CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

Errori a regime

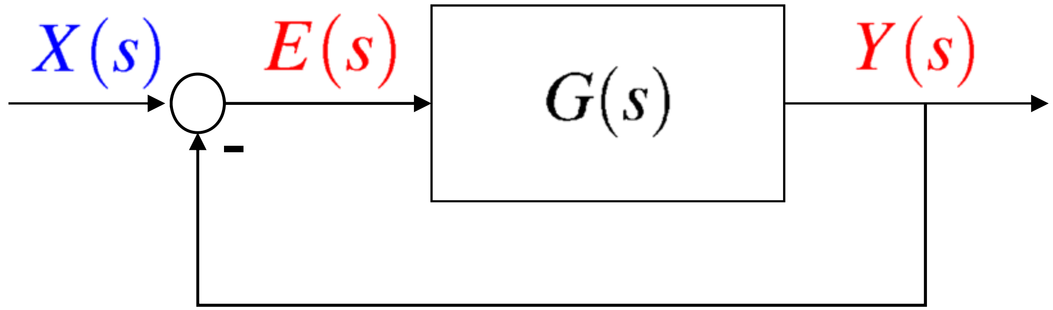
Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Errore a regime e tipo di sistema

- Consideriamo il sistema in retroazione unitaria:



$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} X(s)$$

con

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_k (1 + T_k\, s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2}\right)}{\prod_k (1 + \tau_k\, s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

- Errore a regime nella risposta ad un segnale *X(s)*:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{X(s)}{1+G(s)}$$

Errore nella risposta al gradino

- La $\mathcal{L}$-trasformata del gradino di ampiezza A vale: $X(s) = \dfrac{A}{s}$
  - L'errore rispetto al gradino è detto anche **errore di posizione** e_p

$$e_p = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1+G(s)} = A \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} \Rightarrow \boxed{e_p = \frac{A}{1+K_p}}$$

- **Costante di posizione** (o di guadagno): $K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_i (1+T_i s)}{\prod_i (1+\tau_i s)} \frac{\prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1+2\delta_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)} = \begin{cases} \mu & h=0 \\ \infty & h \geq 1 \end{cases}$$

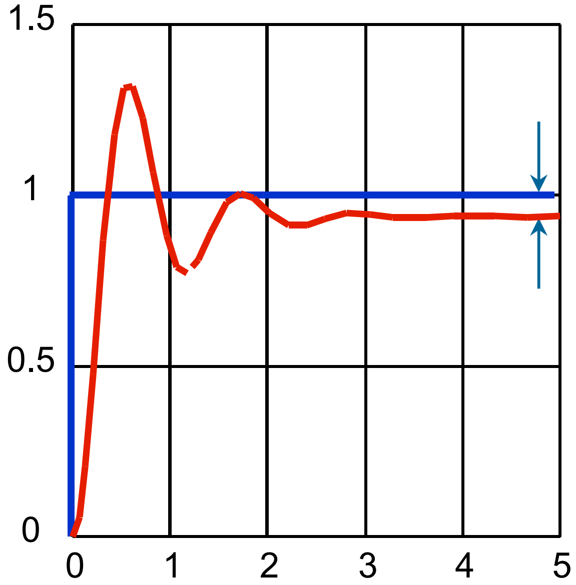
Il numero (h) di poli nell'origine di $G(s)$ determina il TIPO del sistema

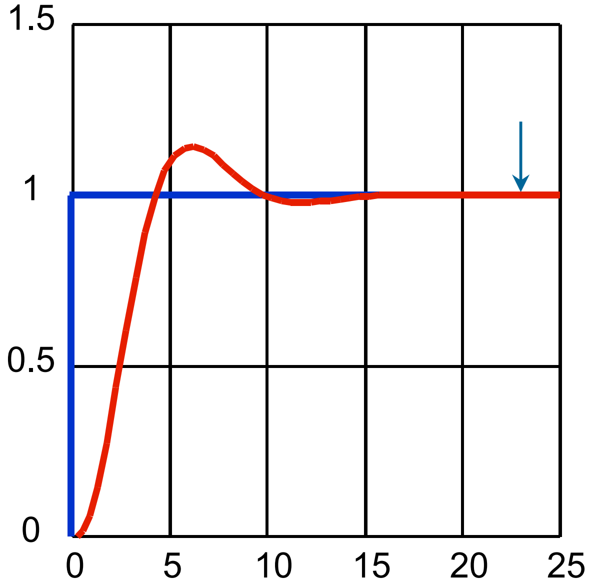
Se $G(s)$ è di TIPO ≥1 (ha 1 o più poli nell'origine) $e_p=0$

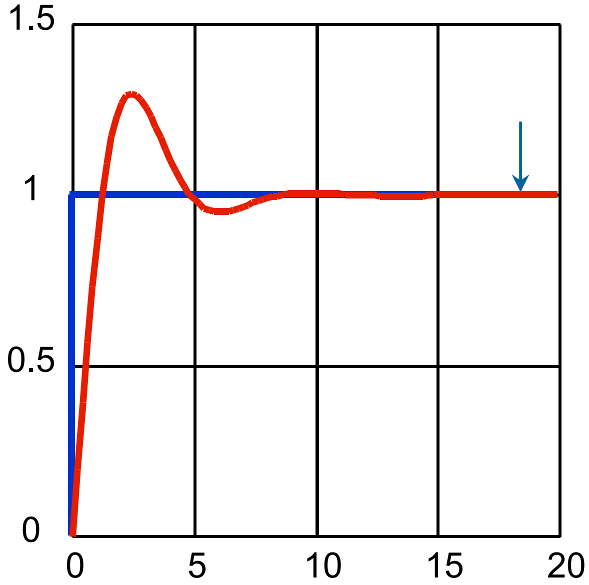
Errore di posizione e tipo di sistema

- Risposte al gradino

errore a regime costante	errore a regime nullo	errore a regime nullo







sistema di tipo 0

$$e_p = \frac{A}{1+\mu}$$

sistema di tipo 1

$$e_p = 0$$

sistema di tipo 2

$$e_p = 0$$

Errore nella risposta alla rampa

- La L-trasformata della rampa di pendenza A vale: $X(s) = \dfrac{A}{s^2}$
  - L'errore rispetto alla rampa è detto anche **errore di velocità** e_v

$$e_v = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s[1+G(s)]} = A \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\,G(s)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_v = \frac{A}{K_v}}$$

  - **Costante di velocità**: $K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_i (1+T_i s)}{\prod_i (1+\tau_i s)} \frac{\prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1+2\delta_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)} = \begin{cases} 0 & h=0 \\ \mu & h=1 \\ \infty & h\geq 2 \end{cases}$$

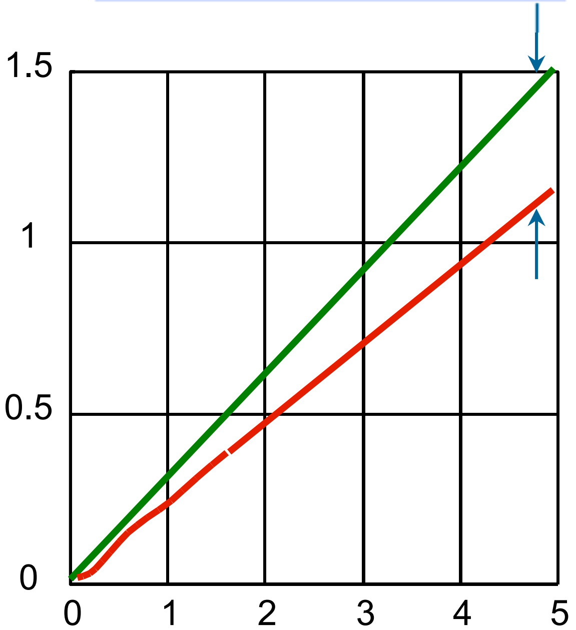
  - In funzione del tipo del sistema avremo:
    - tipo 0: $e_v = \infty$
    - tipo 1: $e_v = A/\mu$
    - tipo ≥2: $e_v = 0$

Se $G(s)$ è di TIPO ≥2 (ha 2 o più poli nell'origine) $e_v=0$

Errore di velocità e tipo di sistema

- **Risposte alla rampa**

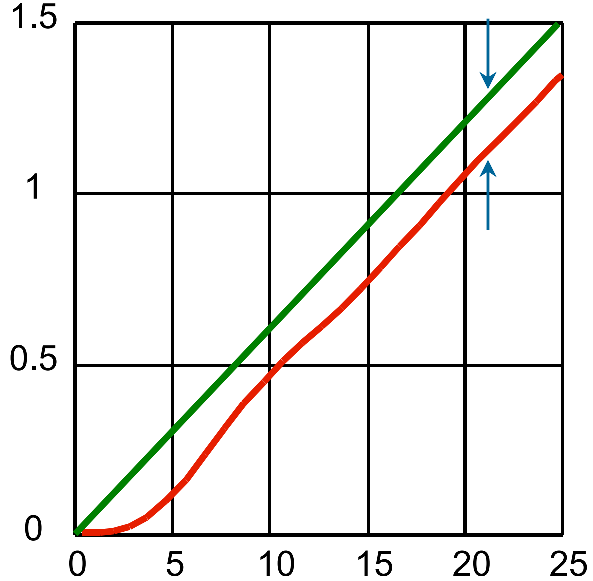
errore a regime crescente



sistema di tipo 0

$$e_v = \infty$$

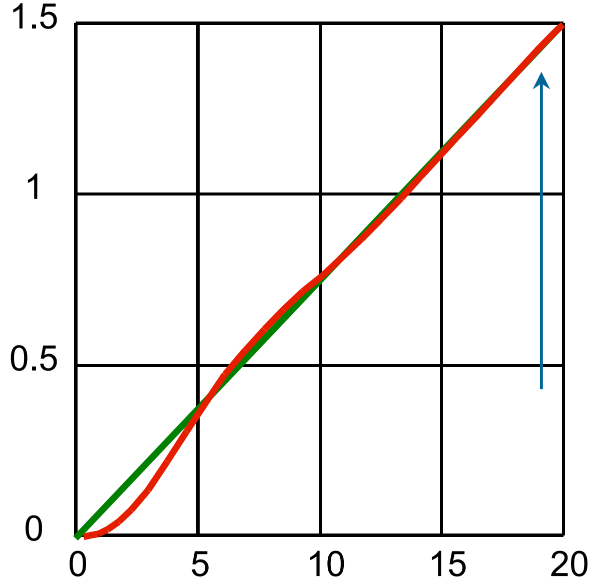
errore a regime costante



sistema di tipo 1

$$e_v = \frac{\mu}{K}$$

errore a regime nullo



sistema di tipo 2

$$e_p = 0$$

Errore di accelerazione

- Analogamente, considerando il segnale: $X(s) = \dfrac{A}{s^3}$
  - L' **errore di accelerazione** e_a risulta:

$$e_a = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2[1+G(s)]} = A\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\, G(s)} \Rightarrow \boxed{e_a = \frac{A}{K_a}}$$

- **Costante di accelerazione**: $K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_i (1+T_i s)}{\prod_i (1+\tau_i s)} \frac{\prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1+2\delta_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)} = \begin{cases} 0 & h = 0,1 \\ \mu & h = 2 \\ \infty & h \geq 3 \end{cases}$$

- In funzione del tipo del sistema avremo:
  - tipo 0,1: $e_a = \infty$
  - tipo 2: $e_a = A/\mu$
  - tipo ≥3: $e_a = 0$

Se $G(s)$ è di TIPO ≥3 (ha 3 o più poli nell'origine) $e_a = 0$

Caso generale

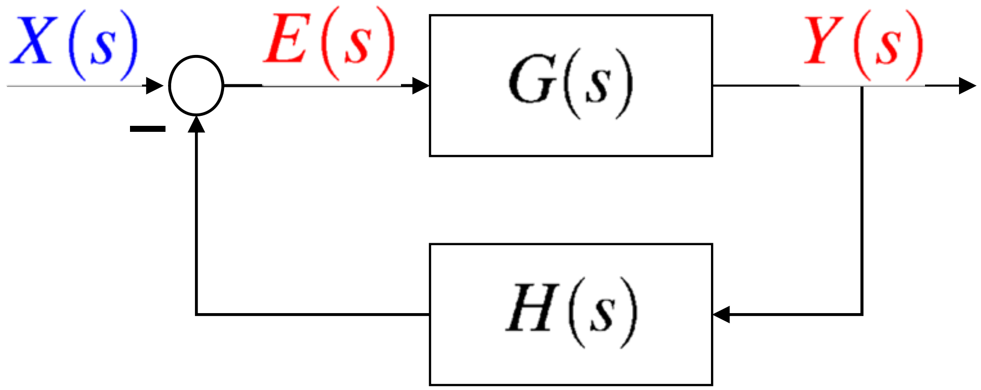
G(s)	K_p	K_v	K_a	e_p	e_v	e_a
Tipo 0	μ	0	0	$\frac{A}{1+\mu}$	∞	∞
Tipo 1	∞	μ	0	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
Tipo 2	∞	∞	μ	0	0	$\frac{A}{\mu}$

- Per segnali, in generale del tipo: $X(s) = \frac{A}{s^i}$
  - Si ha, indicando con h il tipo del sistema:

