CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

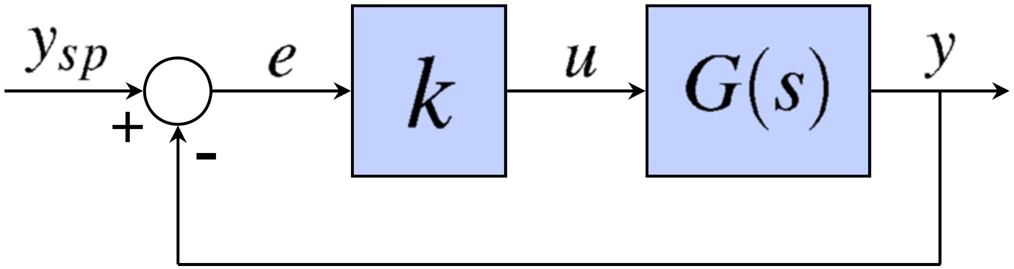
LUOGO DELLE RADICI

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Proprietà dei sistemi in retroazione

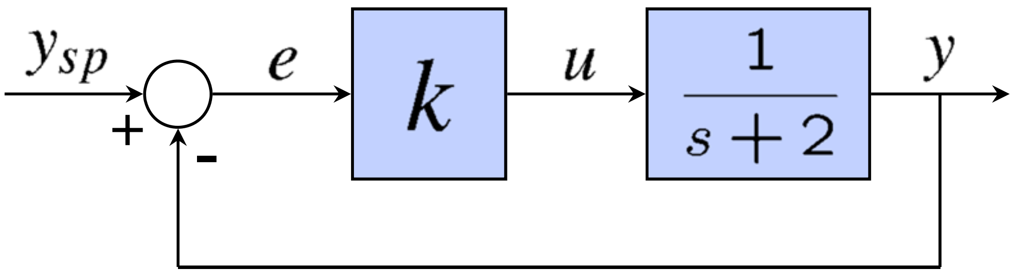


$$G_{c.l.}(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

Equazione caratteristica ➡ $1 + kG(s) = 0$

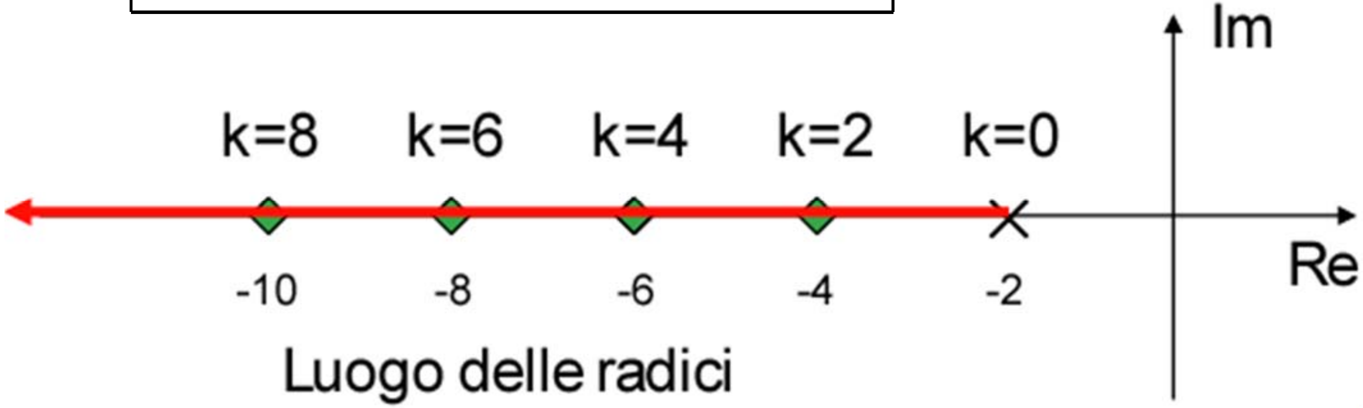
Le radici sono i poli del sistema in retroazione

Sistema del 1° ordine



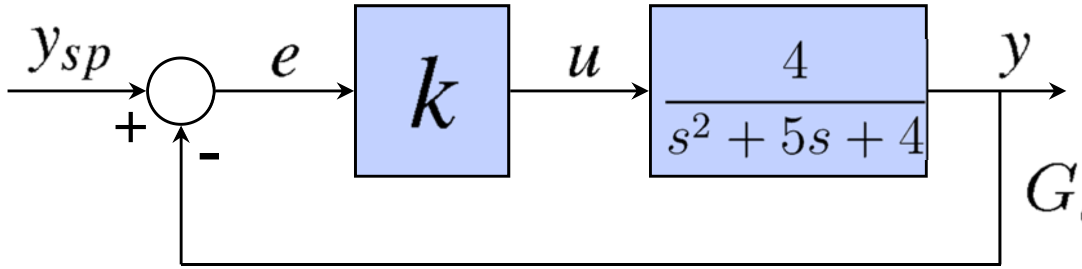
$$G_{c.l.}(s) = \frac{k}{s + \boxed{2 + k}}$$

Nuovo polo



Proprietà dei sistemi in retroazione

Sistema del 2° ordine



$$G_{c.l.}(s) = \frac{\frac{k}{1+k}\bar{\omega}_n^2}{s^2 + 2\bar{\delta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2}$$

