

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

# **RETI CORRETRICI**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

# Regolatori standard

---

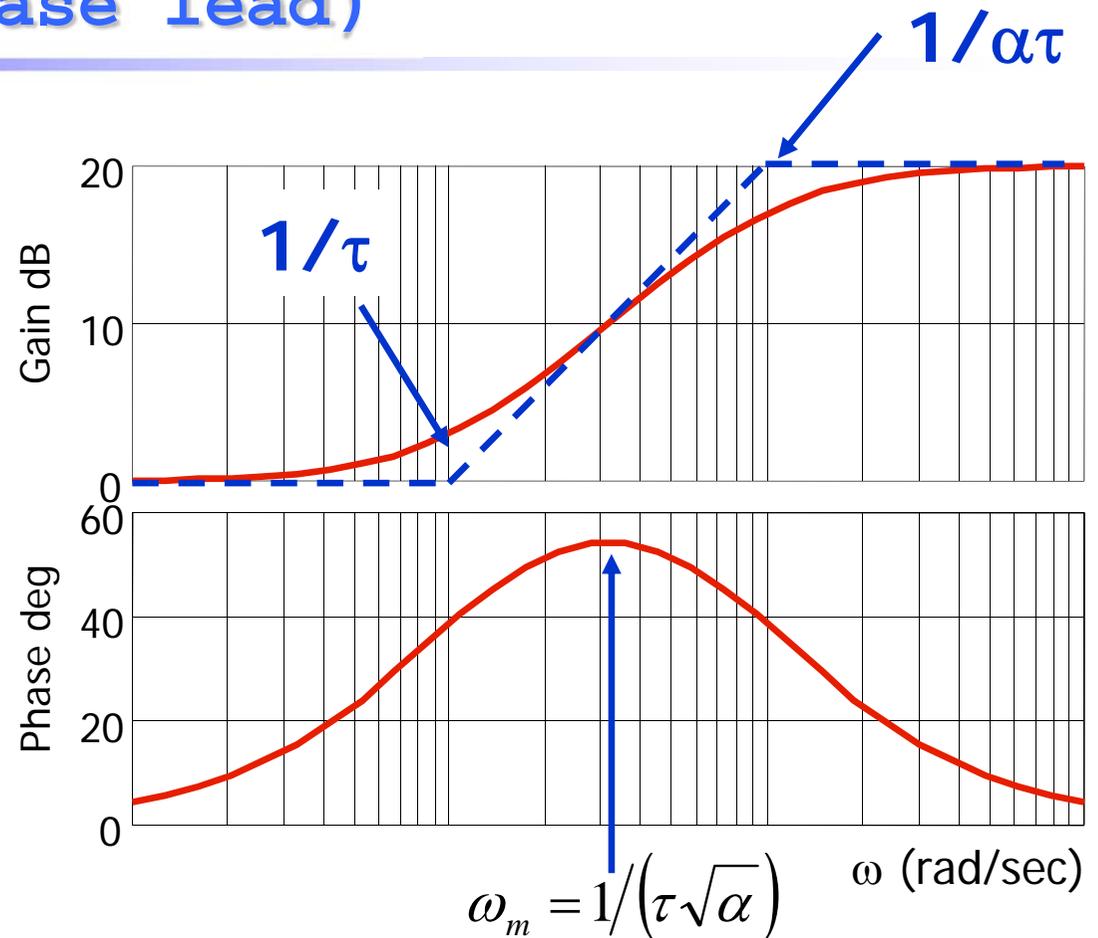
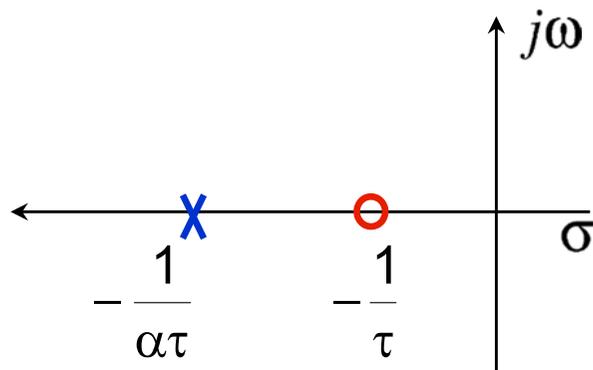
- Alcune strutture standard di regolatori
  - **reti correttrici**
    - **anticipo o ritardo**
      - 1 polo ed uno zero reali
    - **anticipo/ritardo**
      - due poli e due zeri reali distinti
  - **regolatori industriali**
    - Proporzionali (P)
    - Integrali (I)
    - Proporzionali-Integrali (PI)
    - Proporzionali-Derivativi (PD)
    - Proporzionali-Integrali-Derivativi (PID)

## Rete di anticipo (phase lead)

- Funzione di trasferimento:

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Si assume una rete a guadagno statico unitario



La rete anticipatrice ha due effetti sulla funzione di anello:

- **migliora il margine di fase intorno ad  $\omega_m \Rightarrow$  effetto utile**
- **aumenta il guadagno per  $\omega > 1/\tau \Rightarrow$  effetto collaterale**

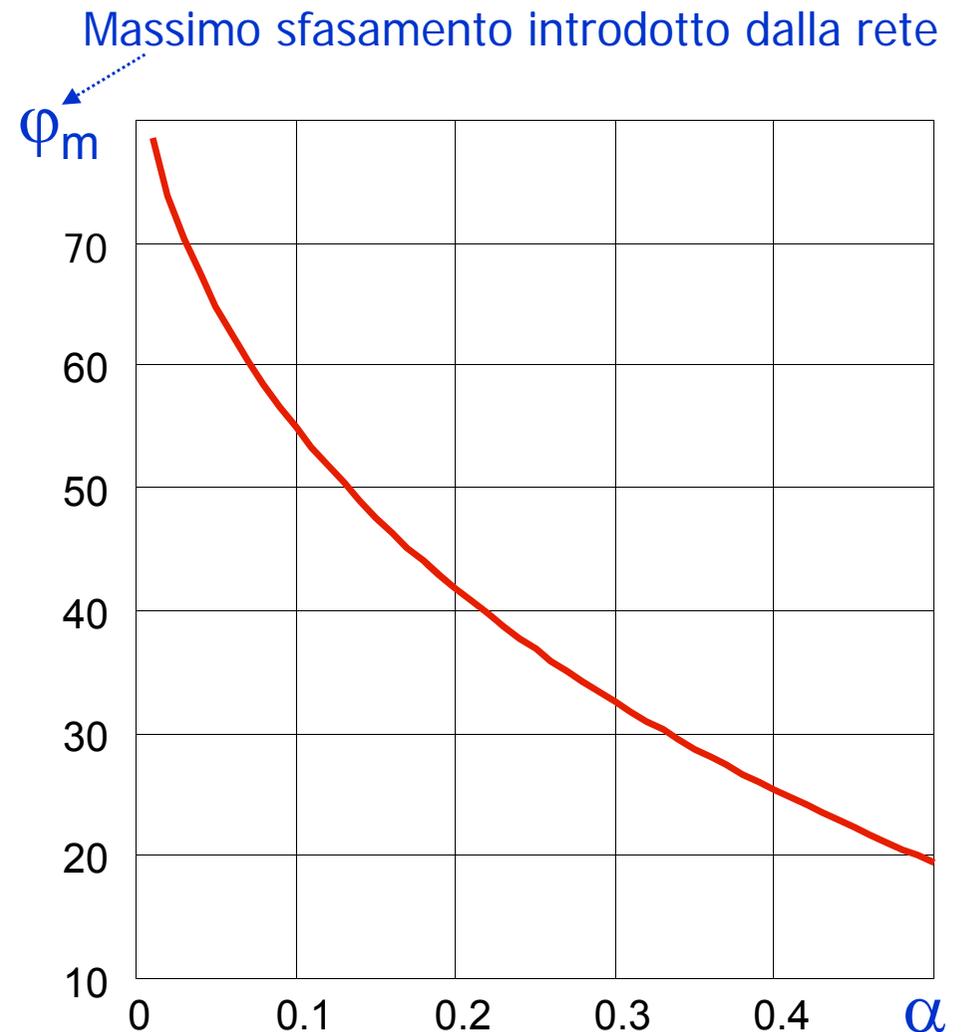
# Rete di Anticipo (phase lead)

- Formule utili

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}; \alpha < 1$$

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$
$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$
$$\omega_m = \sqrt{z p} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

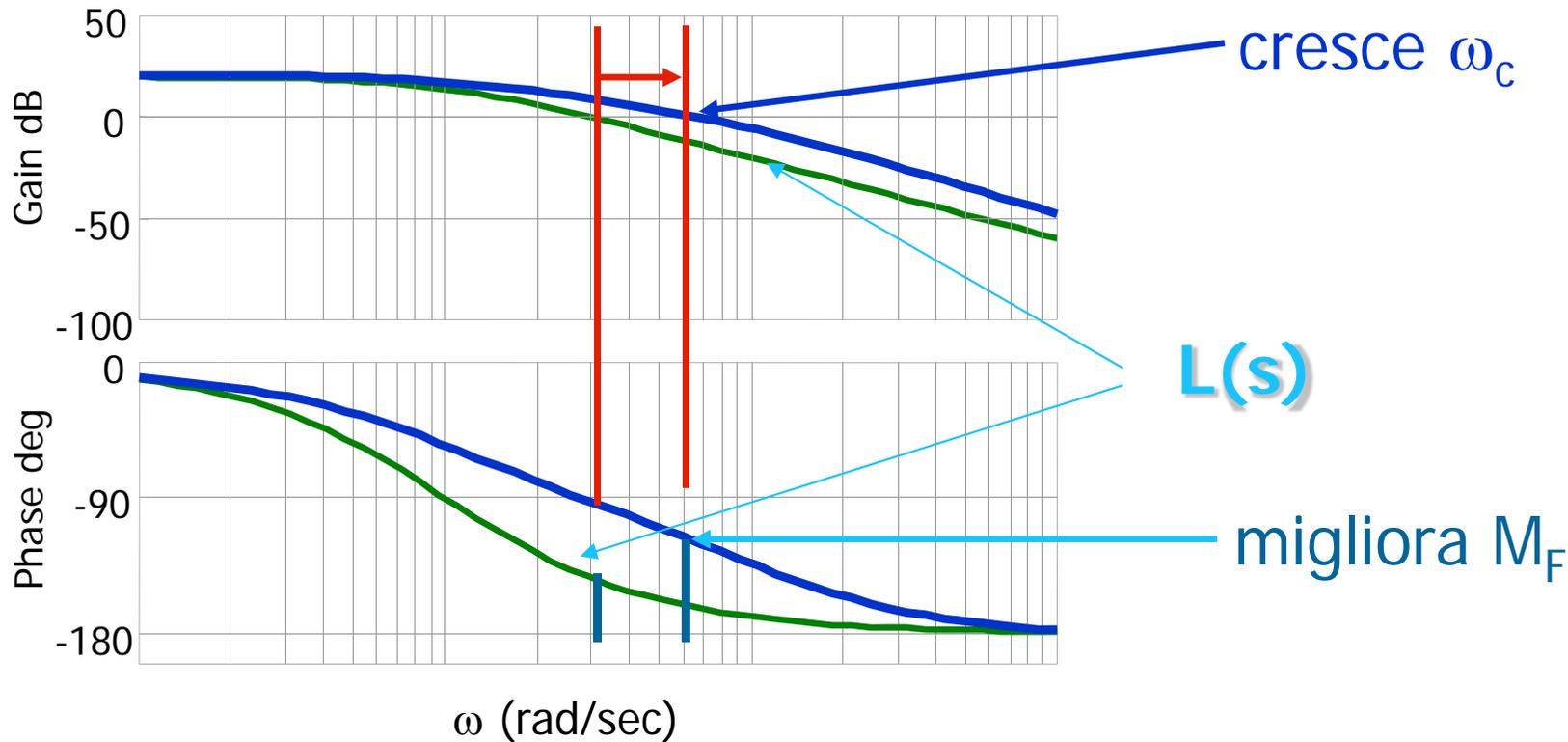
Spesso  $\alpha \cong 0.1 \Rightarrow \varphi_m = 55^\circ$



# Rete di Anticipo (phase lead)

- Effetti sulla f.d.t. di anello

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} ; \alpha < 1$$

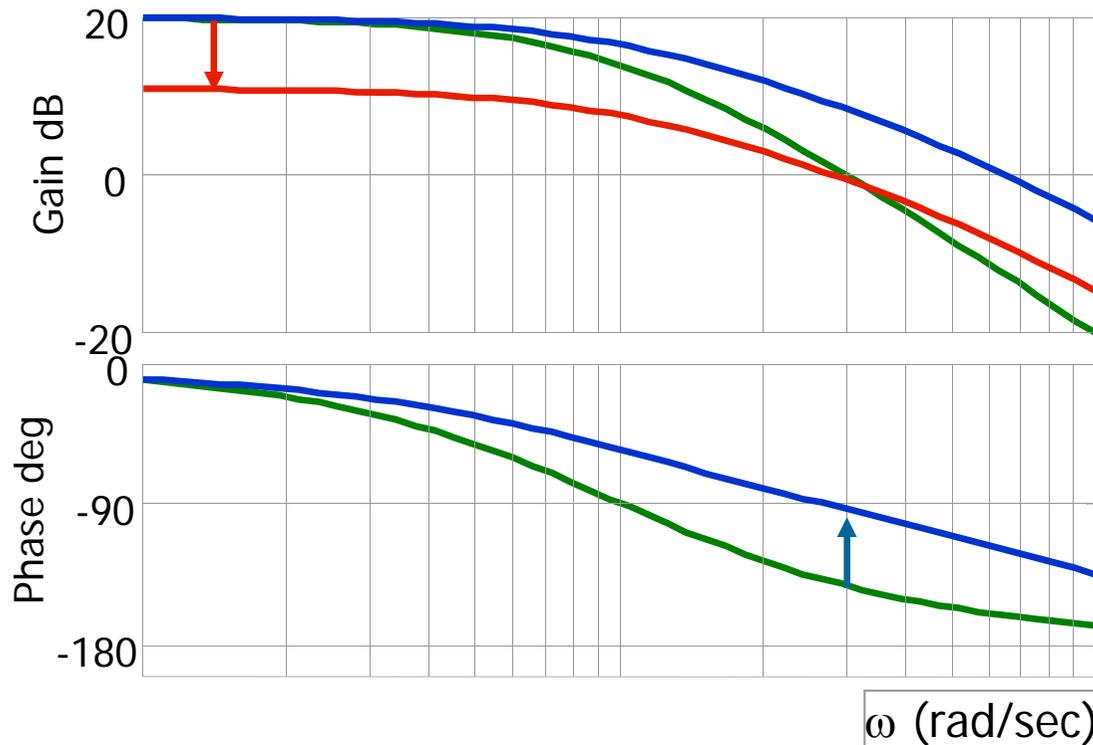


Se si sceglie  $\tau$  in modo che  $\omega_m \cong \omega_c \Rightarrow$  effetto stabilizzante

# Rete di Anticipo (phase lead)

- Effetti sulla f.d.t. di anello

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} ; \alpha < 1$$



Ingrandita

L'aumento di guadagno in  $\omega_c$  si può compensare riducendo il guadagno statico del regolatore  
⇐ prestazioni statiche !!!

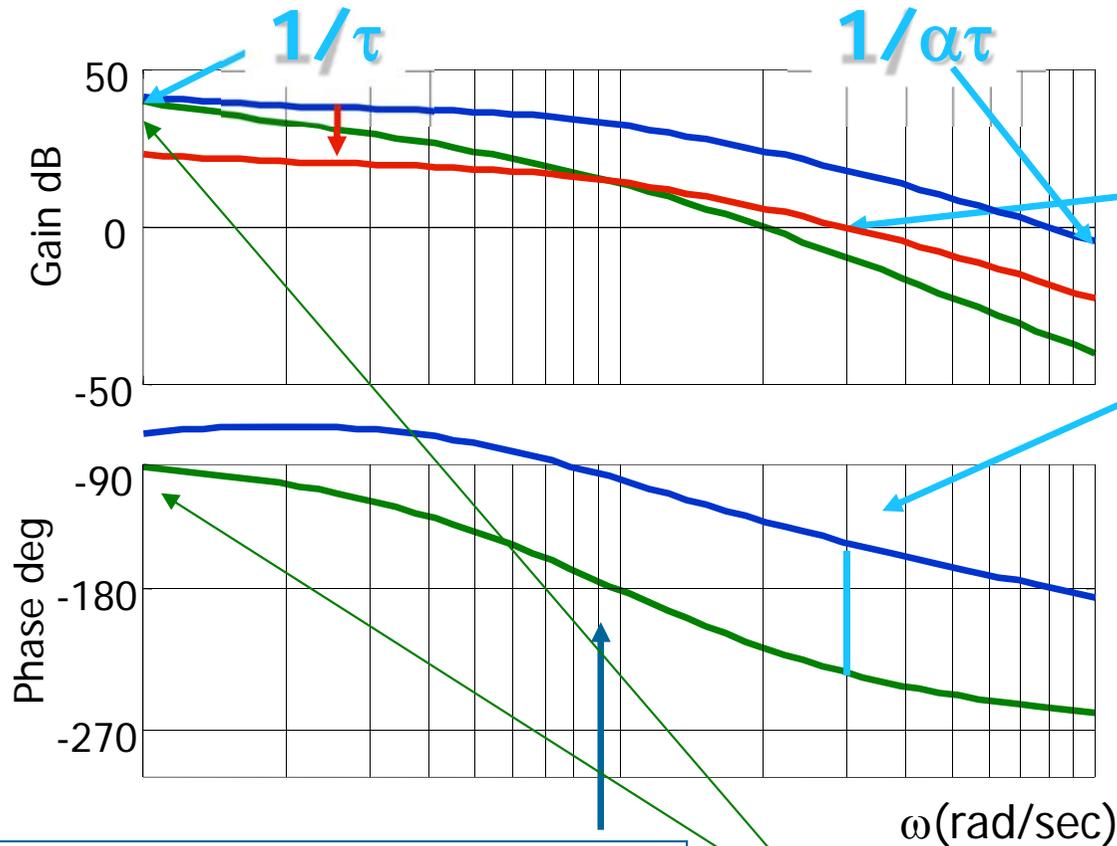


aggiunta di un polo nell'origine

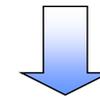
# Rete di Anticipo (phase lead)

- Effetti sulla f.d.t. di anello

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} ; \alpha < 1$$



se si vuole  $\omega_c$  come prima



Con la rete di anticipo non si può ottenere  $M_f \cong 90^\circ$  perché max anticipo è  $< 90^\circ$

per imporre  $\omega_c$  si può modificare il  $\mu_R$  del regolatore statico

La specifica sul  $M_f \cong 90^\circ$  si può soddisfare qui

**Aggiunto polo nell'origine**

# Reti anticipatrici formule di inversione

- L'obiettivo è di identificare delle formule per il progetto dei gradi di libertà  $(\alpha, \tau)$  al fine di assegnare una certa pulsazione di attraversamento e un certo margine di fase desiderati

NOTA: la rete sfasa in anticipo e amplifica. Quindi la pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_c^*$  deve essere  $\geq$  a quella del sistema esteso e inoltre la fase del sistema esteso per  $\omega = \omega_c^*$  deve essere minore di  $-180^\circ + M_f^*$  ( $M_f^*$  margine di fase desiderato).

- Problema: Dati valori desiderati  $(M^*, \phi^*, \omega_c^*)$  (con  $M^* > 1$ ,  $0 < \phi^* < 90^\circ$ ) identificare le formule per trovare  $(\alpha, \tau)$  della rete che alla pulsazione  $\omega = \omega_c^*$  amplifichi di  $M^*$  e sfasi di  $\phi^*$

## Reti anticipatrici formule di inversione

I valori di  $(\alpha, \tau)$  che garantiscono un'amplificazione pari a  $M^*$  e uno sfasamento  $\phi^*$  (con  $M^* > 1$  e  $0 < \phi^* < 90^\circ$ ) per  $\omega = \omega_c^*$  sono:

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}, \quad \alpha\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

infatti

$$R(j\omega_c^*) = \frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^* e^{j\varphi^*} = M^* (\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

ovvero

$$(M^* \cos \varphi^* + jM^* \sin \varphi^*)(1 + j\alpha\tau\omega_c^*) = 1 + j\tau\omega_c^*$$

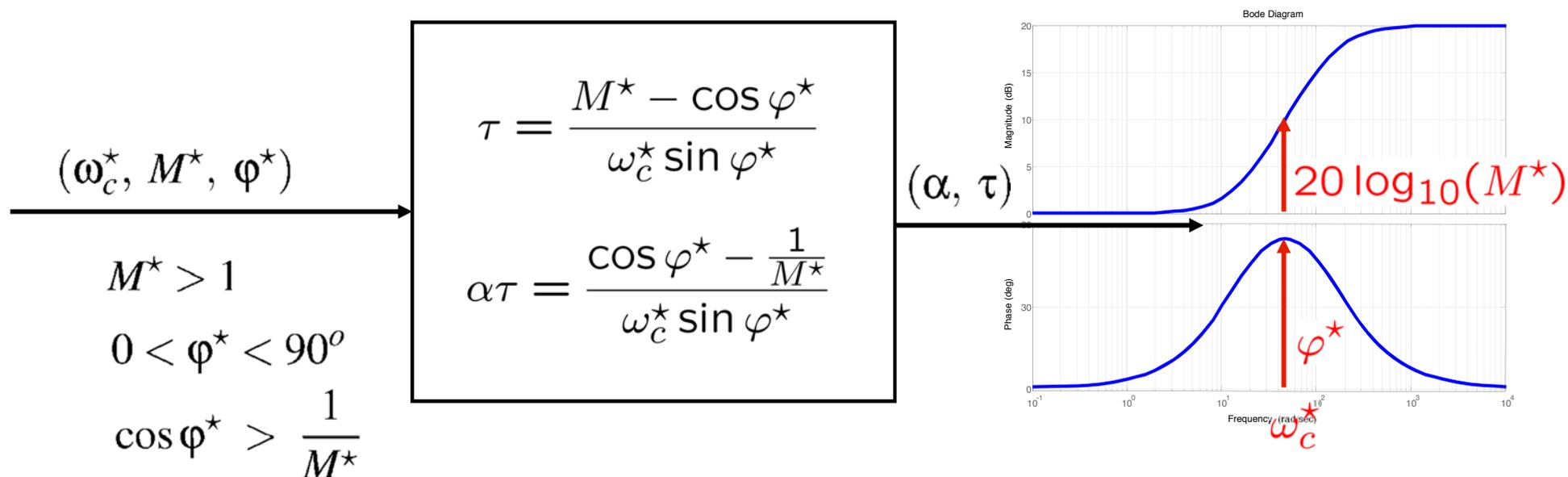
che è equivalente (eguagliando parte reale e parte immaginaria)

$$\begin{bmatrix} 1 & -M^* \cos \varphi^* \\ 0 & M^* \sin \varphi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\omega_c^* \\ \alpha\tau\omega_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^* \sin \varphi^* \\ M^* \cos \varphi^* - 1 \end{bmatrix}$$

# Reti anticipatrici formule di inversione

- Attenzione: non tutti gli sfasamenti  $0 < \phi^* < 90^\circ$  e le attenuazioni  $M^* > 1$  possono essere arbitrariamente ottenuti con  $\tau > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ .
- Infatti mentre è facile verificare che  $0 < \phi^* < 90^\circ$  e  $M^* > 1$  garantiscono che  $\tau > 0$  e  $\alpha < 1$ , si ha che

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos \phi^* > \frac{1}{M^*}$$



# Reti anticipatrici formule di inversione

- Progetto mediante formule di inversione:

- Dati del problema:

- Sistema esteso  $G_e(s)$

- Pulsazione di attraversamento  $\omega_c^*$  e margine di fase  $M_f^*$

- Algoritmo per il progetto della rete anticipatrice

**Step1:** Calcolare  $|G_e(j\omega_c^*)|$  e  $\arg(G_e(j\omega_c^*))$  (lettura diagramma di Bode)

**Step2:** Calcolare

$$\begin{cases} M^* = 10^{\frac{-|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)|} \\ \varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_e(j\omega_c^*)) \end{cases}$$

Verificando che

$$\begin{cases} M^* > 1 \quad (\text{ovvero che } |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} < 0) \\ 0 < \varphi^* < 90^\circ \quad (\text{ovvero che } \arg(G_e(j\omega_c^*)) < -180^\circ + M_f^*) \\ \cos \varphi^* > \frac{1}{M^*} \end{cases}$$

**Step3:** Calcolare  $(\alpha, \tau)$  mediante le formule di inversione

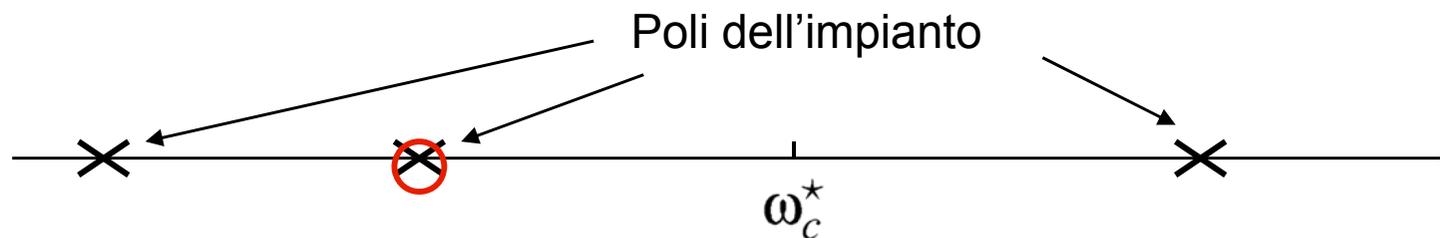
## Reti anticipatrici: code di assestamento

---

- La presenza di una coda di assestamento è fisiologica quando si usa una rete anticipatrice
  - La rete contiene uno zero collocato strutturalmente a frequenza inferiore a quella di attraversamento (nella funzione di trasferimento del sistema in retroazione lo zero fungerà da attrattore per un polo dell'impianto)
  - La dinamica residua complessiva risulterà quindi più lenta di quella imposta con la frequenza di attraversamento
  - Se si sono imposti poli complessi coniugati, la coda di assestamento potrebbe essere più corta del tempo di assestamento

# Reti anticipatrici: progetto per cancellazione

- Per eliminare la coda di assestamento si può pensare ad un progetto per cancellazione.
- si colloca lo zero della rete in cancellazione di un polo dell'impianto
- è opportuno scegliere il polo a frequenza inferiore alla  $\omega_c^*$  prescelta più vicino ad essa



- il progetto per cancellazione non è sempre possibile:
  - occorre verificarne la fattibilità
  - lo zero è fissato, resta da valutare l'effetto del polo

# Reti anticipatrici: progetto per cancellazione

## Step 1)

$\tau_z = \tau$  fissato  $\Rightarrow$  Si può valutare lo sfasamento

$$\varphi_z = \text{atan}(\tau_z \omega_c^*) > 0$$

e l'amplificazione

$$M_z = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + (\tau_z \omega_c^*)^2}) > 0$$

dello zero alla pulsazione  $\omega_c^*$ .

## Step 2)

Calcolare l'attenuazione desiderata del polo a  $\omega = \omega_c^*$

$$M_p = -(|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + M_z)$$

e il valore di  $\tau_p = \alpha\tau$  che garantisce l'attenuazione  $M_p$

$$\tau_p = \frac{\sqrt{10^{\frac{-M_p}{10}} - 1}}{\omega_c^*}$$

# Reti anticipatrici: progetto per cancellazione

Nel caso in cui si considerino valori in **scala lineare** e non in decibel le formule relative ai primi due step diventano

## Step 1)

$\tau_z = \tau$  fissato  $\Rightarrow$  Si può valutare lo sfasamento

$$\varphi_z = \text{atan}(\tau_z \omega_c^*) > 0$$

e l'amplificazione

$$M_z = \sqrt{1 + (\tau_z \omega_c^*)^2} > 1$$

dello zero alla pulsazione  $\omega_c^*$ .

## Step 2)

Calcolare l'attenuazione desiderata del polo a  $\omega = \omega_c^*$

$$M_p = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)| \cdot M_z}$$

e il valore di  $\tau_p = \alpha\tau$  che garantisce l'attenuazione  $M_p$

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\frac{1}{M_p^2} - 1}}{\omega_c^*} = \frac{\sqrt{(|G_e(j\omega_c^*)| \cdot M_z)^2 - 1}}{\omega_c^*}$$

# Reti anticipatrici: progetto per cancellazione

---

## Step 3)

Valutare se lo sfasamento  $\varphi_p(\omega) = -\text{atan}(\tau_p \omega) < 0$  del polo per  $\omega = \omega_c^*$  risulta essere compatibile con il margine di fase desiderato, ovvero:

$$180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi_z(\omega_c^*) + \varphi_p(\omega_c^*) \geq M_f^*$$

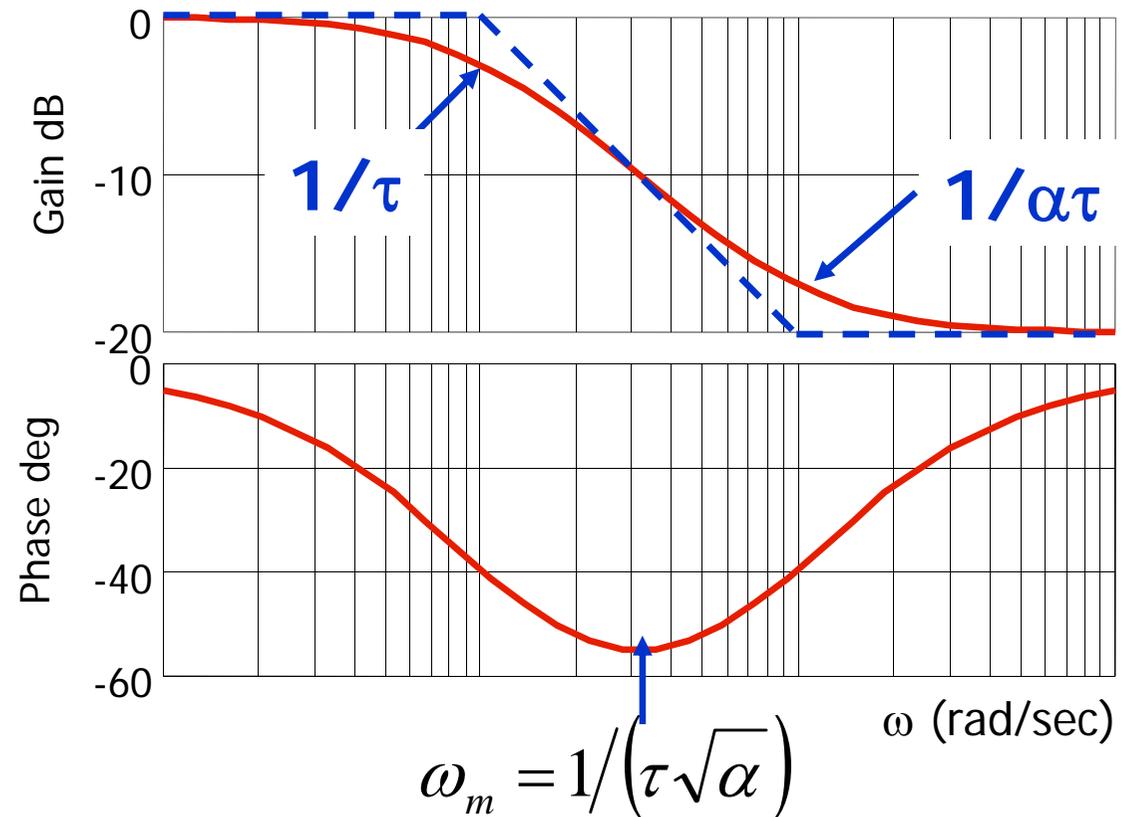
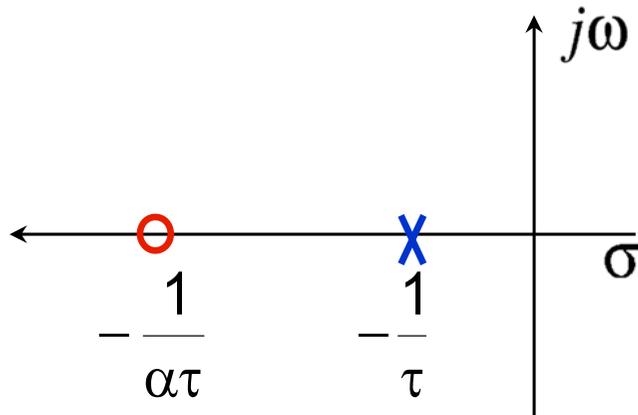
## Step 4)

Se sÌ, si sceglie  $\alpha\tau = \tau_p$ , altrimenti provare con un diverso valore di  $\omega_c^*$

# Rete di Ritardo (phase lag)

- Funzione di trasferimento

$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}; 0 \leq \alpha \leq 1$$



La rete di ritardo ha due effetti sulla funzione di anello:

- **riduce il guadagno per  $\omega > 1/\tau \Rightarrow$  effetto utile**
- **peggiora il margine di fase intorno ad  $\omega \Rightarrow$  effetto collaterale**

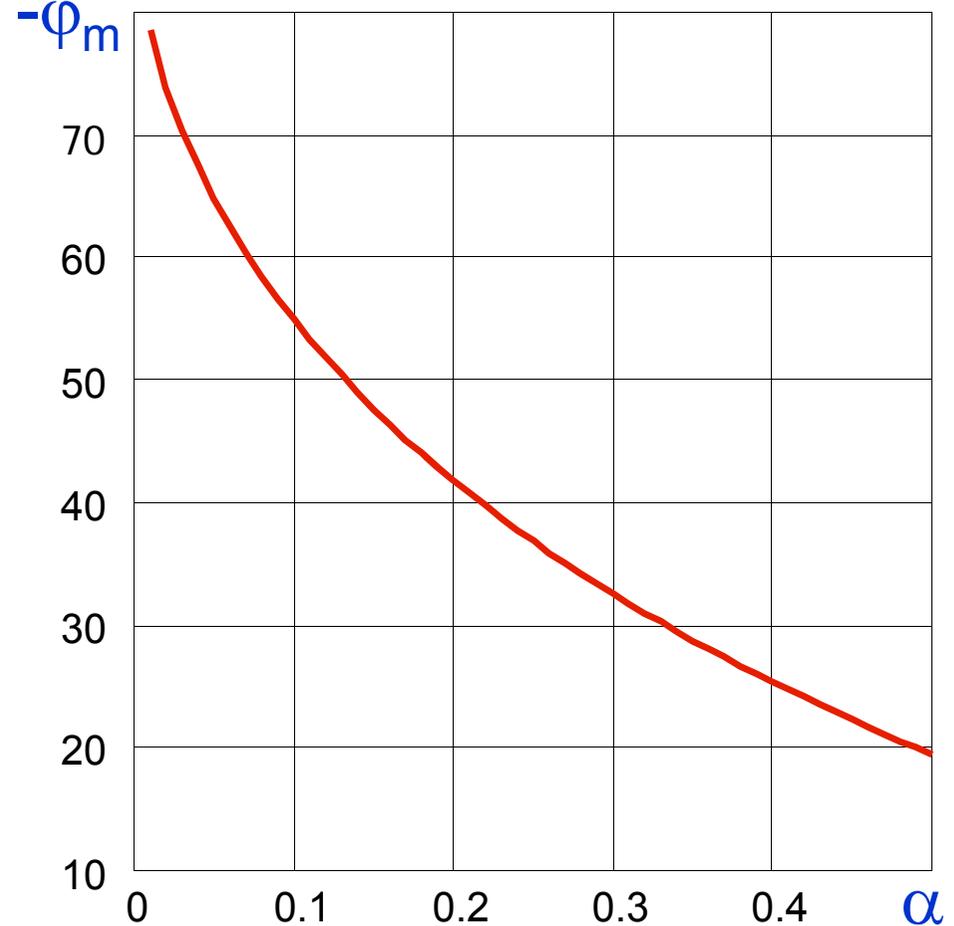
# Rete di Ritardo (phase lag)

- Formule utili

$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}; \alpha < 1$$

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$
$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$
$$\omega_m = \sqrt{z p} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

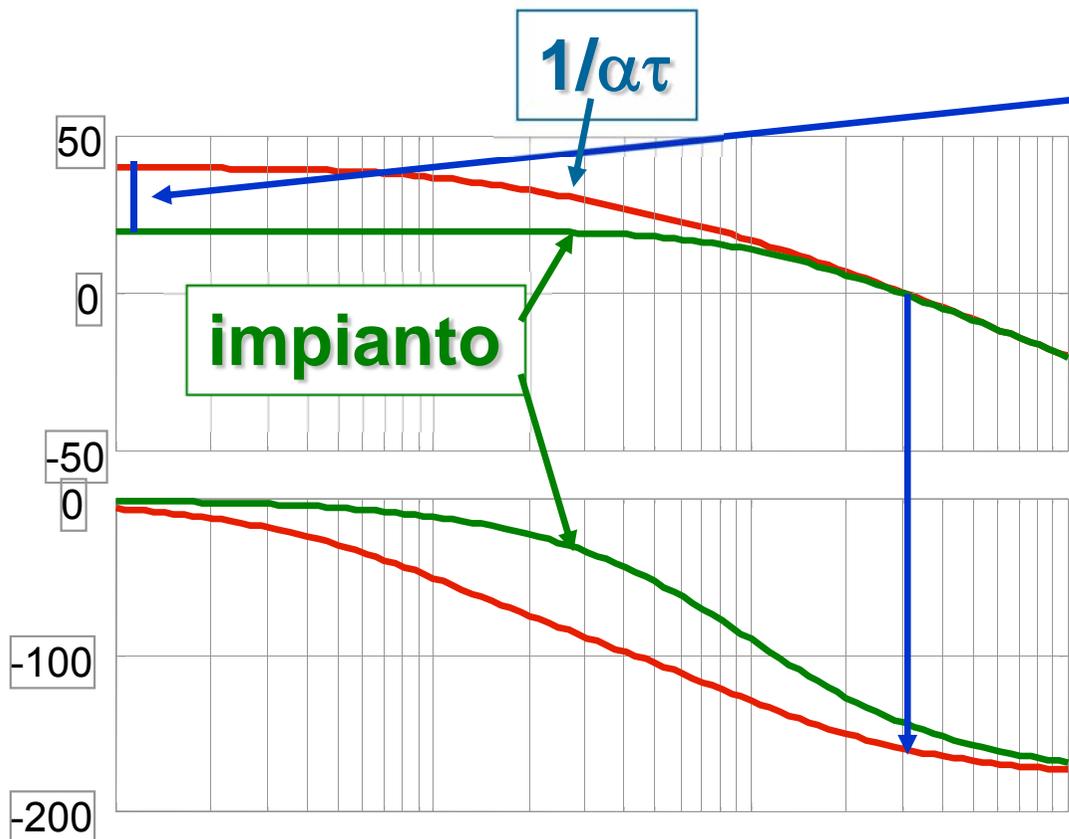
Massimo sfasamento negativo introdotto dalla rete



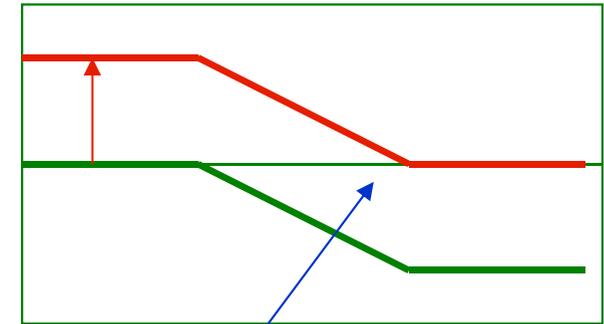
# Rete di Ritardo (phase lag)

- Effetti sulla f.d.t. di anello
  - due possibilità
    - aumento del guadagno in bassa frequenza senza alterare il comportamento in alta frequenza

$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} ; \alpha < 1$$



$$\mu_R = 1/\alpha$$

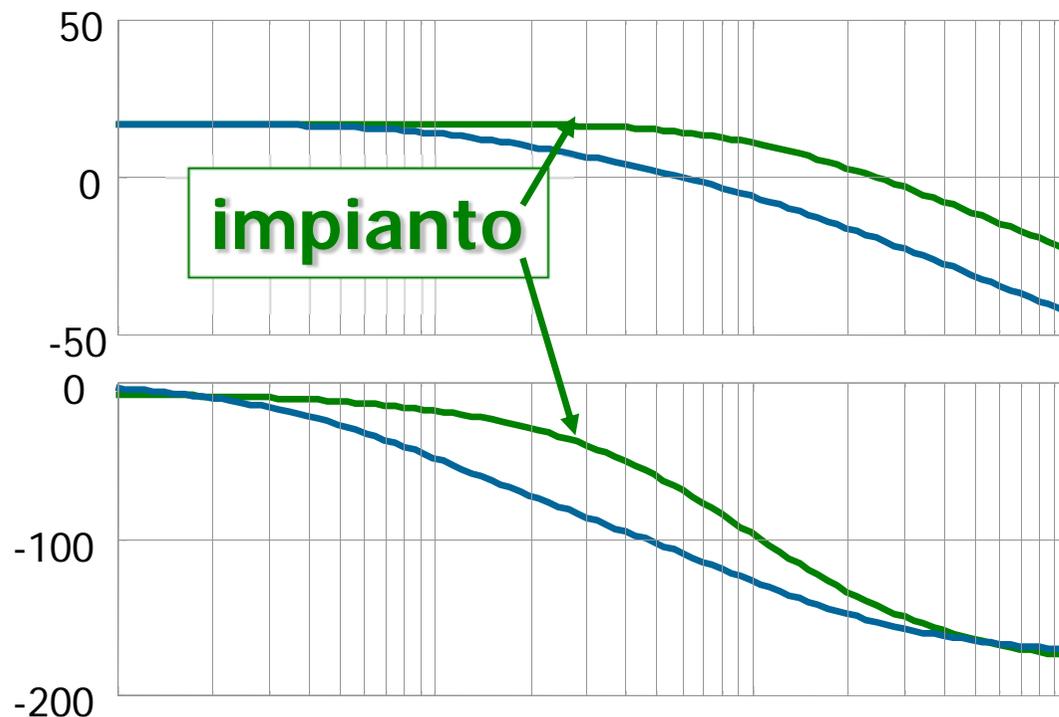


$$1/\alpha\tau \cong \omega_c/10$$

## Rete di Ritardo (phase lag)

- Effetti sulla f.d.t. di anello
  - due possibilità
    - **riduzione del guadagno in alta frequenza per migliorare il margine di fase**
      - **si riduce la banda passante**

$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} ; \alpha < 1$$



$$\mu_R = 1$$

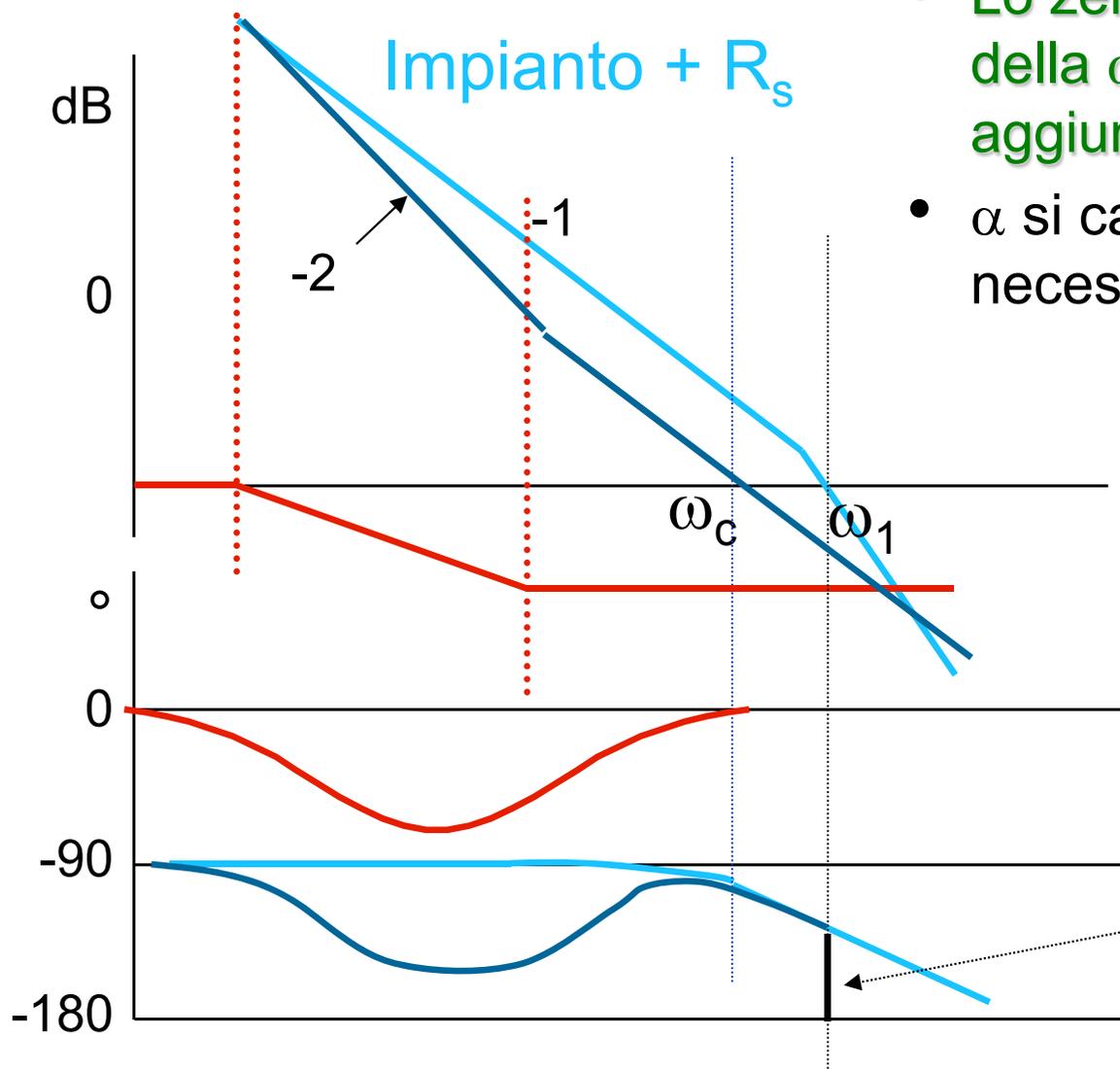
$\tau$  e  $\alpha\tau$  maggiori della più grande costante di tempo dell'impianto

**a parte evidenti cambiamenti di segno sono valide le stesse formule della rete di anticipo**

# Sintesi delle Reti di Ritardo

$$R(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}; \alpha < 1$$

- Si sfrutta l'**attenuazione** senza accentuare il ritardo di fase
  - Lo zero si colloca una decade prima della  $\omega_c$  scelta, in modo da non aggiungere ritardo di fase in  $\omega_c$
  - $\alpha$  si calcola per ottenere l'attenuazione necessaria per imporre  $\omega_c$



Attenzione alla coppia polo/zero strutturalmente a frequenza più bassa di quella di taglio  
 ⇒ coda di assestamento

si usa se  
 **$M_F$  non soddisfacente**  
 e  $\omega_c < \omega_1$

# Reti ritardatrici formule di inversione

- L'obiettivo è di identificare delle formule per il progetto dei gradi di libertà  $(\alpha, \tau)$  al fine di assegnare una certa pulsazione di attraversamento e un certo margine di fase desiderati

NOTA: La rete attenua e sfasa in ritardo. Quindi la pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_c^*$  deve essere  $\leq$  a quella del sistema esteso e inoltre la fase del sistema esteso per  $\omega = \omega_c^*$  deve essere maggiore di  $-180^\circ + M_f^*$  ( $M_f^*$  margine di fase desiderato).

- Problema: Dati valori desiderati  $(M^*, \phi^*, \omega_c^*)$  (con  $0 < M^* < 1$ ,  $-90 < \phi^* < 0^\circ$ ) identificare le formule per trovare  $(\alpha, \tau)$  della rete che alla pulsazione  $\omega = \omega_c^*$  attenui di  $M^*$  e sfasi di  $\phi^*$

## Reti ritardatrice formule di inversione

- I valori di  $(\alpha, \tau)$  che garantiscono un'attenuazione pari a  $M^*$  e uno sfasamento  $\varphi^*$  (con  $0 < M^* < 1$  e  $-90^\circ < \varphi^* < 0^\circ$ ) per  $\omega = \omega_c^*$  sono:

$$\alpha\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}, \quad \tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

infatti

$$R(j\omega_c^*) = \frac{1 + j\alpha\tau\omega_c^*}{1 + j\tau\omega_c^*} = M^* e^{j\varphi^*} = M^* (\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

ovvero

$$(M^* \cos \varphi^* + jM^* \sin \varphi^*)(1 + j\tau\omega_c^*) = 1 + j\alpha\tau\omega_c^*$$

che è equivalente (eguagliando parte reale e parte immaginaria)

$$\begin{bmatrix} 1 & -M^* \cos \varphi^* \\ 0 & M^* \sin \varphi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\tau\omega_c^* \\ \tau\omega_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^* \sin \varphi^* \\ M^* \cos \varphi^* - 1 \end{bmatrix}$$

# Reti ritardatrici formule di inversione

- Attenzione: non tutti gli sfasamenti  $-90^\circ < \phi^* < 0^\circ$  e le attenuazioni  $0 < M^* < 1$  possono essere arbitrariamente ottenuti con  $\tau > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ .
- Infatti mentre è facile verificare che  $-90^\circ < \phi^* < 0^\circ$  e  $0 < M^* < 1$  garantiscono che  $\tau > 0$  e  $\alpha < 1$ , si ha che

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow M^* < \cos \phi^*$$

$$(\omega_c^*, M^*, \phi^*)$$

$$0 < M^* < 1$$

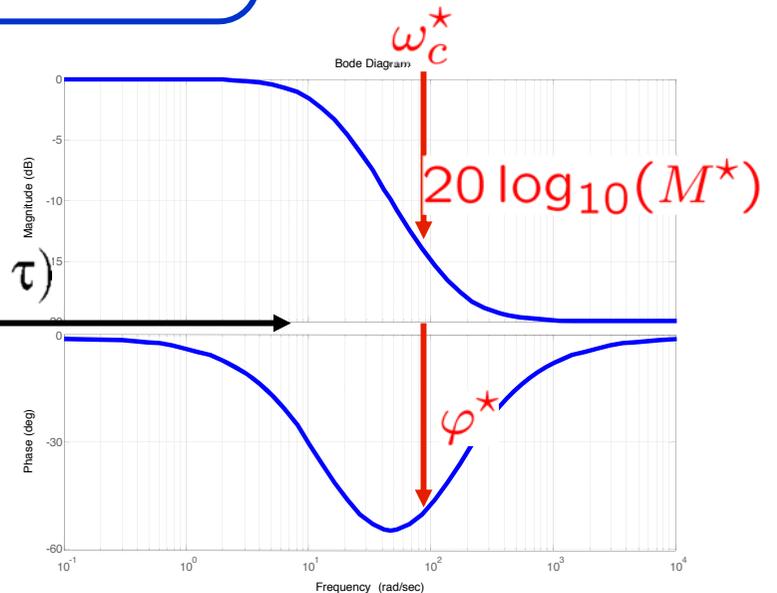
$$-90^\circ < \phi^* < 0^\circ$$

$$M^* < \cos \phi^*$$

$$\alpha \tau = \frac{M^* - \cos \phi^*}{\omega_c^* \sin \phi^*}$$

$$\tau = \frac{\cos \phi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \phi^*}$$

$$(\alpha, \tau)$$



# Reti ritardatrici formule di inversione

- Progetto mediante formule di inversione:
  - Dati del problema:
    - Sistema esteso  $G_e(s)$
    - Pulsazione di attraversamento  $\omega_c^*$  e margine di fase  $M_f^*$
- Algoritmo per il progetto della rete ritardatrice

**Step1:** Calcolare  $|G_e(j\omega_c^*)|$  e  $\arg(G_e(j\omega_c^*))$  (lettura diagramma di Bode)

**Step2:** Calcolare

$$\begin{cases} M^* = 10^{\frac{-|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)|} \\ \varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_e(j\omega_c^*)) \end{cases}$$

Verificando che

$$\begin{cases} M^* < 1 \quad (\text{ovvero che } |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} > 0) \\ -90^\circ < \varphi^* < 0^\circ (\text{ovvero che } \arg(G_e(j\omega_c^*)) > -180^\circ + M_f^*) \\ M^* < \cos \varphi^* \end{cases}$$

**Step3:** Calcolare  $(\alpha, \tau)$  mediante le formule di inversione

# Reti ritardatrici: progetto per cancellazione

## Step 1)

$\tau_z = \alpha\tau$  fissato  $\Rightarrow$  Si può valutare lo sfasamento

$$\varphi_z = \text{atan}(\tau_z \omega_c^*) > 0$$

e l'amplificazione

$$M_z = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + (\tau_z \omega_c^*)^2}) > 0$$

dello zero alla pulsazione  $\omega_c^*$ .

## Step 2)

Calcolare l'attenuazione desiderata del polo a  $\omega = \omega_c^*$

$$M_p = -(|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + M_z)$$

e il valore di  $\tau_p = \tau$  che garantisce l'attenuazione  $M_p$

$$\tau_p = \frac{\sqrt{10^{\frac{-M_p}{10}} - 1}}{\omega_c^*}$$

# Reti ritardatrici: progetto per cancellazione

Nel caso in cui si considerino valori in **scala lineare** e non in decibel le formule relative ai primi due step diventano

## Step 1)

$\tau_z = \alpha\tau$  fissato  $\Rightarrow$  Si può valutare lo sfasamento

$$\varphi_z = \text{atan}(\tau_z \omega_c^*) > 0$$

e l'amplificazione

$$M_z = \sqrt{1 + (\tau_z \omega_c^*)^2} > 1$$

dello zero alla pulsazione  $\omega_c^*$ .

## Step 2)

Calcolare l'attenuazione desiderata del polo a  $\omega = \omega_c^*$

$$M_p = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)| \cdot M_z}$$

e il valore di  $\tau_p = \tau$  che garantisce l'attenuazione  $M_p$

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\frac{1}{M_p^2} - 1}}{\omega_c^*} = \frac{\sqrt{(|G_e(j\omega_c^*)| \cdot M_z)^2 - 1}}{\omega_c^*}$$

# Reti ritardatrici: progetto per cancellazione

---

## Step 3)

Valutare se lo sfasamento  $\varphi_p(\omega) = -\text{atan}(\tau_p \omega) < 0$  del polo per  $\omega = \omega_c^*$  risulta essere compatibile con il margine di fase desiderato, ovvero:

$$180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi_z(\omega_c^*) + \varphi_p(\omega_c^*) \geq M_f^*$$

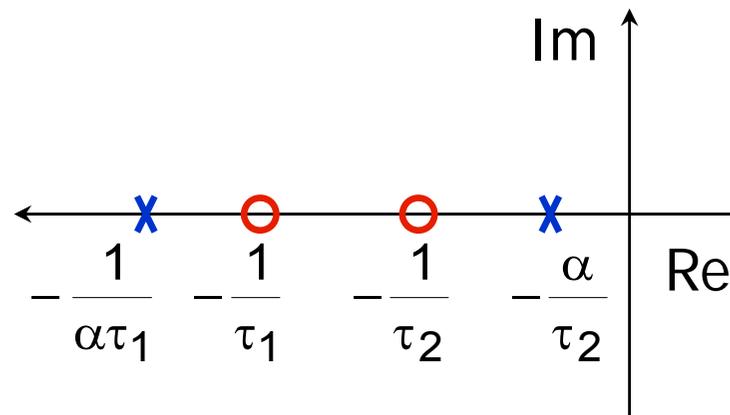
## Step 4)

Se sì, si sceglie  $\tau = \tau_p$ , altrimenti provare con un diverso valore di  $\omega_c^*$

# Rete di Ritardo e Anticipo (lead-lag)

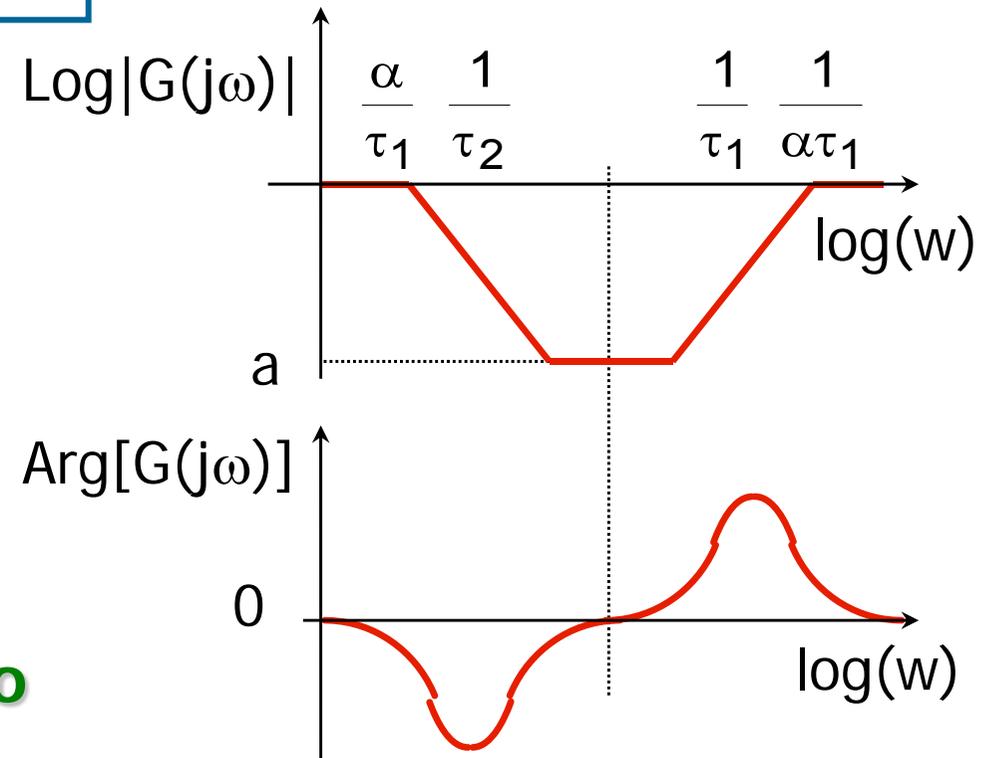
- Funzione di trasferimento

$$R(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha \tau_1 s)(1 + \tau_2 / \alpha s)} ; \alpha < 1$$



**Unione di rete di ritardo e di rete di anticipo**

Diagramma di Bode asintotico



**Consente di aumentare il guadagno in bassa frequenza senza pregiudicare la banda passante ed il margine di fase**

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

**RETI CORRETRICI**  
**FINE**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>