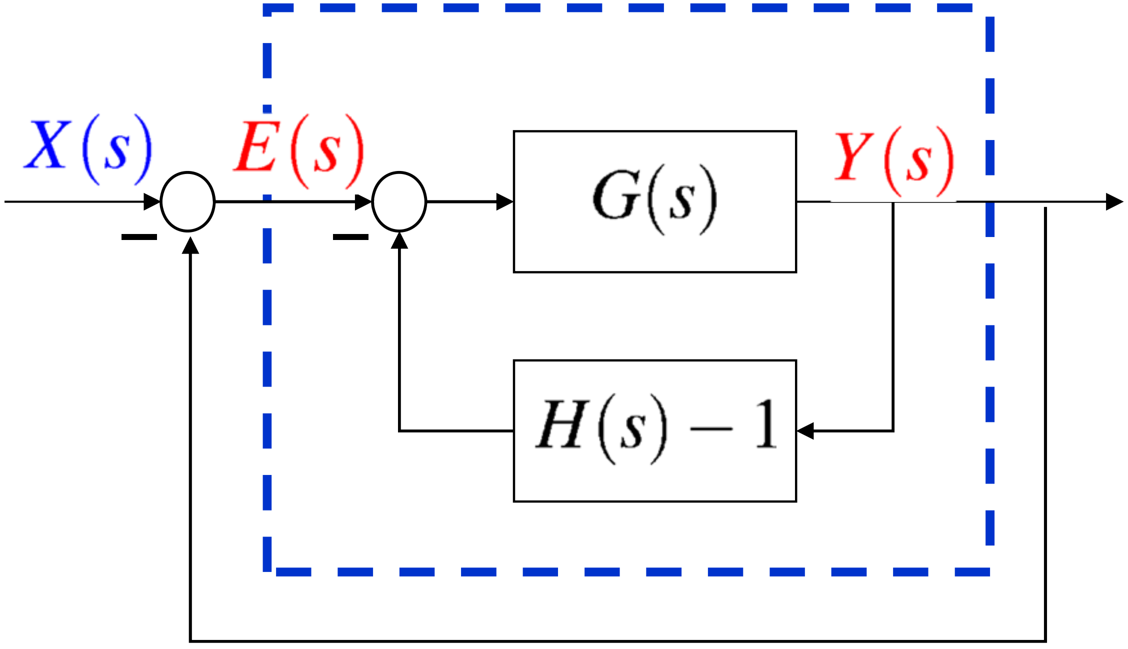
$$e_\infty = A \lim_{s \to 0} \frac{s^{h-i+1}}{s^h + \mu} \Rightarrow e_\infty = \begin{cases} \infty & h < i-1 \\ \frac{A}{\mu} & h = i-1 \\ 0 & h > i-1 \end{cases}$$

Retroazione non unitaria

- Nel caso in cui il sistema in esame presenti una dinamica H(s) non unitaria sul ramo di retroazione:



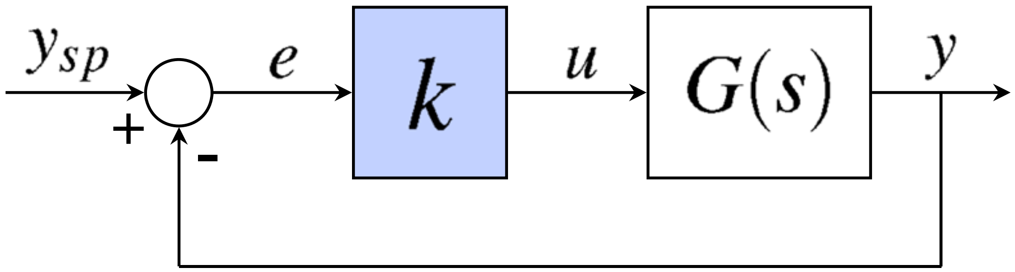
- Ci si riconduce alla retroazione unitaria considerando, per il calcolo dell'errore a regime, lo schema equivalente:



$$G_{eq} = \frac{G}{1+G(H-1)}$$

Retroazione non unitaria

- Determinare l'errore a regime con ingresso a gradino X(s) = 5/s e a rampa X(s) = 5/s^2 del sistema in retroazione



$$G_1(s) = \frac{10}{s+5} \qquad G_2(s) = \frac{200}{s^2+10s+100} \qquad G_3(s) = \frac{10}{s(s^3+5)}$$

Per i valori di $k = 1,\ 100$

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

Errori a regime
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti