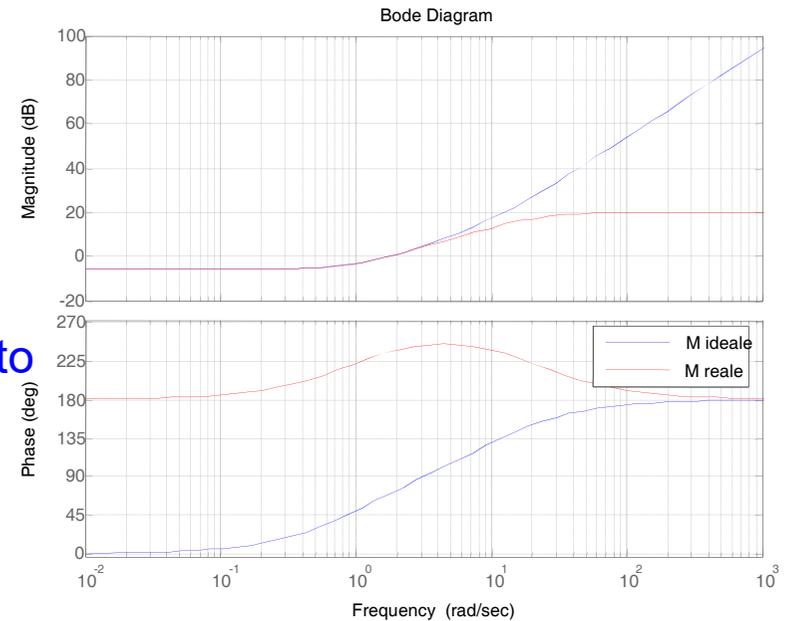
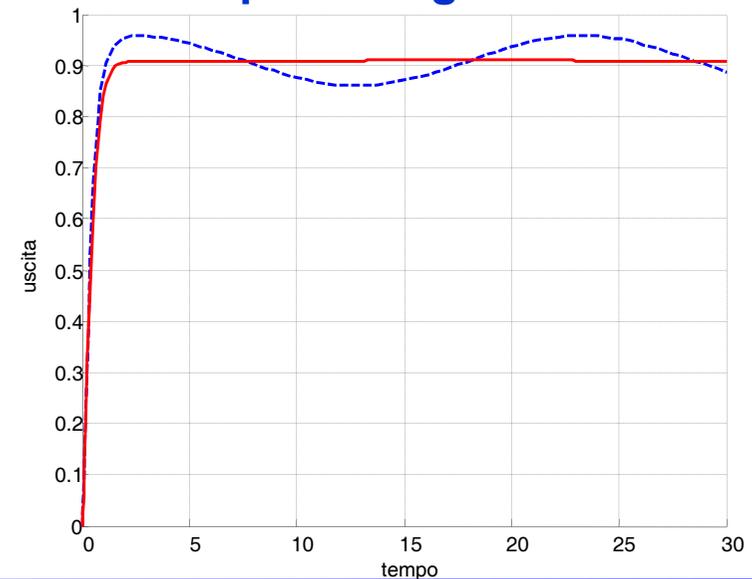
$$M(s) = -\frac{(1+s)}{2(1+0.05s)}$$

- Con il compensatore  $M(s)$

**Funzione di sensitività**



**Risposta al gradino**



# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomtici.html>

# **METODI DI CONTROLLO AVANZATI**

## **FINE**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>