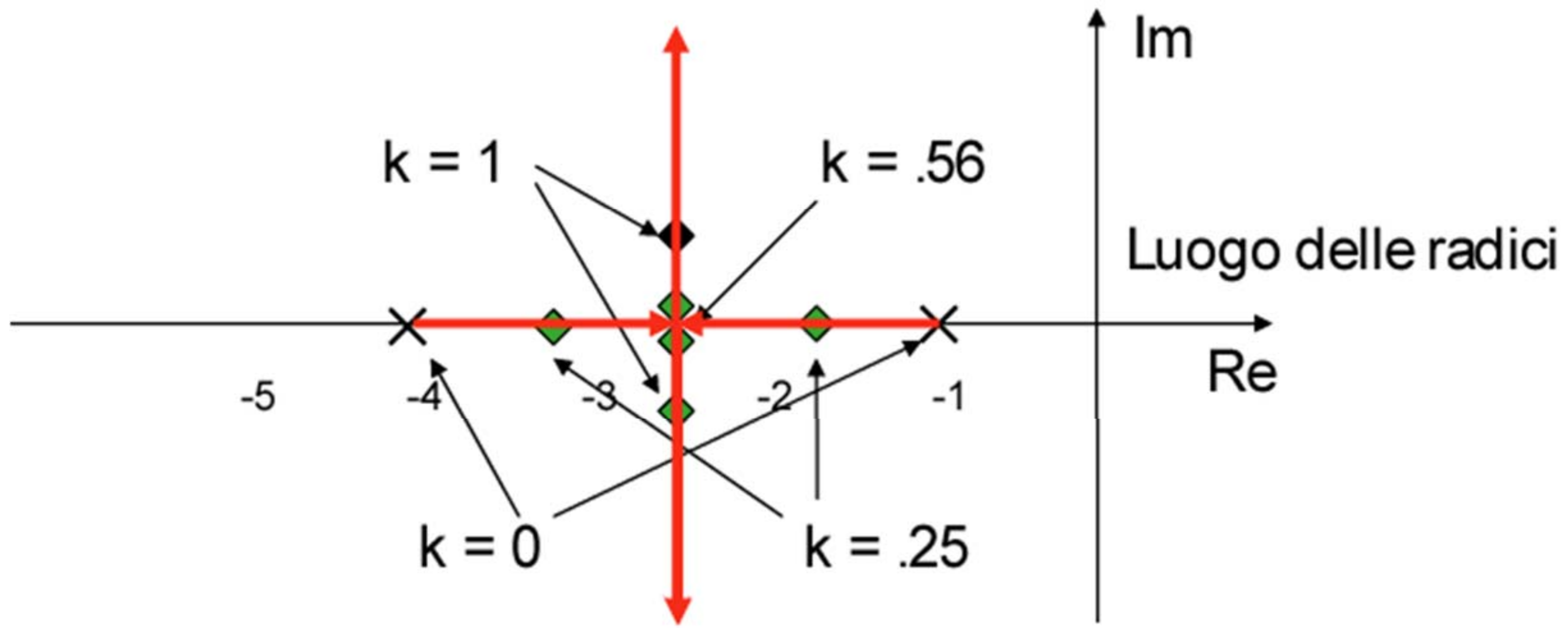
$\delta = 1.25$

$\omega_n = 2$

Radici reali distinti

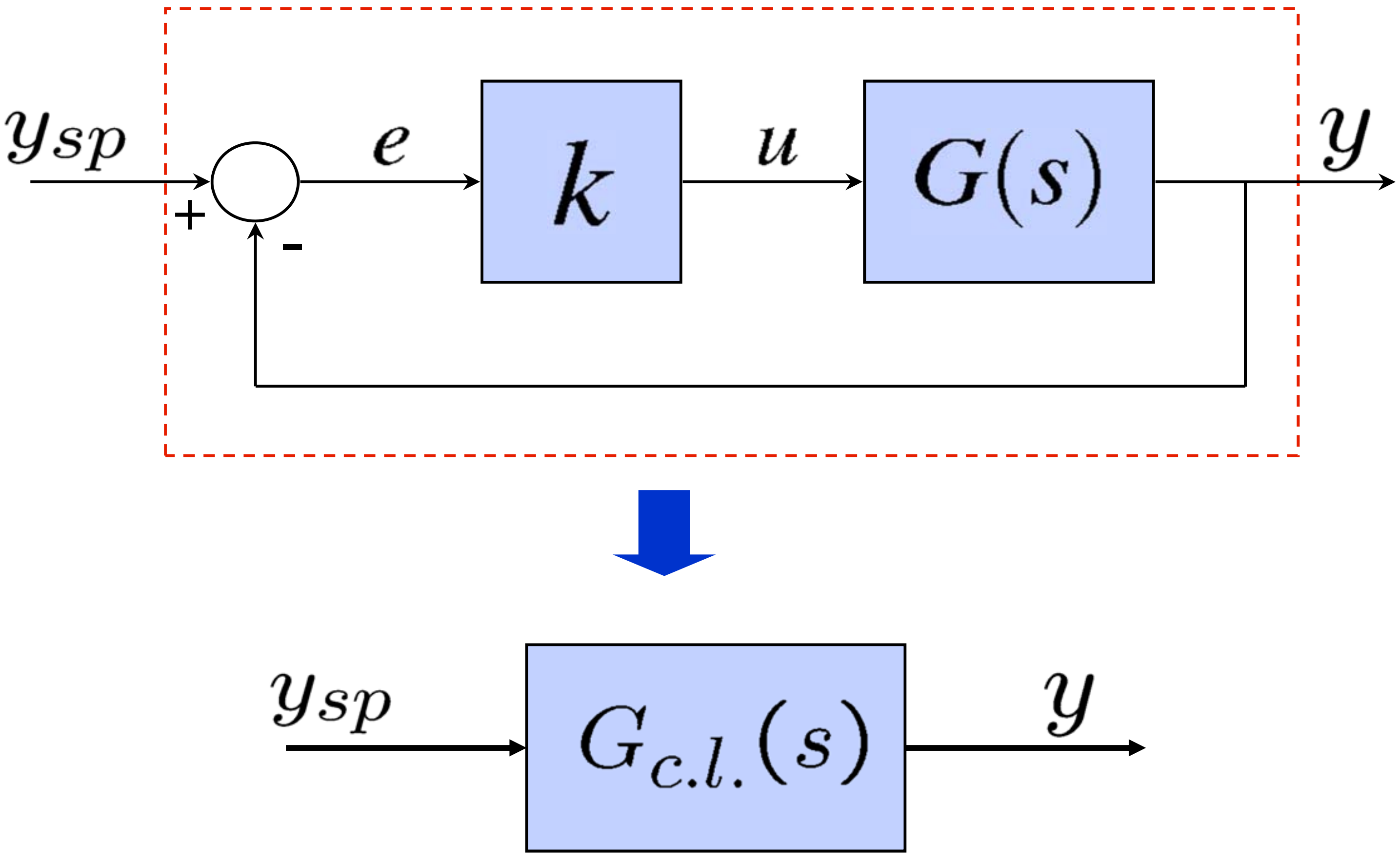
s=-1, s=-4

$$\bar{\delta} = \frac{1.25}{\sqrt{1+k}} \qquad \bar{\omega}_n = 2\sqrt{1+k}$$

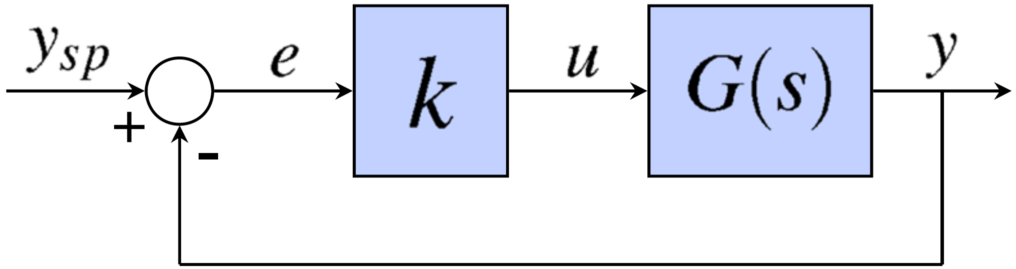


Luogo delle radici

- Il luogo delle radici è uno strumento per identificare la collocazione dei poli del sistema retroazionato al variare del guadagno statico a partire dai poli-zeri del sistema ad anello



Luogo delle radici



$$G_{c.l.}(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$$

Poli

$$1 + kG(s) = 0$$

- I poli del sistema in retroazione variano al variare del guadagno k da 0 a ∞.
- Ipotesi semplificativa: si consideri $G(s)$ nella forma

$$G(s) = \rho\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$\boxed{\text{Con } \rho > 0}$

$$1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cancel{D}(s)}_{k \to \infty} + k\underbrace{\cancel{N}(s)}_{k \to 0} = 0$$

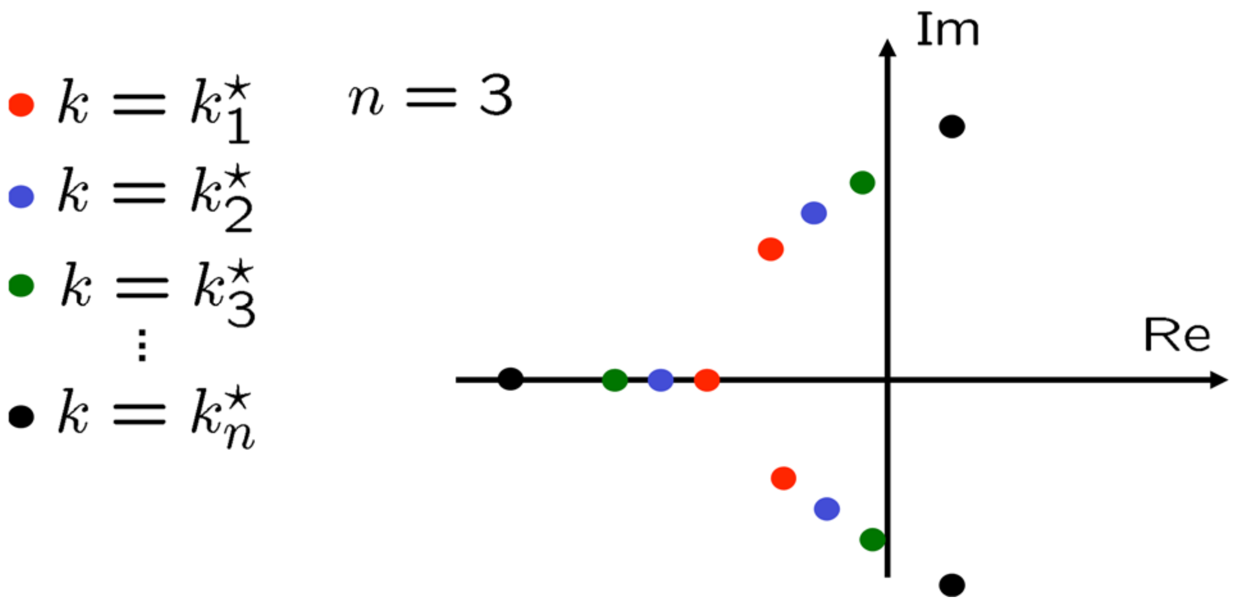
Al variare del guadagno i poli si spostano verso gli zeri o vanno verso ∞

Luogo delle radici

- L'ordine del polinomio $D(s) + kN(s)$ è lo stesso di quello di $D(s)$

  $\Rightarrow$ il numero di poli del sistema retroazionato è uguale a quello del sistema ad anello

- Fissato un valore di k le soluzioni dell'equazione caratteristica determinano n punti nel piano complesso con n ordine di $G(s)$



Il luogo delle radici è costituito da n "rami" parametrizzati nel valore di k. Una volta fissato $k = k^\star$ gli n punti sugli n rami identificano i poli del sistema retroazionato per quel valore di k.

- Per costruzione il luogo è simmetrico rispetto l'asse reale (infatti riporta le radici di un polinomio a coefficienti reali)

Luogo delle radici: proprietà

I. Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli del sistema in catena aperta parametrizzati nel valore di k (a ciascun ramo è associato un polo)

II. Ogni ramo:
- parte ($k = 0$) dalla posizione di un polo in catena aperta
- termina ($k = \infty$) nella posizione di uno zero del sistema o va all'infinito

III. Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale

IV. Per $k>0$, un punto dell'asse reale appartiene al luogo se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di poli/zeri del sistema ad anello aperto (nota: i poli cc non entrano nel computo entrando a coppie).
Per $k<0$, un punto dell'asse reale appartiene al luogo se si lascia alla sua destra un numero pari di poli/zeri del sistema ad anello aperto.

V. Ha asintoti in numero pari al grado relativo (zeri all'infinito)

Luogo delle radici: proprietà

VI. Gli asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale la cui ascissa vale

$$\sigma_a = \underbrace{\frac{1}{n-m}}_{\text{grado relativo}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i \right)$$

grado relativo

Poli di *G(s)*

Zeri di *G(s)*

VII. Gli asintoti dividono il piano complesso in parti uguali. In particolare, per $k>0$ l'angolo che l'asintoto forma con l'asse reale è

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-m-1)$$

mentre per $k<0$

$$\theta_{a,\nu} = \frac{2\nu\,\pi}{n-m}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-m-1)$$

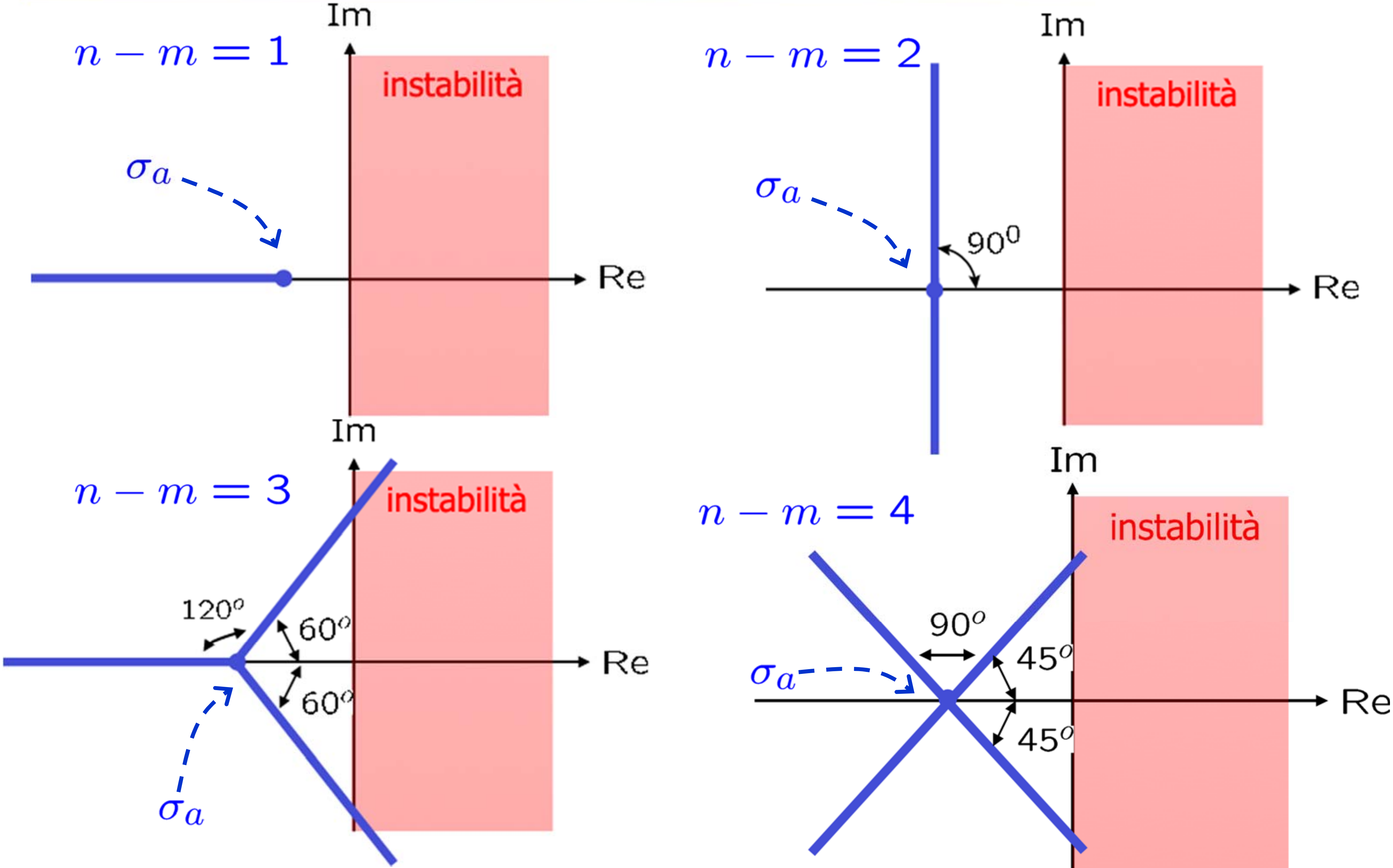
Luogo delle radici: proprietà

VIII. Per sistemi a grado relativo maggiore di 1, la somma dei poli è costante al variare di e in particolare vale

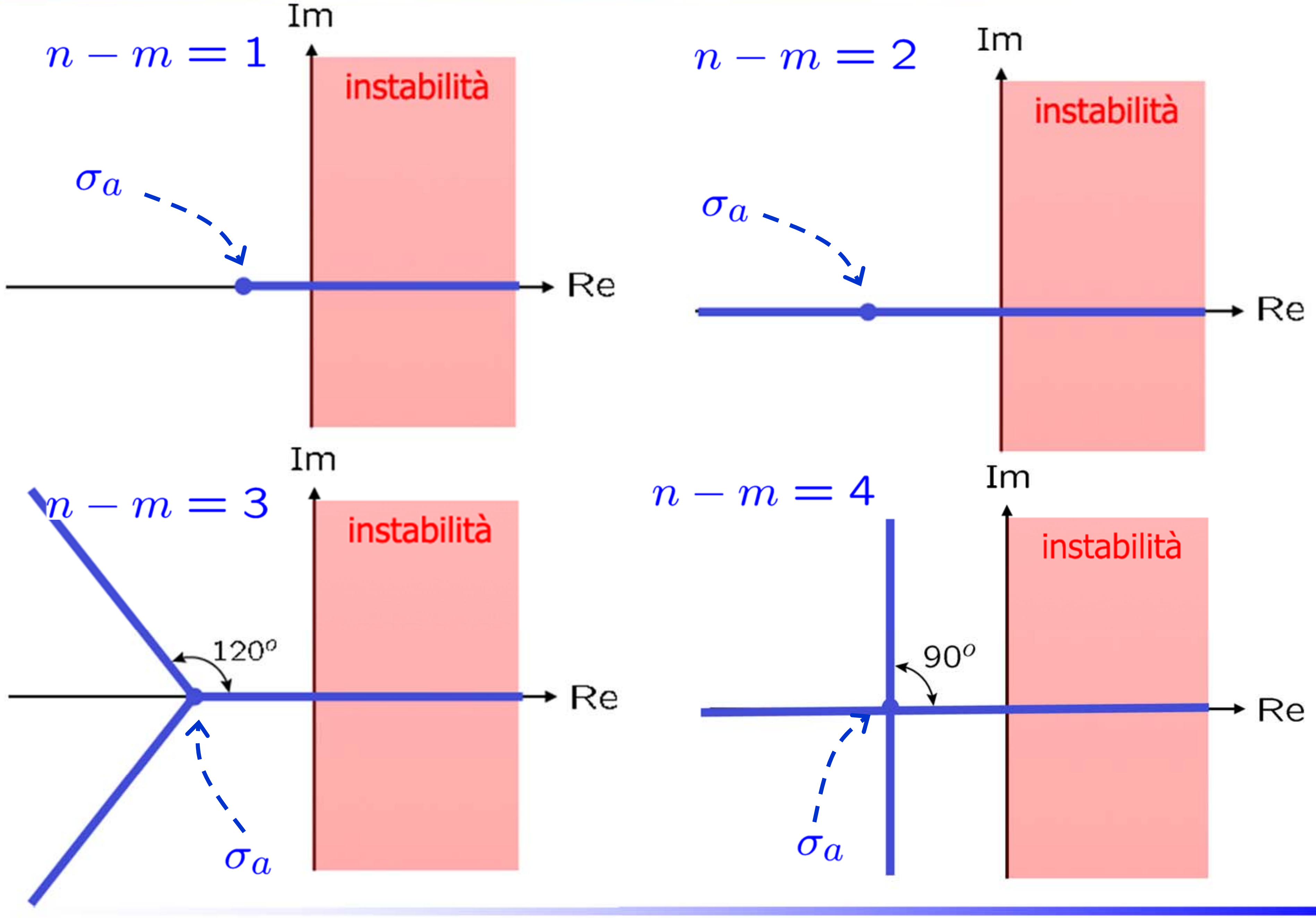
$$\sigma_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \quad \longleftarrow \text{-----} \quad \text{Baricentro del luogo}$$

 Luigi Biagiotti

Luogo delle radici: asintoti per k>0



Luogo delle radici: asintoti per k<0

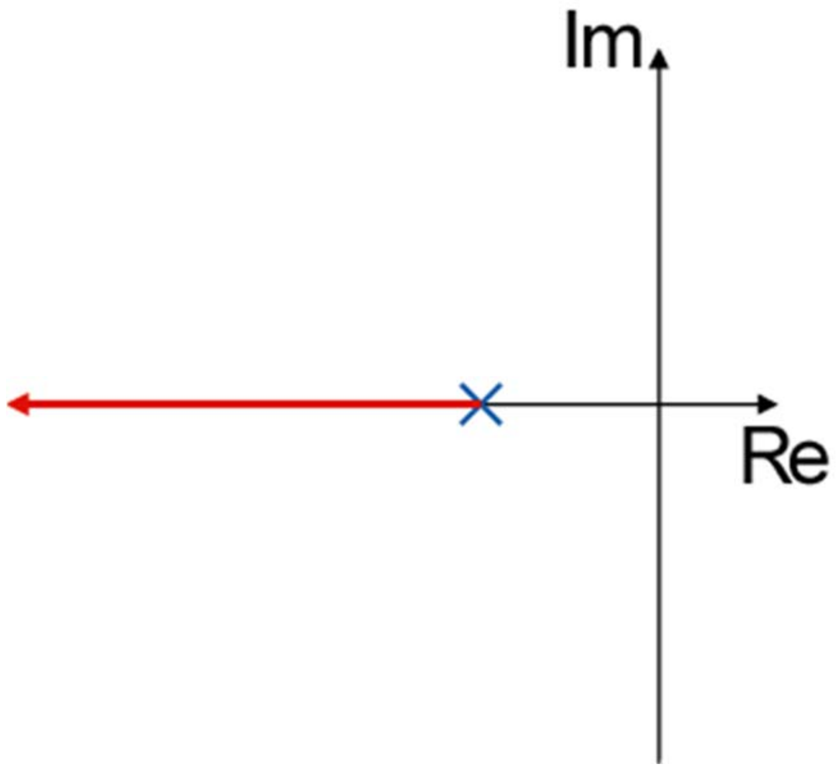


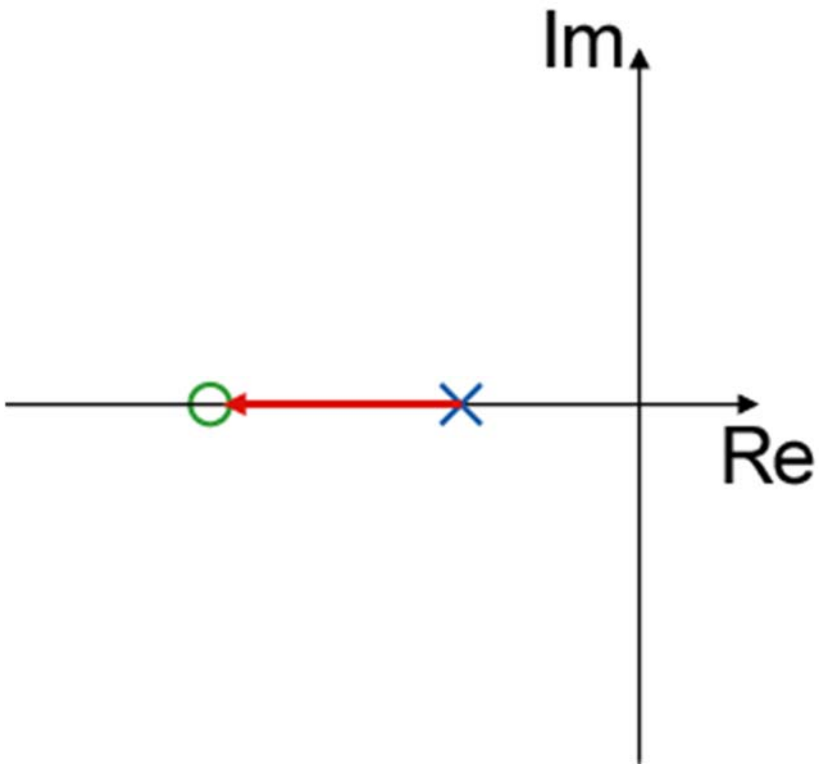
Esempio: sistemi del 1° ordine

Zero all'infinito

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

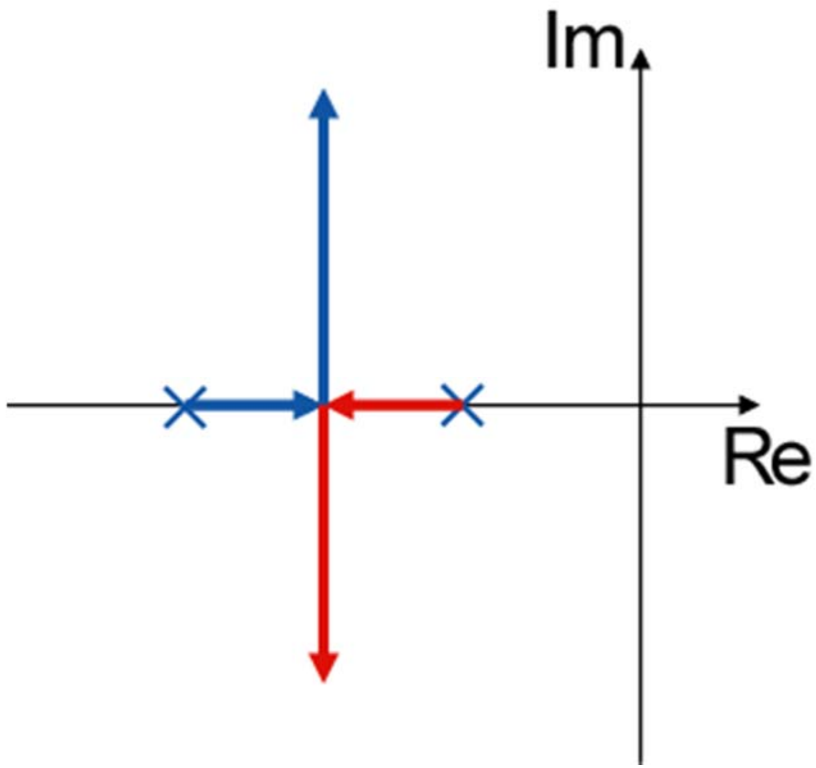
$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$



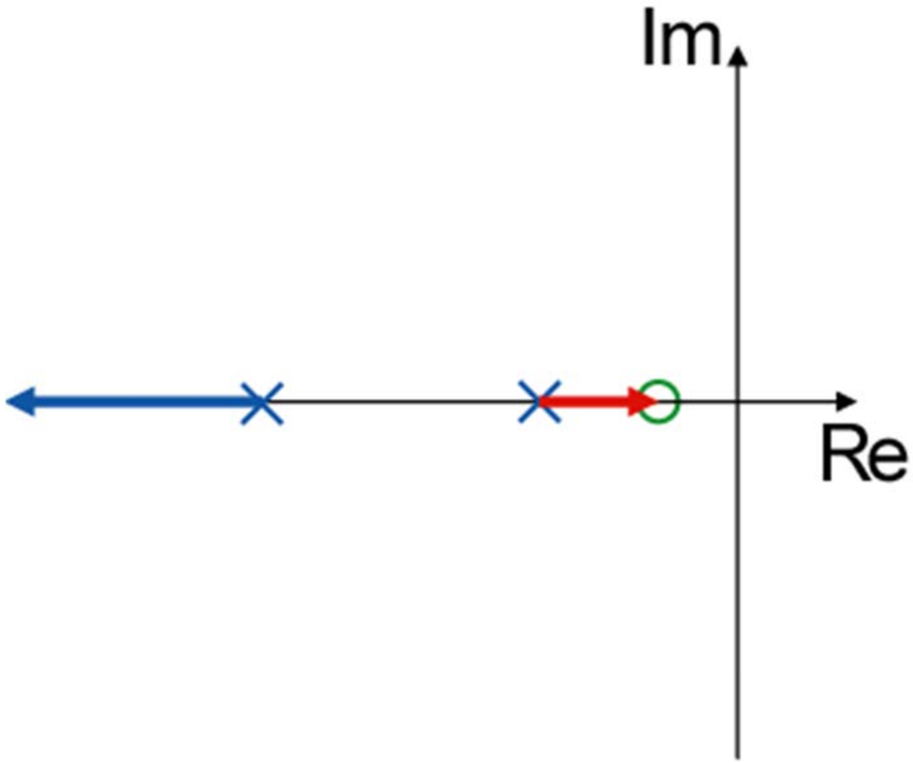


Esempio: sistemi del 2°ordine

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 10}$$



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 7s + 10}$$

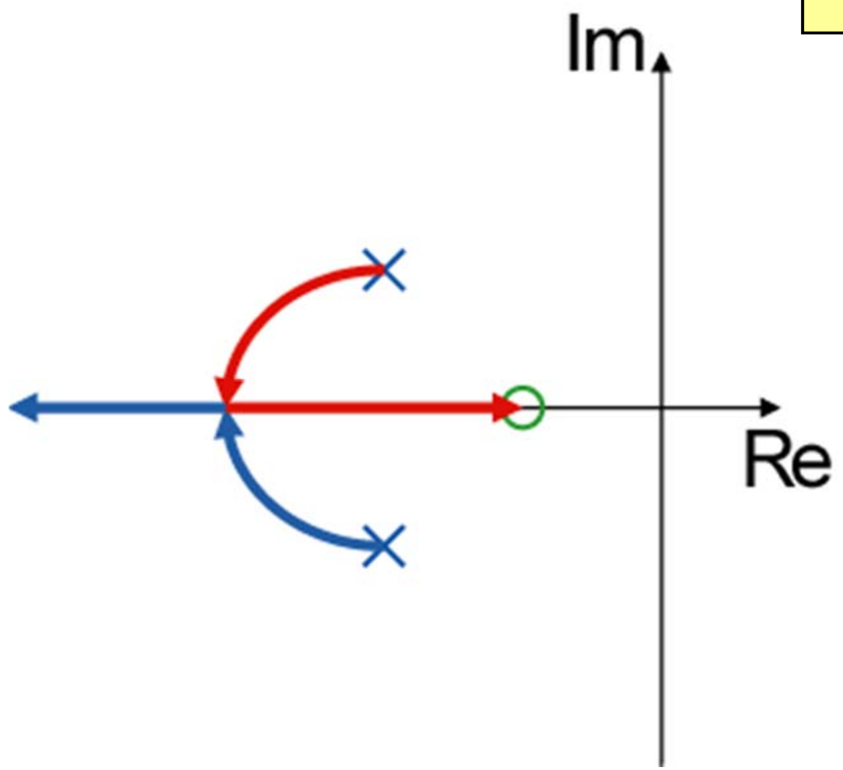


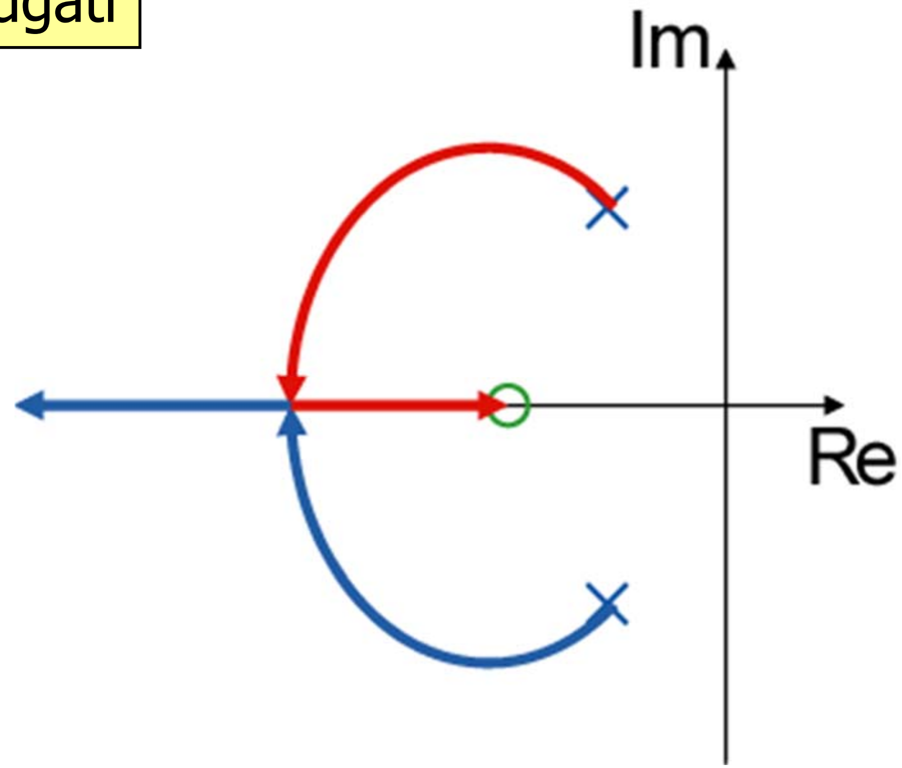
Esempio: sistemi del 2°ordine con zero

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+10s+41}$$

δ=0.78
Due poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{s+8}{s^2+10s+41}$$



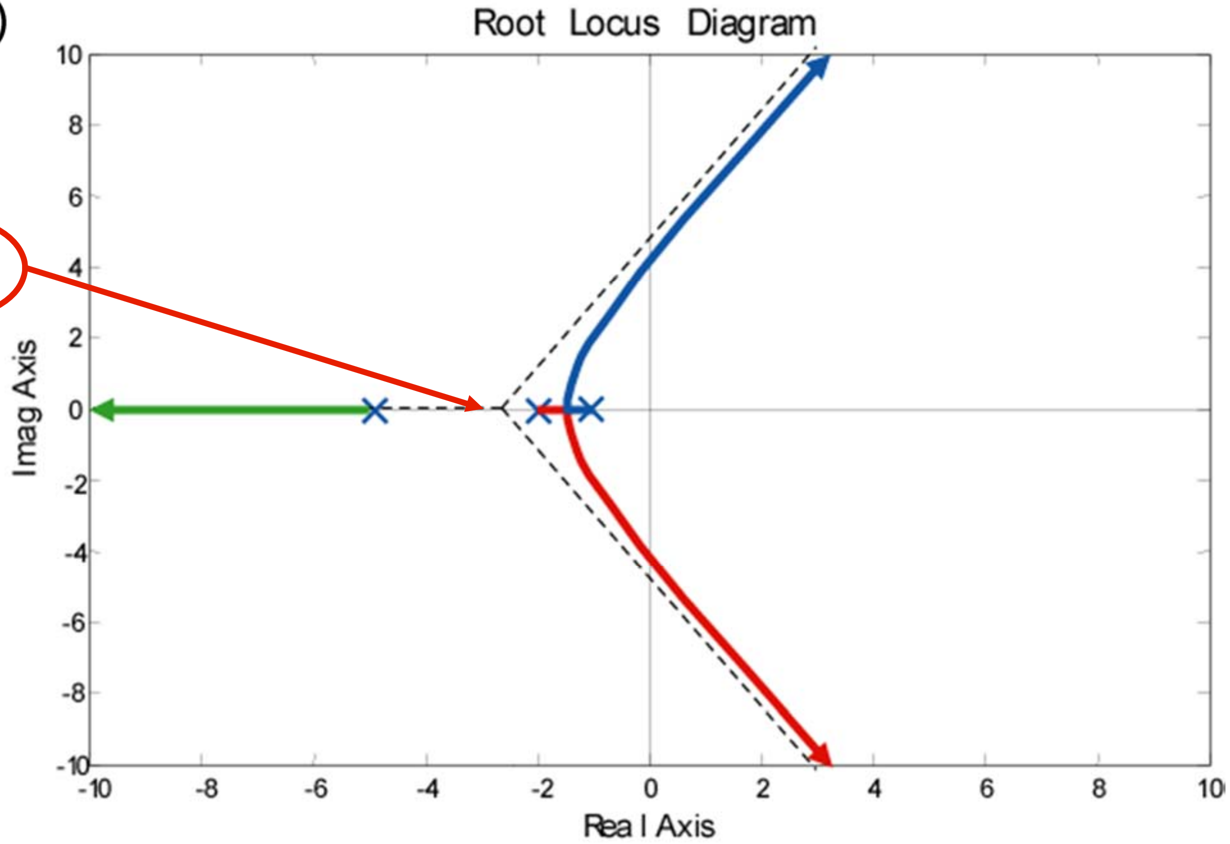


Esempio: sistemi del 3°ordine

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-1-2-5) = -2.6$$



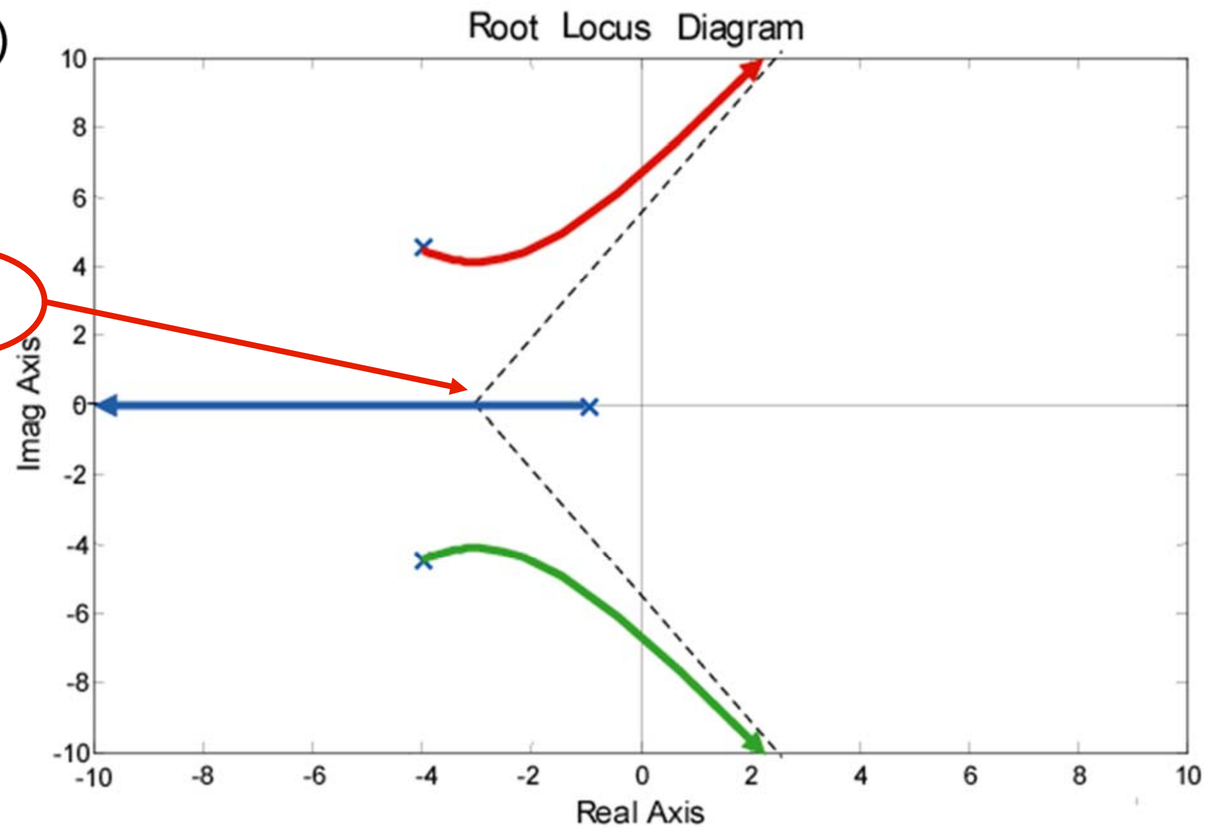
Esempio: sistemi del 3°ordine

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+8s+36)}$$

$$p_{1,2} = -4 \pm j4.47$$
$$p_3 = -1$$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-1-4-4) = -3$$

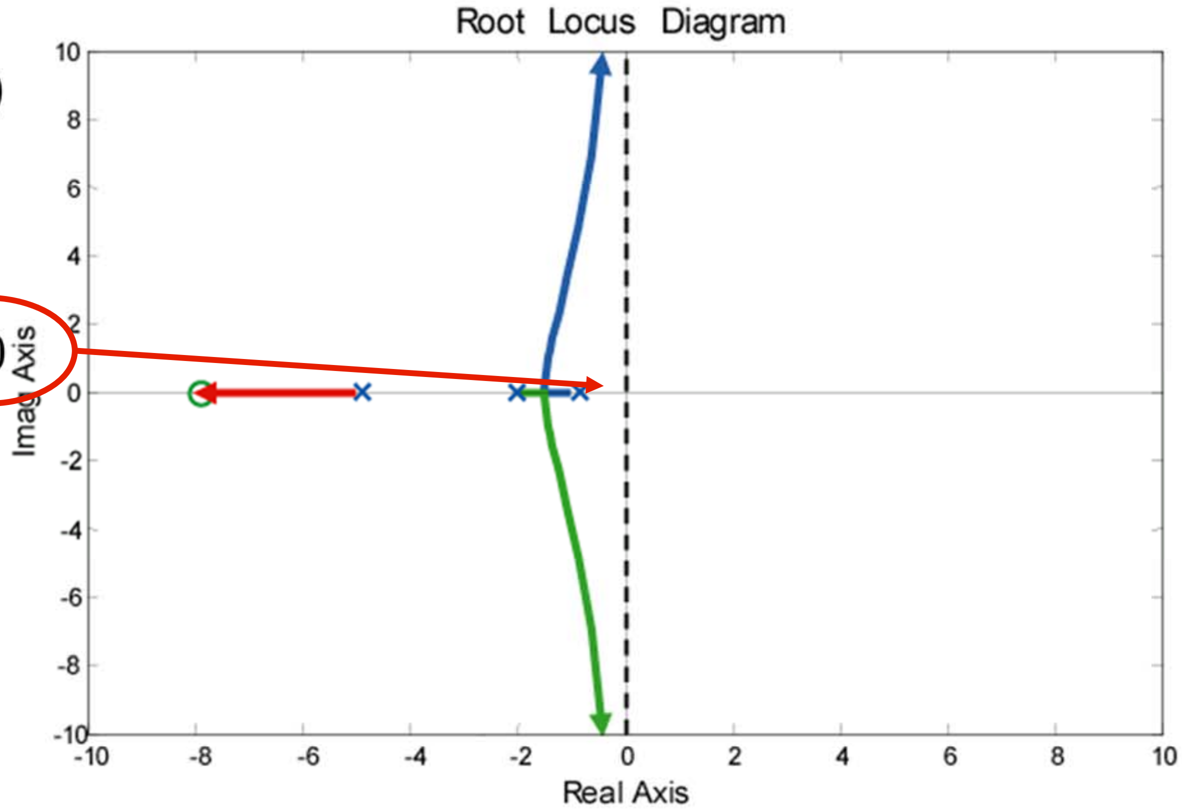


Esempio: sistemi del 3°ordine con zero

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i\right)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1-2-5+8) = 0$$

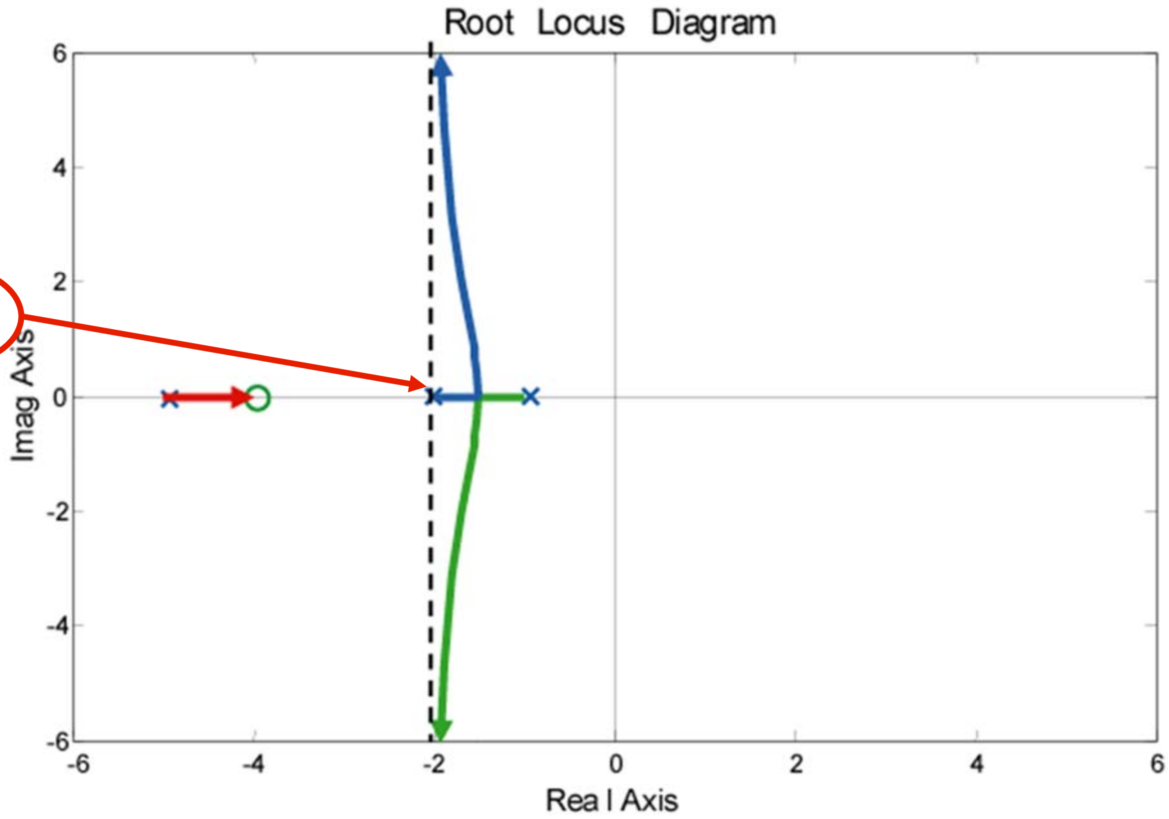


Esempio: sistemi del 3°ordine con zero

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i\right)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1-2-5+4) = -2$$



CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

LUOGO DELLE RADICI
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti