Diagrammi di Bode

• La funzione di risposta armonica $F(\omega) = G(j\omega)$ può essere rappresentata graficamente in tre modi diversi: i *Diagrammi di Bode*, i *Diagrammi di Nyquist* e i *Diagrammi di Nichols*.

• I **Diagrammi di Bode** sono due:

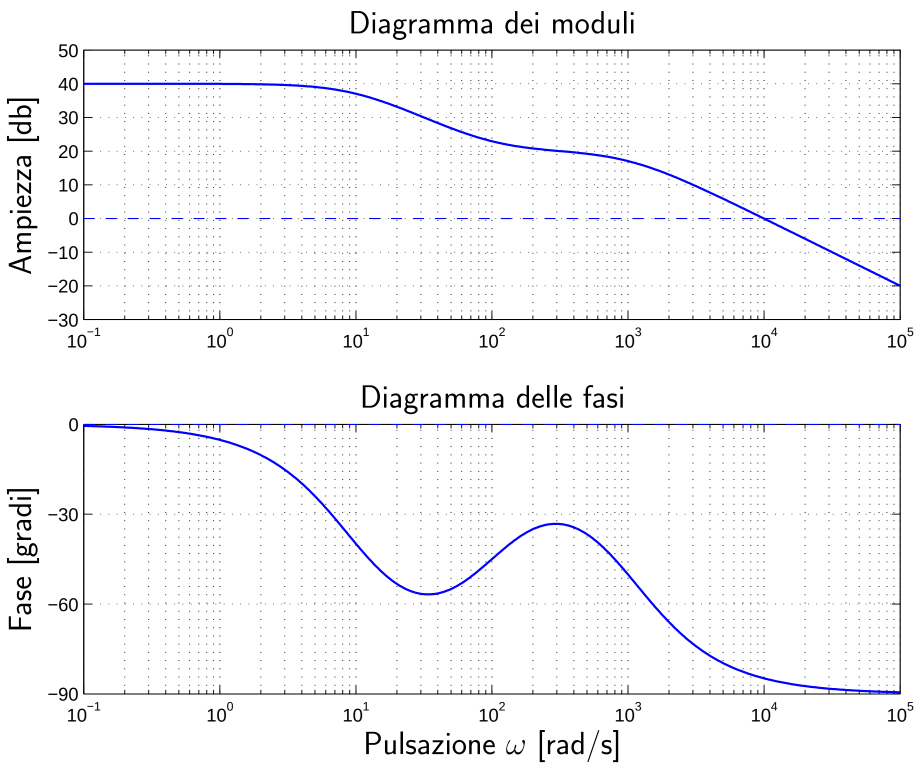
1) *Diagramma delle ampiezze*: rappresenta il modulo $|G(j\omega)|$ in funzione della pulsazione ω. Sia il modulo $|G(j\omega)|$ che la pulsazione ω vengono espressi in scala logaritmica. Tipicamente per i moduli $|G(j\omega)|$ si usano i " db"($A_{\text{db}} = 20\log_{10} A$), mentre per la pulsazione ω si usa la scala logaritmica in base 10.

2) *Diagramma delle fasi*: rappresenta la fase $\arg G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω. In questo caso la fase $\arg G(j\omega)$ viene espressa in scala lineare, mentre la pulsazione ω viene espressa in scala logaritmica base 10.

• Esempio:

$$G(s) = \frac{100\left(1+\frac{s}{80}\right)}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{100\left(1+j\frac{\omega}{80}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{100}\right)\left(1+j\frac{\omega}{1000}\right)}$$

• Diagrammi di Bode:



Conversione delle ampiezze in db

- Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere quantità positive, tipicamente il guadagno di amplificatori:

$$\boxed{A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A}$$

- Per la conversione si può utilizzare il seguente diagramma:

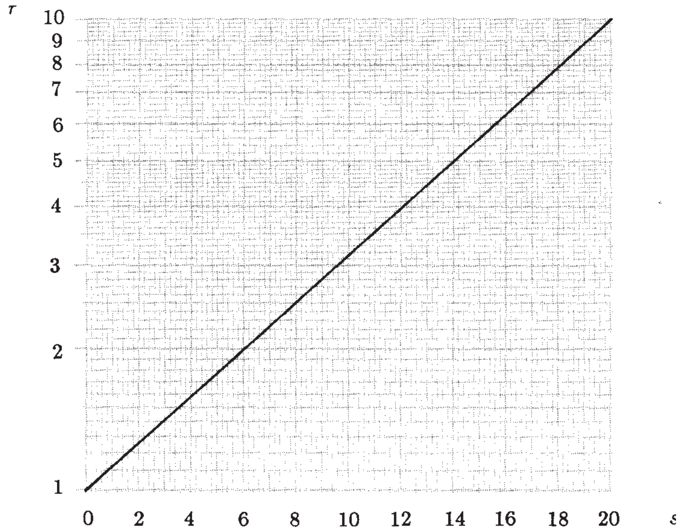
Posto A nella forma:

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con} \quad 1 \leq r < 10,$$

il valore di A in decibel è:

$$A_{\text{db}} = 20\, n + s \text{ db}$$

dove s si ricava dal diagramma a fianco: $0 \leq s < 20$.



- Alcune conversioni di uso frequente:

Le decadi	
⋮	⋮
10000	80 db
1000	60 db
100	40 db
10	20 db
1	0 db
0.1	−20 db
0.01	−40 db
0.001	−60 db
0.0001	−80 db
⋮	⋮

$A > 1$	
$\sqrt{2}$	3 db
2	6 db
5	14 db
20	26 db
50	34 db
$A < 1$	
$1/\sqrt{2}$	−3 db
1/2	−6 db
1/5	−14 db
1/20	−26 db
1/50	−34 db

– Esempio 1:

$$A = 24$$
$$A = 2.4 \cdot 10^1$$
$$A_{\text{db}} \simeq 20 + 8 = 28$$

– Esempio 2:

$$A = 0.56$$
$$A = 5.6 \cdot 10^{-1}$$
$$A_{\text{db}} \simeq -20 + 15 = -5$$

– Ogni 6 db il valore di A raddoppia;

– Ogni 20 db il valore di A è moltiplicato per 10;

- Per i calcoli teorici si utilizzano tipicamente i logaritmi naturali:

$$\ln G(j\omega) = \ln \left[|G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \right] = \underbrace{\ln |G(j\omega)|}_{\alpha} + j \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\beta}$$

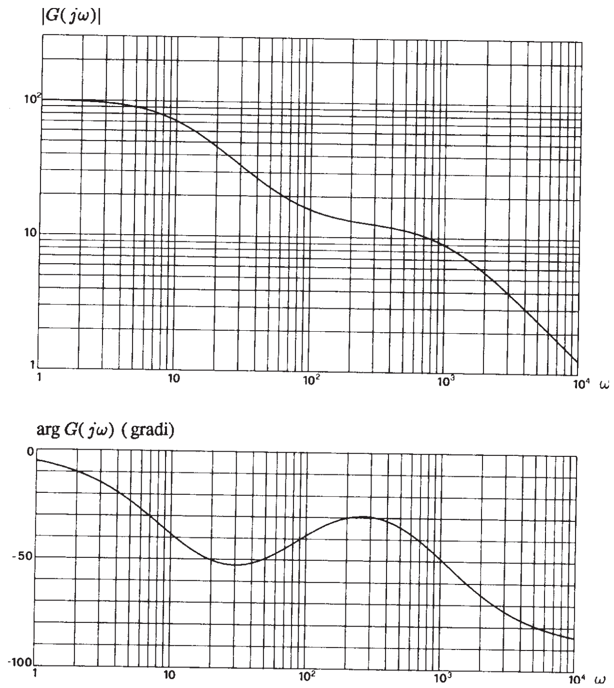
  Peraltro, un cambiamento di base dei logaritmi equivale ad un semplice cambiamento di scala.

- Si possono utilizzare due tipi diversi di carta millimetrata:

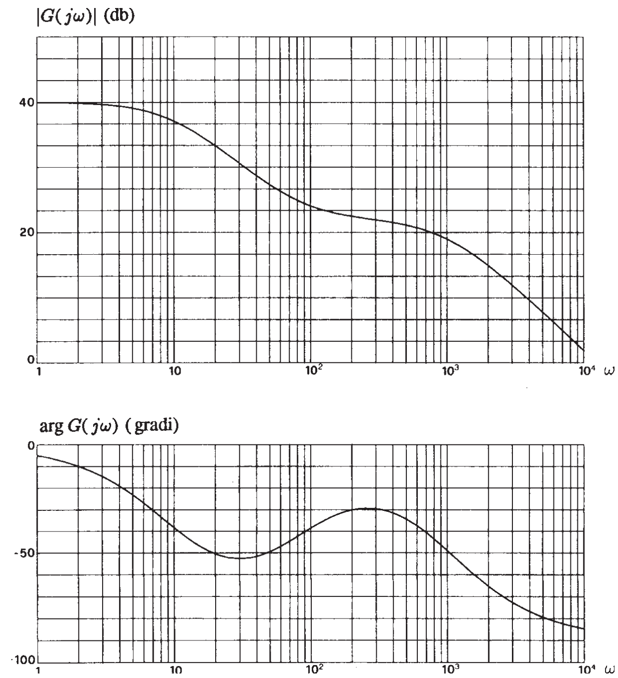
  a) carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi;

  b) carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi. In questo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel: $A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$.

Caso a)



Caso b)



- I vantaggi che si hanno impiegando una scala logaritmica sono:

  1) è possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi;

  2) i diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi;

  3) i diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori.

- Funzione $G(s)$ in forma polinomiale :

$$G(s) = K_1 \, \frac{s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^h\,(s^{n-h} + a_{n-1}\, s^{n-h-1} + \ldots + a_{h+1}\, s + a_h)}$$

- Il fattore s^h corrisponde ad un polo nell'origine con grado di molteplicità h. Se $h\!=\!0$ la funzione $G(s)$ non presenta poli nell'origine.

- Forma *fattorizzata a poli e zeri*:

$$G(s) = K_1 \, \frac{(s - z_1)\,(s - z_2)\,\ldots\,(s - z_m)}{s^h\,(s - p_1)\,(s - p_2)\,\ldots\,(s - p_{n-h})}$$

- Forma *fattorizzata a costanti di tempo*:

$$G(s) = K\, \frac{\left(1\!+\!\tau_1' s\right)\left(1\!+\!\tau_2' s\right)\ldots\left(1\!+\!2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right)\,\ldots}{s^h\left(1\!+\!\tau_1 s\right)\left(1\!+\!\tau_2 s\right)\ldots\left(1\!+\!2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)\,\ldots}$$

- Il ***logaritmo del modulo*** della funzione $G(s)$:

$$\begin{aligned}\log|G(s)| \;&=\; \log|K| + \log\left|1\!+\!\tau_1' s\right| + \ldots + \log\left|1\!+\!2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right| \\ &\quad - \log|s^h| - \log\left|1\!+\!\tau_1 s\right| - \ldots - \log\left|1\!+\!2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right|\end{aligned}$$

- La ***fase*** della funzione $G(s)$:

$$\begin{aligned}\arg G(s) \;&=\; \arg K + \arg\left(1\!+\!\tau_1' s\right) + \ldots + \arg\left(1\!+\!2\delta_1' \frac{s}{\omega_{n1}'} + \frac{s^2}{\omega_{n1}'^2}\right) \\ &\quad - \arg(s^h) - \arg\left(1\!+\!\tau_1 s\right) - \ldots - \arg\left(1\!+\!2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)\end{aligned}$$

- Il diagramma di Bode di una qualunque funzione $G(s)$ si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

$$K, \qquad s^{\pm 1}, \qquad \left(1 + s\,\tau\right)^{\pm 1}, \qquad \left(1 + 2\,\delta\,\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$

- **Guadagno costante**:

$$G(s) = K$$

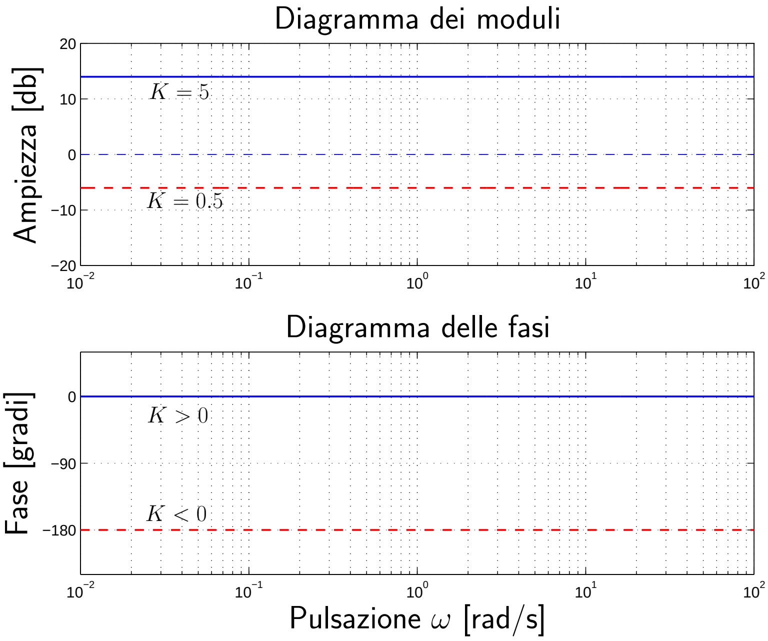
Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = |K|\, e^{j\varphi}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = |K|$.

Fase: $\varphi = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad K > 0 \\ -\pi & \text{se} \quad K < 0 \end{cases}$

I diagrammi dei moduli e delle fasi sono costanti e indipendenti da ω.



- **Polo nell'origine**:

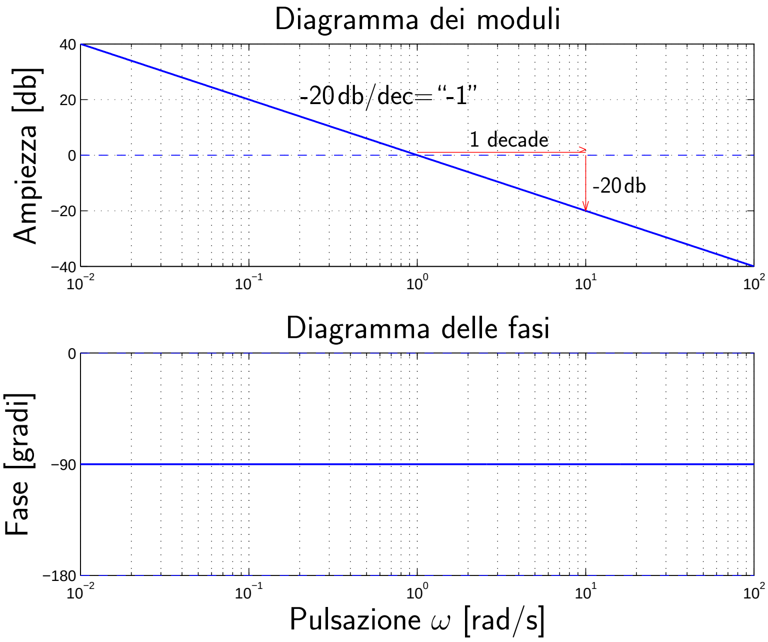
$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega}$

Fase costante: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



Il diagramma delle ampiezze è una retta di pendenza "-1" (cioè -20 db/dec) con guadagno unitario in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$.

- **Polo reale**:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \qquad \rightarrow \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \qquad \arg G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

a) Alle basse frequenze:

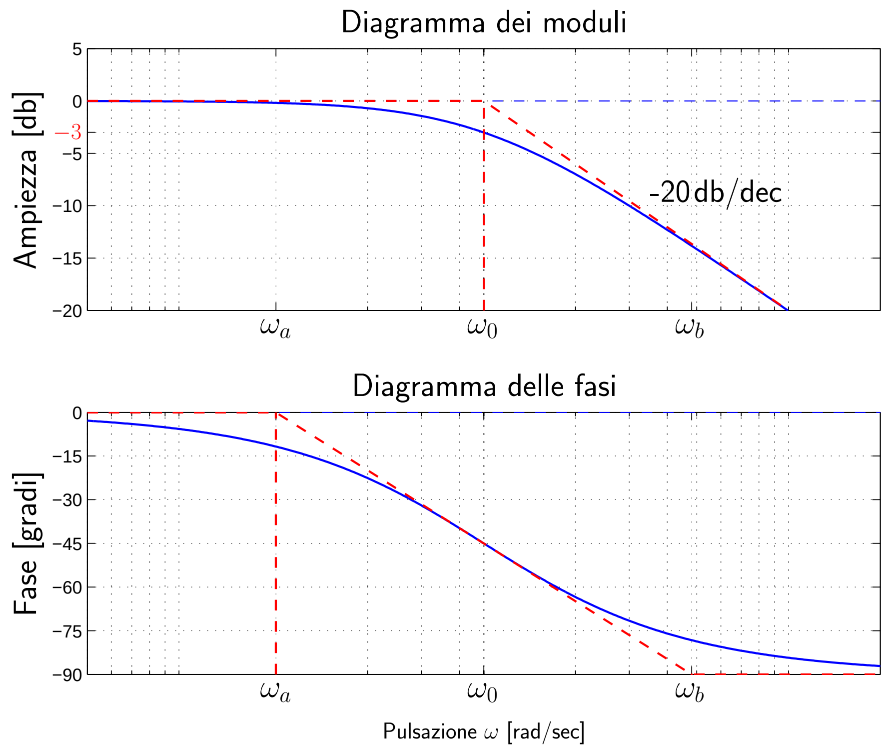
$$G(j\omega)\big|_{\omega\simeq 0} \simeq 1$$

Modulo iniziale: $G_0 = 1$.
Fase iniziale: $\varphi_0 = 0$.

b) Alle alte frequenze:

$$G(j\omega)\big|_{\omega\simeq\infty} \simeq \frac{1}{j\omega\tau}$$

Modulo finale: $G_\infty = 0$.
Fase finale: $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.



- È possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81$$

- I cambiamenti di pendenza dei diagrammi asintotici avvengono alle pulsazioni:

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}, \qquad \omega_a = \frac{\omega_0}{4.81} = \frac{1}{4.81\tau}, \qquad \omega_b = 4.81\omega_0 = \frac{4.81}{\tau}$$

- La massima distanza esistente tra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per $\omega = \omega_0 = 1/\tau$ e vale $1/\sqrt{2} \simeq -3$ db.

- La pendenza -20 db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo " -1".

- I diagrammi di Bode della funzione $G(s) = (1+\tau s)$ si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli della funzione $G(s) = (1+\tau s)^{-1}$.

- Quando τ è negativa, il diagramma delle ampiezze rimane immutato, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

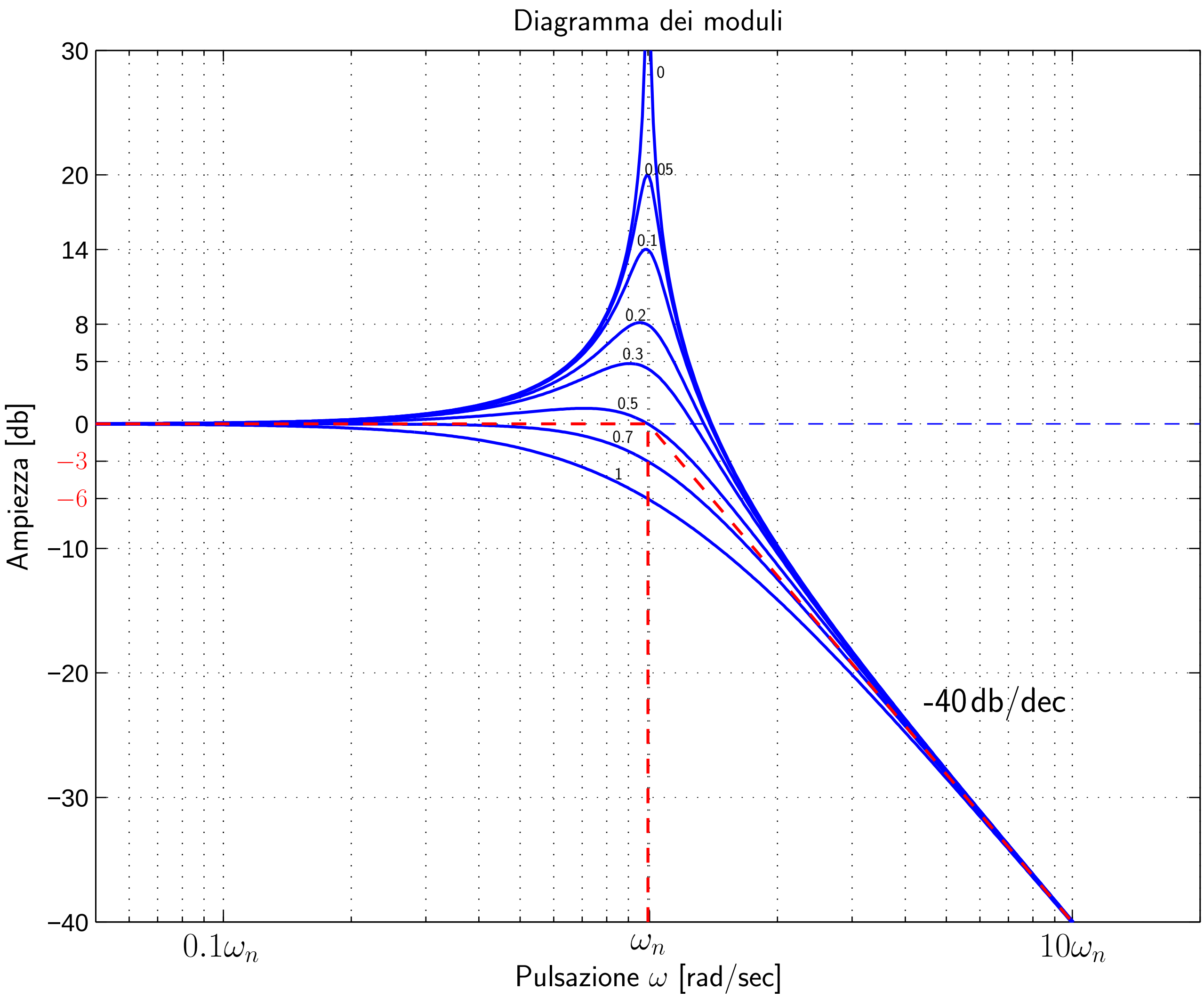
- **Poli complessi coniugati** $(0 \le \delta < 1)$:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \qquad \rightarrow \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j\, 2\, \delta\, \frac{\omega}{\omega_n}}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\,\delta^2\, \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}, \qquad \arg G(j\omega) = -\arctan \frac{2\,\delta\, \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze per $\delta \in \{0,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 1\}$:



- La pendenza -40 db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo “ -2”.

- Per piccoli valori di δ il diagramma reale si discosta sensibilmente da quello asintotico. In particolare per $\delta = 0$ lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
  1) per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ il diagramma ha un massimo;
  2) per $0 \leq \delta \leq 1/2$ il diagramma interseca l'asse a destra del punto $\omega = \omega_n$;
  3) per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ il diagramma interseca l'asse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
  4) per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ il diagramma non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.
- **Pulsazione di risonanza** ω_R. Posto $u = \omega/\omega_n$, il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\,\delta^2\,u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4\,(1 - u^2)\,u + 8\,\delta^2\,u = 0$$

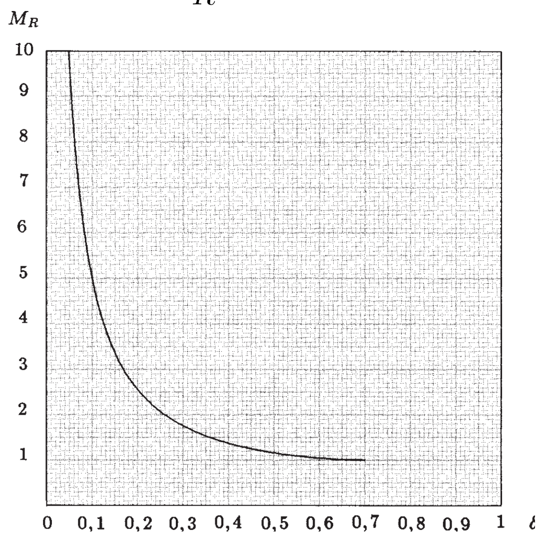
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\,\delta^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\omega_R = \omega_n\,\sqrt{1 - 2\,\delta^2}}$$

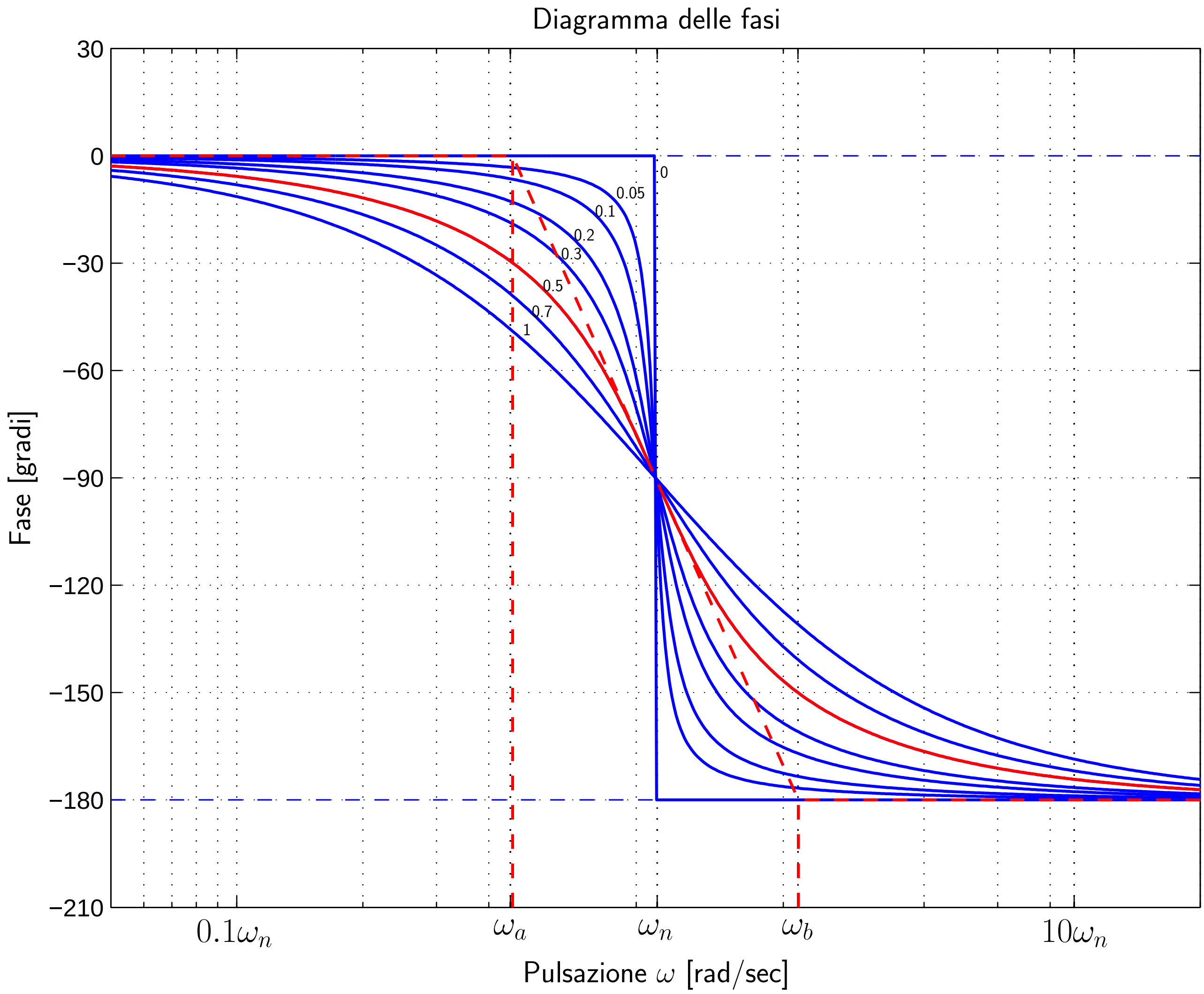
- **Picco di risonanza** M_R: si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione ω_R:

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\,\delta^2)^2 + 4\,\delta^2\,(1 - 2\,\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\,\delta\,\sqrt{1 - \delta^2}}}$$



- Diagramma di Bode della fasi:



- Le pulsazioni ω_a e ω_b sono legate alla pulsazione ω_n dalla relazione:

$$\boxed{\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^{\delta}}$$

- I cambiamenti di pendenza del diagramma asintotico delle fasi avviene alle pulsazioni:

$$\boxed{\omega_a = \frac{\omega_n}{4.81^{\delta}}, \qquad \omega_b = 4.81^{\delta}\omega_n}$$

• Il coefficiente di smorzamento δ può essere calcolato a partire:

1) dal picco di risonanza M_R:

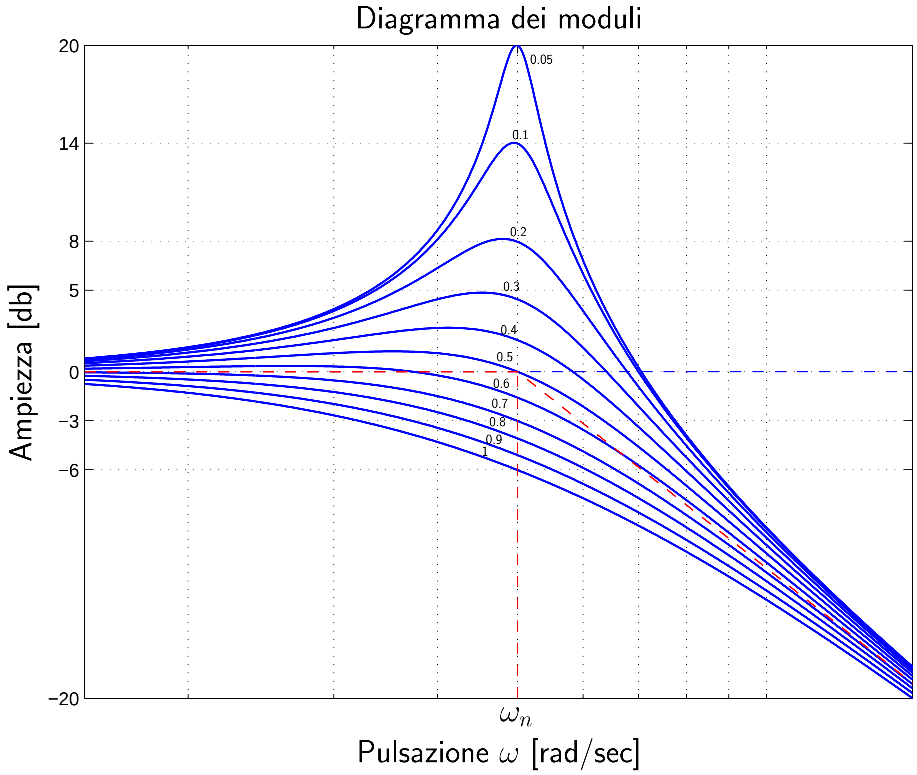
$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_R^2}}\right)}}$$

2) dalle pulsazioni critiche ω_a e ω_b:

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = e^{\pi\delta} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\delta = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\omega_b}{\omega_a}}$$

3) dal guadagno M_{ω_n} della funzione $G(j\omega)$ alla pulsazione $\omega = \omega_n$:

$$M_{\omega_n} = G(j\omega)|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\delta} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}}}$$

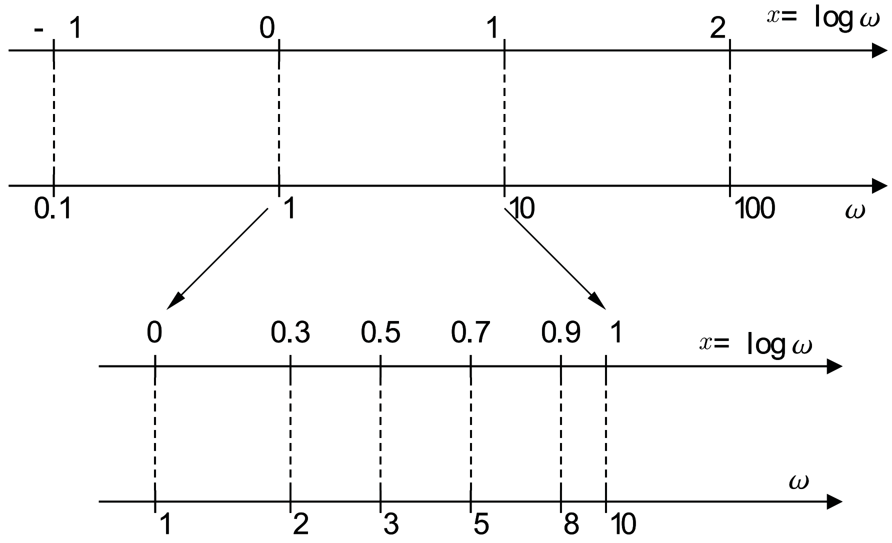


• Nel caso in cui il guadagno statico $G(0)$ non si unitario, il picco di risonanza M_R è definito come il rapporto tra il valore massimo M_{max} e il guadagno statico $M_0 = G(0)$:

$$M_R = \frac{M_{max}}{M_0}$$

Assi nei diagrammi di Bode

- I Diagrammi di Bode usano l'asse orizzontale in scala logaritmica. Considerando l'asse reale R e fissata una origine, una pulsazione ω corrisponde ad un punto sull'asse con coordinata $x = \log_{10} \omega$. Accanto all'asse si possono quindi indicare o i valori della coordinata x oppure direttamente i valori di ω; questa seconda soluzione è la più comoda.



- Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori: $\log_{10} 2 \simeq 0.3 \quad \log_{10} 3 \simeq 0.5 \quad \log_{10} 5 \simeq 0.7 \quad \log_{10} 8 \simeq 0.9$

- L'asse verticale nei diagrammi di ampiezza è graduato in decibel (db):

$$A|_{\text{db}} \stackrel{def}{=} 20 \log_{10} A$$

  Con questa scala, le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sono ± 20 db/decade, ± 40 db/decade, ecc. Per comodità tali pendenze vengono indicate rispettivamente con i SIMBOLI ± 1, ± 2, ecc.

  N.B.: se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica ($y = \log_{10} A$) le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sarebbero ± 1 e ± 2.

- L'asse verticale nei diagrammi di fase può essere graduato sia in radianti sia in gradi. In ogni caso il diagramma delle fasi può essere traslato verso l'alto o verso il basso di multipli interi di 2π, o di 360^o, mantenendo inalterato il suo significato.

Graficazione "qualitativa" dei diagrammi asintotici di Bode

Primo metodo: somma dei singoli contributi

a) La funzione $G(s)$ viene messa nella forma "a costanti di tempo":

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -\frac{10}{25}\frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \qquad G_1(s) = (1-s), \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \qquad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i contributi delle singole componenti.

Il contributo del termine K è costante: $|K| = -7.96$ db e $\arg K = -\pi$.

Lo zero instabile $(1-s)$ e il polo stabile $(1+s)^{-1}$ agiscono alla pulsazione $\omega = 1$ e forniscono due contribuiti uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per $\omega \to \infty$ è $-\pi$.

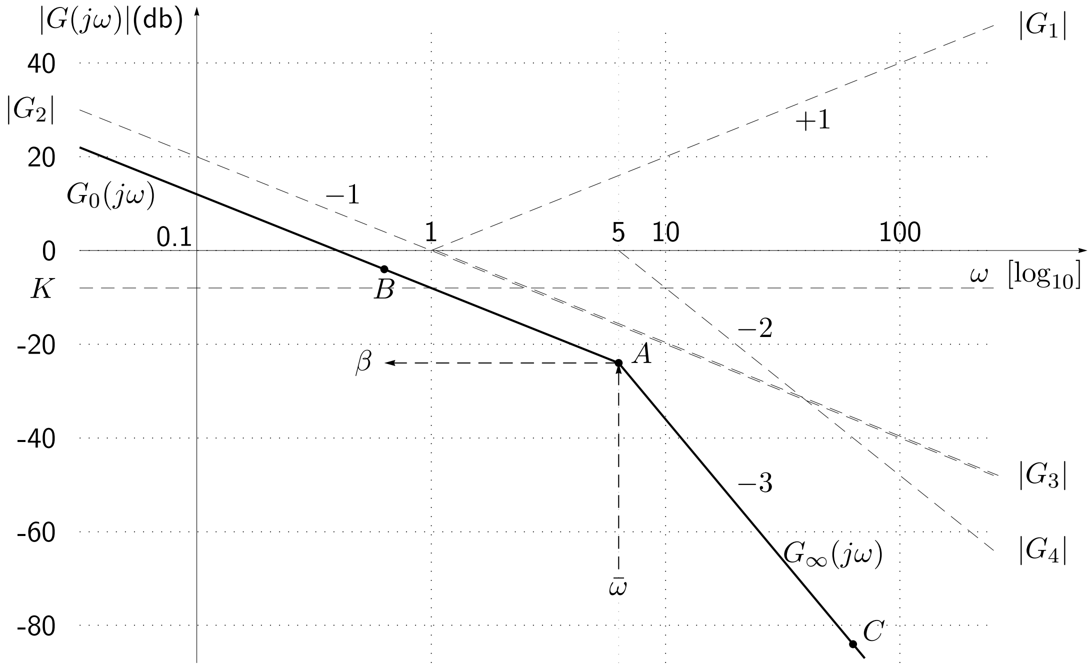
La coppia di poli complessi coniugati $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$ determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di -40 db/dec a partire dalla pulsazione $\omega_n = 5$. Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva $-\pi$ al variare di ω. Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico delle fasi sono le seguenti

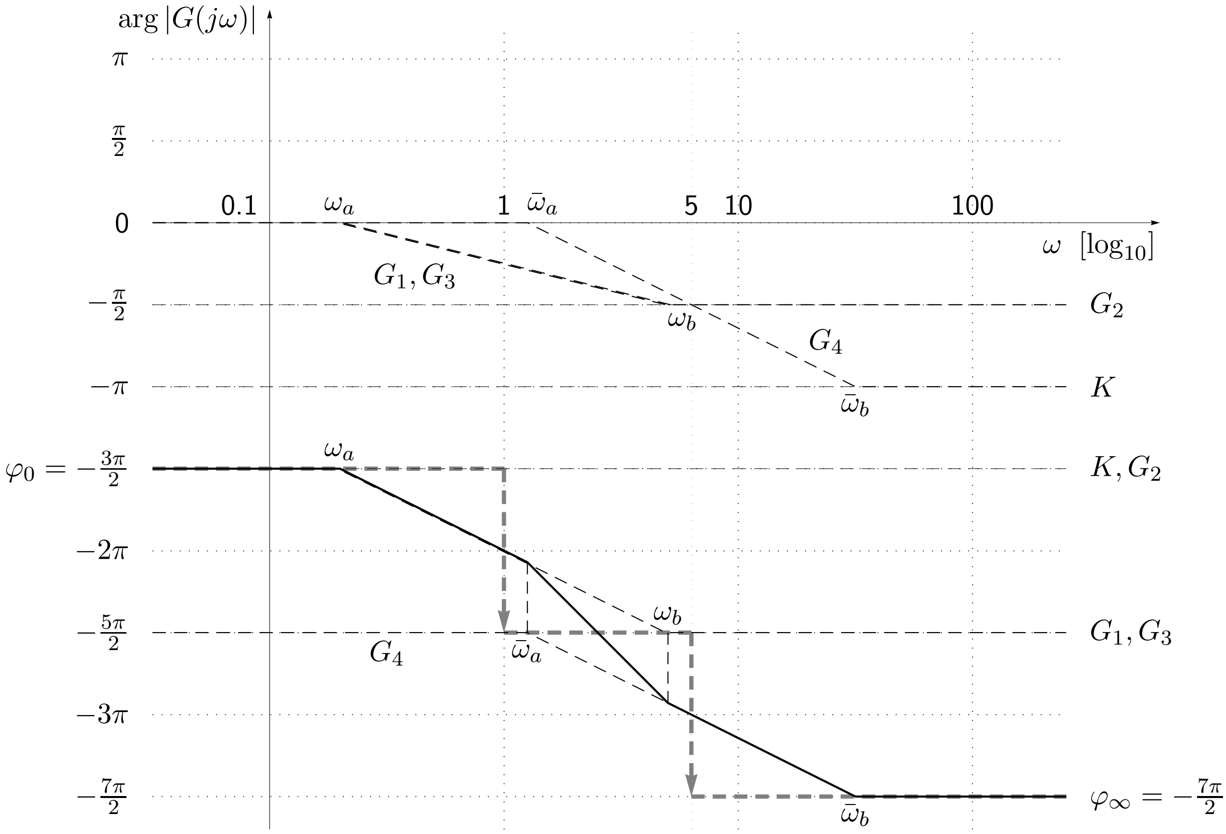
$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \qquad \omega_b = 4.81, \qquad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \qquad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove $\delta = 0.8$ è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$





Funzioni approssimanti

- Nei diagrammi di Bode e di Nyquist il comportamento frequenziale di una generica funzione $G(s)$ per $s \to 0^+$ e per $s \to \infty$ si può studiare facendo riferimento alle funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.

- Consideriamo, per esempio, la seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}$$

- La *funzione approssimante $G_0(s)$* si ottiene dalla $G(s)$ per $s \simeq 0$, cioè trascurando tutti i termini in s ad esclusione dei poli o degli zeri nell'origine:

$$G_0(s) = \lim_{s \simeq 0} G(s) = \lim_{s \simeq 0} \frac{10(\cancel{s}-1)}{s(\cancel{s}+1)(\cancel{s}^2+8\cancel{s}+25)} = \frac{-10}{25s}$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo $G_0(s) = \frac{K_0}{s^h}$, dove h è il numero di poli di $G(s)$ nell'origine, cioè il "tipo" di sistema in oggetto.

- La *funzione approssimante $G_\infty(s)$* si ottiene dalla $G(s)$ per $s \simeq \infty$, cioè considerando all'interno di ogni fattore della funzione $G(s)$ solo il termine in s a grado più elevato:

$$G_\infty(s) = \lim_{s \simeq \infty} G(s) = \lim_{s \simeq \infty} \frac{10(s-\cancel{1})}{s(s+\cancel{1})(s^2+8\cancel{s}+\cancel{25})} = \frac{10}{s^3}.$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo $G_\infty(s) = \frac{K_p}{s^r}$, dove $r = n - m$ è il grado relativo della $G(s)$.

- Per le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ è immediato calcolare i moduli e le fasi delle corrispondenti funzioni di risposta armonica:

$$G_0(s) = \frac{-10}{25s} \quad \Rightarrow \quad G_0(j\omega) = \begin{cases} |G_0(j\omega)| = \frac{10}{25\omega} \\ \varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \quad \Rightarrow \quad G_\infty(j\omega) = \begin{cases} |G_\infty(j\omega)| = \frac{10}{\omega^3} \\ \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

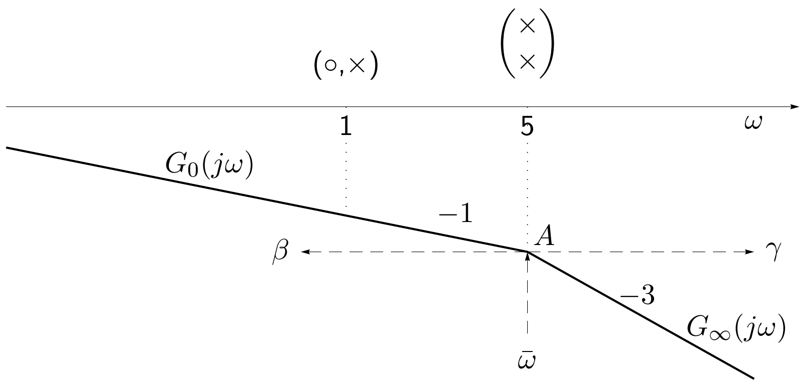
Secondo metodo: graficazione "rapida"

Diagramma delle ampiezze

a) Si individua nella funzione $G(s)$ tutte le pulsazioni in corrispondenza delle quali si ha un cambiamento di pendenza. Tali pulsazioni coincidono con gli zeri reali, i poli reali e le pulsazioni naturali ω_n delle coppie di poli e zeri complessi coniugati della funzione $G(s)$. Nel caso in esame si ha $\omega = 1$ e $\omega = 5$. Tali pulsazioni vengono ordinate in ordine crescente di modulo.

b) Tenendo conto del fatto che gli zeri (reali o complessi coniugati) determinano un incremento di pendenza (rispettivamente di +1 e di +2) e che, viceversa, i poli (reali o complessi coniugati) determinano un decremento della pendenza (rispettivamente di -1 e di -2), risulta chiaro che la "forma" del diagramma asintotico è già nota a priori.

Nel caso in esame si ha:



In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ non si ha cambiamento di pendenza perchè in quel punto agisce sia un polo che uno zero.

c) La posizione "verticale" del diagramma si determina nel seguente modo:

1) Se la funzione $G(s)$ è di tipo 0, il posizionamento verticale è determinato dal calcolo del guadagno statico $G(0)$.

2) Se il sistema è di tipo 1, o in generale di tipo h, il posizionamento verticale viene fatto calcolando l'esatta posizione di un qualsiasi punto A appartenente al diagramma asintotico a spezzata. Tale calcolo può essere fatto in modo agevole utilizzando le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.

Per calcolare la coordinata β del punto A di ascissa $\bar{\omega} = 5$ è infatti possibile utilizzare la funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left|\frac{-10}{25s}\right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

In questo caso è possibile utilizzare anche la funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left|\frac{10}{s^3}\right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

d) È ora possibile tracciare il diagramma asintotico complessivo tracciando, a partire dal punto A, i vari tratti della "spezzata", ognuno con la propria pendenza.

Nel caso in esame, per esempio, il tratto di spezzata che precede il punto A si determina individuando il punto B. Questo punto si calcola a partire da A diminuendo la pulsazione di una decade ed aumentando di 20 db l'ampiezza: $B = (0.5,\ \beta + 20)$.

Allo stesso modo si procede per determinare la pendenza del tratto che segue il punto A. In questo caso la pendenza è -3 e quindi il punto C si determina aumentando la pulsazione di una decade e diminuendo l'ampiezza di 60 db: $C = (50,\ \beta - 60)$.

Diagramma delle fasi

Anche la graficazione del diagramma asintotico delle fasi può essere fatta "rapidamente" se si procede nel modo seguente.

1) Si individua la fase di partenza φ_0 del diagramma asintotico calcolando la fase iniziale della funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\varphi_0 = \arg G_0(j\omega) = \arg\left(\frac{-10}{25s}\right)_{s=j\omega} = -\frac{3\pi}{2}.$$

La fase iniziale φ_0 è comprensiva del segno negativo della costante K e della fase costante $-\frac{\pi}{2}$ introdotta dal polo nell'origine.

2) A partire da φ_0 si costruisce un ***diagramma a gradoni*** i cui punti di discontinuitá coincidono con le pulsazioni critiche ω_c di tutti i poli e zeri della funzione $G(s)$. L'ampiezza di ciascuna discontinuitá è pari alla variazione di fase $\Delta\varphi_i$ introdotta dal termine dinamico che ha generato la discontinuitá.

Le variazioni di fase $\Delta\varphi_i$ sono sempre un multiplo di $\frac{\pi}{2}$ e possono essere sia positive che negative in funzione del fatto che il termine dinamico considerato sia un polo, uno zero, sia stabile o instabile.

Nel caso in esame i primi due termini da prendere in considerazione sono il polo stabile $(s+1)^{-1}$ e lo zero instabile $(s-1)$ alla pulsazione $\omega = 1$. Ciascuno di essi introduce uno sfasamento pari a $-\frac{\pi}{2}$ per cui il loro contributo complessivo è $-\pi$ che va disegnata verso il basso a partire dalla fase iniziale $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$.

I due poli complessi coniugati stabili $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$ introducono uno sfasamento di ampiezza $-\pi$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_n = 5$. Il loro contributo va disegnato verso il basso nella fascia $[-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2}]$.

3) Il diagramma asintotico delle fasi si ottiene infine dal *diagramma a gradoni* sostituendo ad ogni discontinuità l'interpolazione asintotica specifica dell'elemento dinamico che agisce in quel punto $\bar{\omega}$: a) nel caso di poli o zeri reali si utilizzano i valori $\omega_a = \bar{\omega}/4.81$ e $\omega_b = 4.81\bar{\omega}$; b) nel caso di poli o zeri complessi coniugati si utilizzano i valori $\omega_a = \bar{\omega}/4.81^\delta$ e $\omega_b = 4.81^\delta\,\bar{\omega}$.

Diagramma asintotico dei moduli

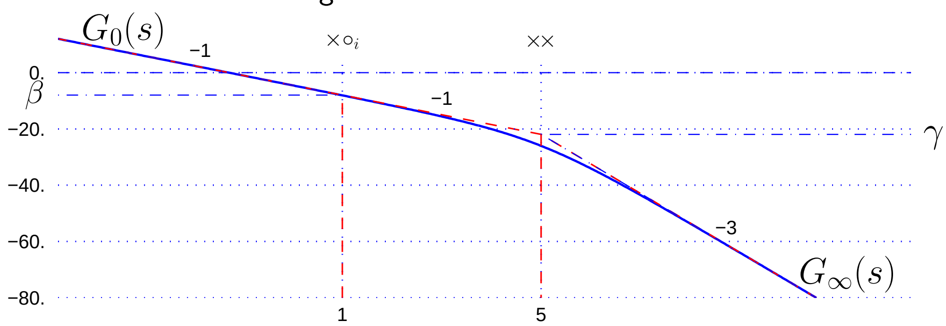
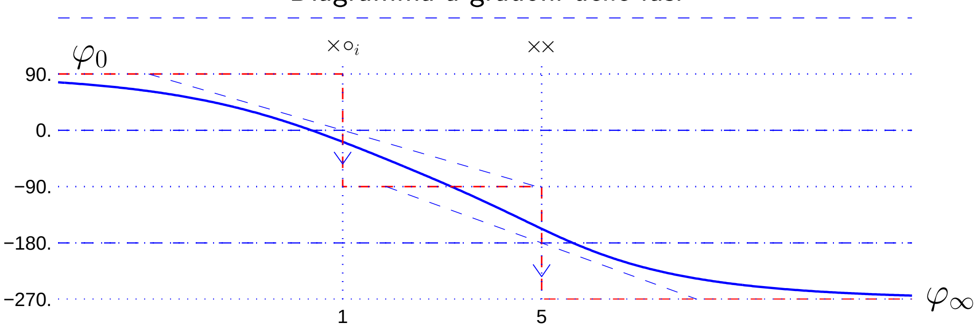


Diagramma a gradoni delle fasi



Diagrammi asintotici di Bode: esercizi

- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

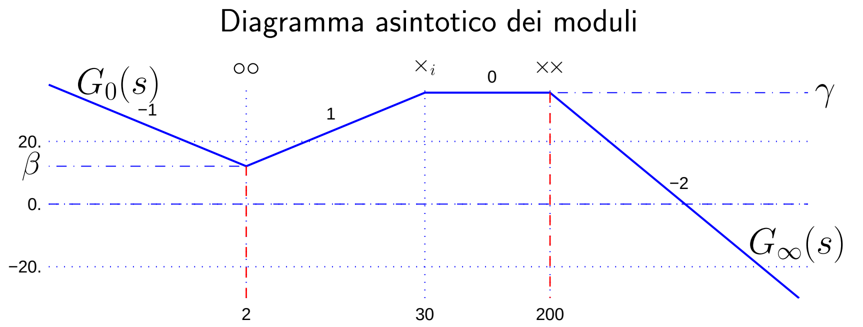
$$G(s) = \frac{60\,(s^2 + 0.8\,s + 4)}{s(s-30)(1+\frac{s}{200})^2}.$$

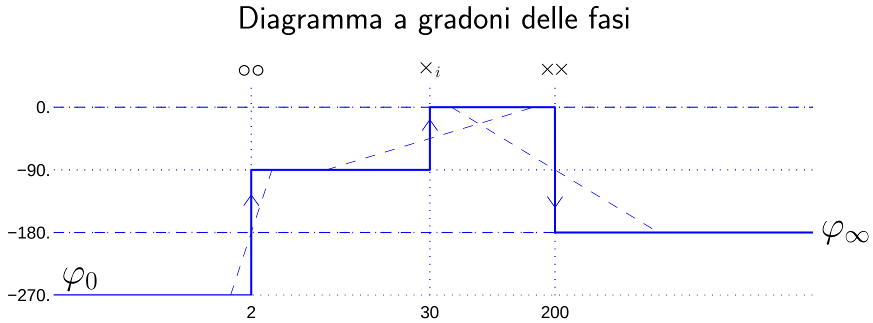
Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 2$ (due zeri complessi coniugati stabili), $\omega = 30$ (un polo instabile) e $\omega = 200$ (due poli stabili).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{60(4)}{s(-30)(1)^2} = -\frac{8}{s}$$

Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.





Funzione $G_\infty(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{60(s^2)}{s(s)(\frac{s}{200})^2} = \frac{2400000}{s^2}$$

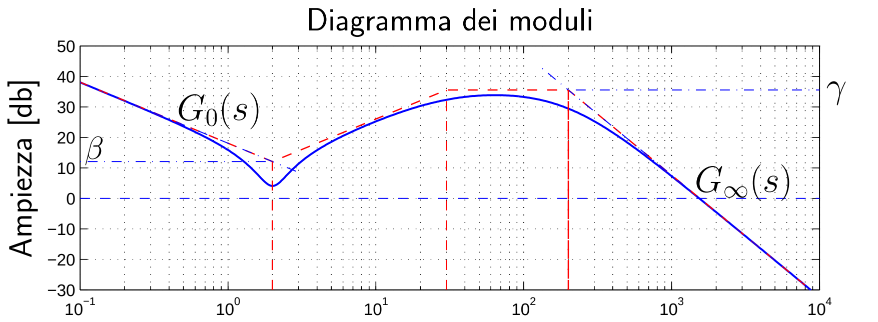
Fase finale $\varphi_\infty = -\pi$.

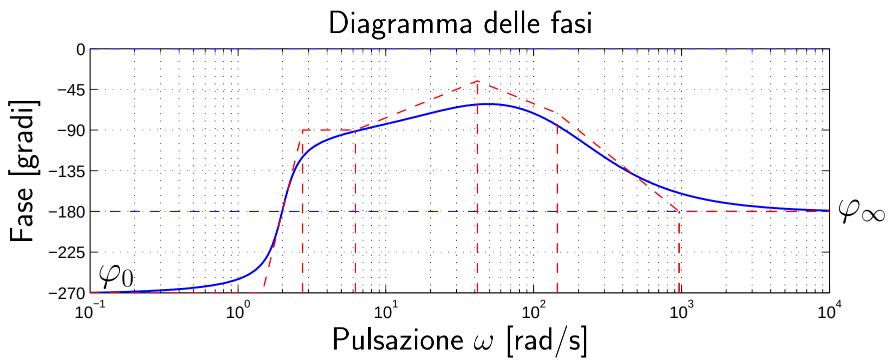
Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=2}$$
$$= 4 = 12 \text{ db.}$$

Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=200}$$
$$= 60 = 35.56 \text{ db.}$$





- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

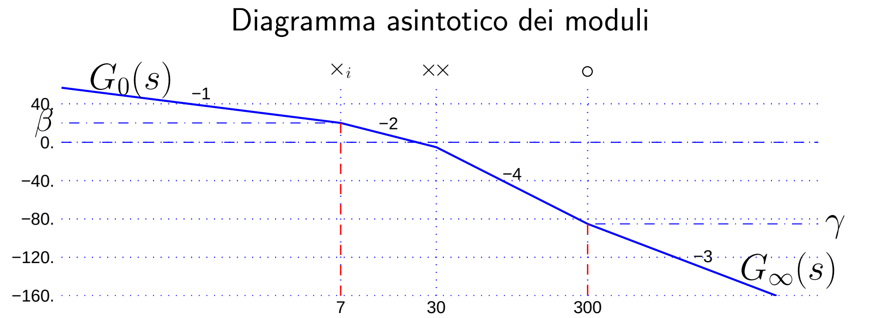
$$G(s) = \frac{1470\,(s+300)}{s\,(s-7)(s^2+15\,s+900)}.$$

Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 7$ (polo instabile), $\omega = 30$ (due poli complessi coniugati stabili) e $\omega = 300$ (uno zero stabile).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{1470\,(300)}{s\,(-7)(900)} = -\frac{70}{s}$$

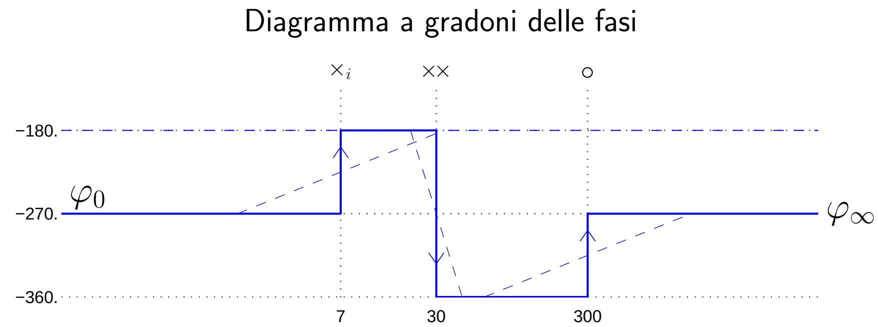
Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.



Funzione $G_\infty(s)$:

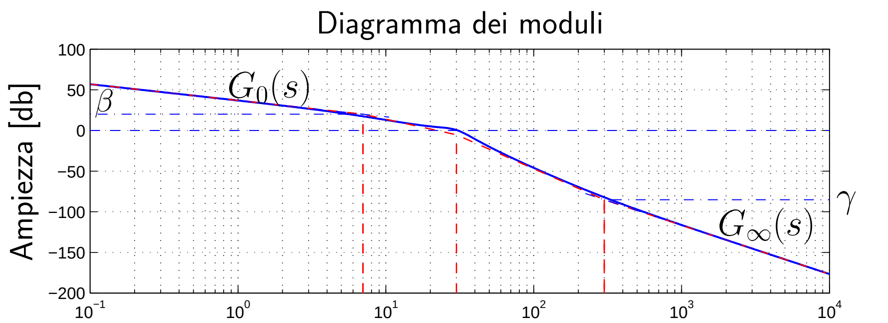
$$G_\infty(s) = \frac{1470\,(s)}{s\,(s)(s^2)} = \frac{1470}{s^3}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$.



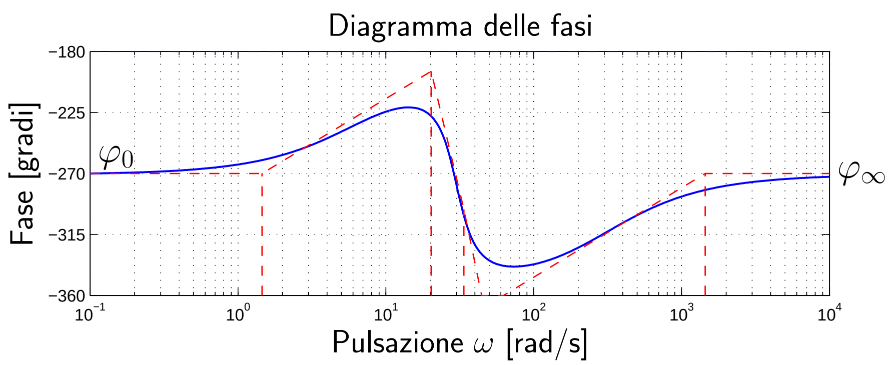
Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=7}$$
$$= 10 = 20 \text{ db.}$$



Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=300}$$
$$= \frac{1470}{300^3} = -85.28 \text{ db.}$$



- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{50\,(5-s)^2}{s\,(s^2 - 18\,s + 900)(10\,s + 5)}.$$

Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 0.5$ (un polo stabile), $\omega = 5$ (due zeri reali instabili) e $\omega = 30$ (due poli complessi coniugati instabili).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{50\,(5)^2}{s\,(900)(5)} = \frac{5}{18\,s}$$

Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Funzione $G_\infty(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{50\,(-s)^2}{s\,(s^2)(10\,s)} = \frac{5}{s^2}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\pi$.

Diagramma asintotico dei moduli

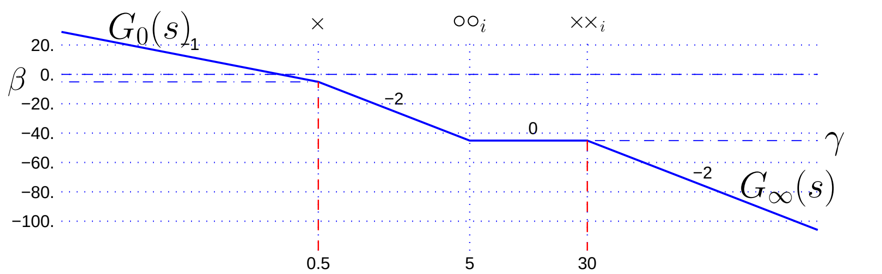
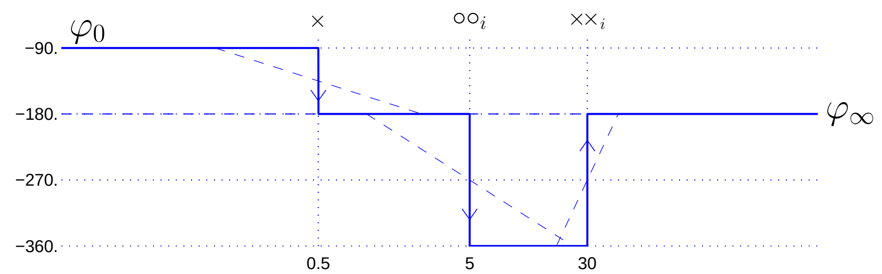


Diagramma a gradoni delle fasi



Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5}$$
$$= \frac{5}{9} = -5.1 \text{ db.}$$

Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=30}$$
$$= \frac{5}{30^2} = -45.1 \text{ db.}$$

Diagramma dei moduli

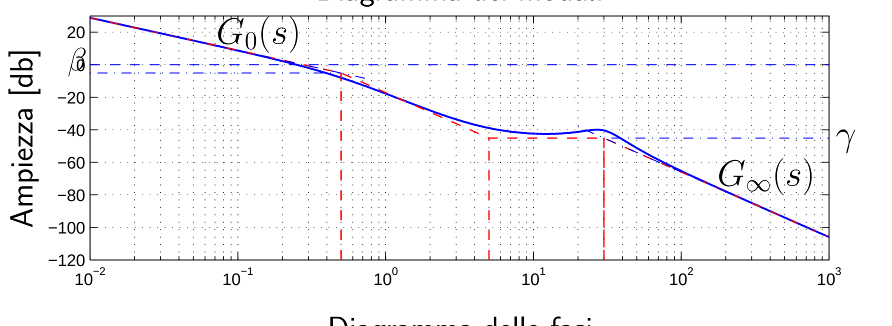
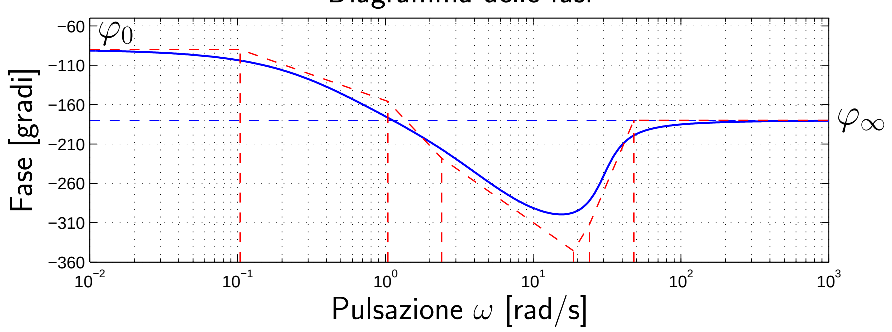


Diagramma delle fasi



- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{s\,(s+400)}{(1+3\,s)(s^2-1.5\,s+9)}.$$

Pendenza iniziale: +20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 0.333$ (un polo stabile), $\omega = 3$ (due poli complessi coniugati instabili) e $\omega = 400$ (uno zero reale stabile).

Funzione $G_0(s)$:

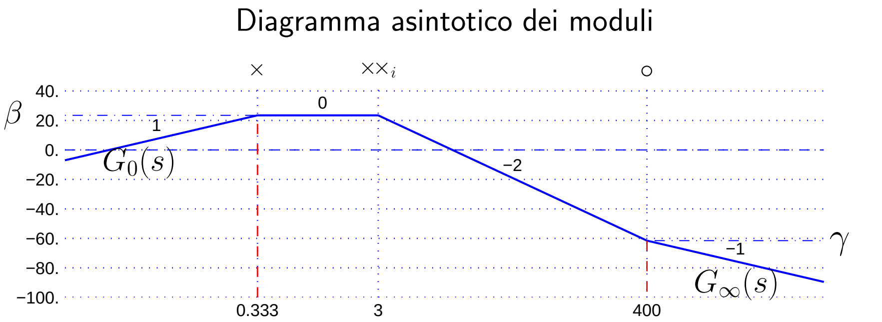
$$G_0(s) = \frac{s\,(400)}{(1)(9)} = \frac{400\,s}{9}$$

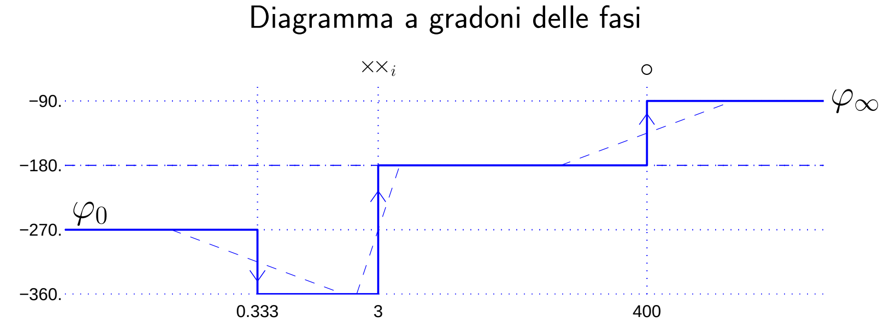
Fase iniziale $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Funzione $G_\infty(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{s\,(s)}{(3\,s)(s^2)} = \frac{1}{3\,s}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.



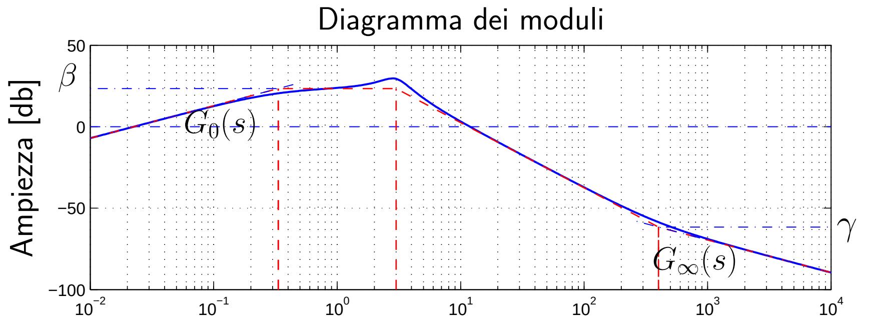


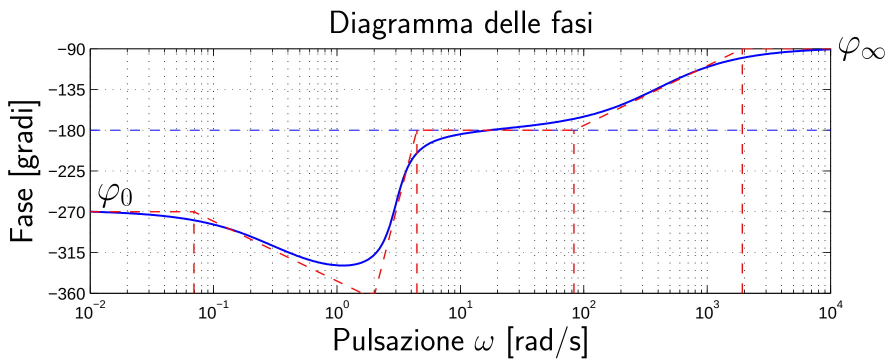
Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.333} = \frac{400}{27} = 23.4 \text{ db}.$$

Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=400} = \frac{1}{1200} = -61.58 \text{ db}.$$





• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico calcolare l'espressione della funzione $G(s)$.

Guadagno β per $\omega = 1$:

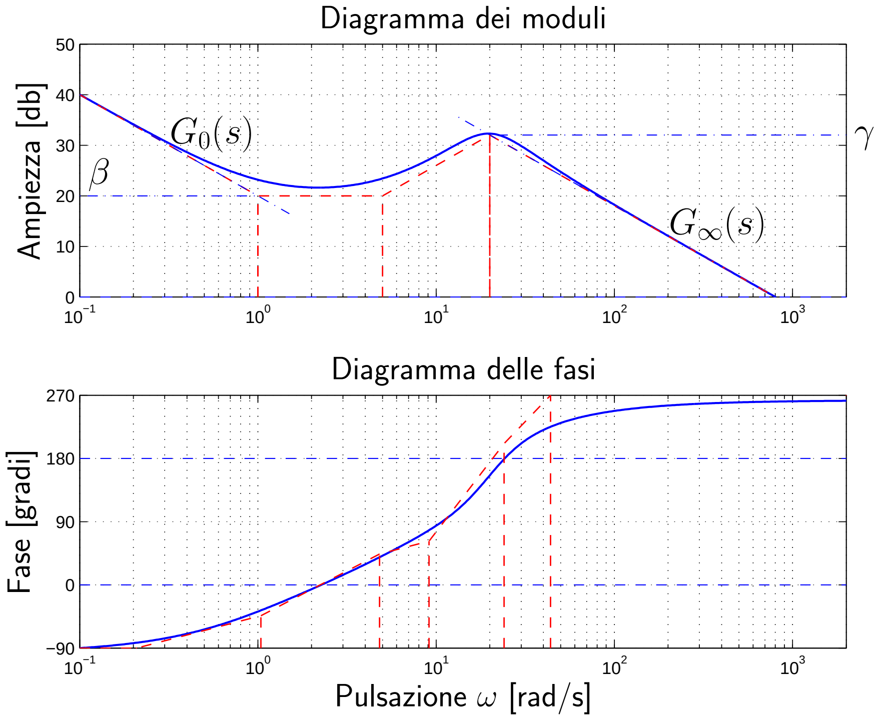
$$\beta = 20 \text{ db} = 10.$$

Pulsazioni critiche ω:

$0 \to$ un polo
$1 \to$ uno zero stabile
$5 \to$ uno zero stabile
$20 \to$ due poli c.c instabili

Coefficiente δ:

$$M_{\omega_n} = 1 \quad \to \quad \delta = 0.5.$$



La pendenza iniziale indica la presenza di un polo nell'origine. Il valore di δ della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.5$ perchè dal grafico risulta chiaro che per $\omega_n = 20$ il diagramma reale coincide con quello asintotico.

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{\overbrace{800}^{K}(s+1)(s+5)}{s\,(s^2 - 20\,s + 400)} = \frac{10\,(1+s)(1+0.2\,s)}{s\,(1 - 0.05\,s + 0.025\,s^2)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 1$ sia uguale a β:

$$|G_0(s)|_{s=j} = \left|\frac{5K}{400s}\right|_{s=j} = \frac{K}{80} = 10 \qquad \to \qquad K = 800.$$

Il valore del guadagno K puó essere determinato anche imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_\infty(s)$ per $\omega = 20$ sia uguale a $\gamma = 32$ db:

$$|G_\infty(s)|_{s=j20} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=j20} = \frac{K}{20} = 32 \text{ db} = 40 \qquad \to \qquad K = 800.$$

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico calcolare l'espressione della funzione $G(s)$.

Guadagno β per $\omega = 0.2$:

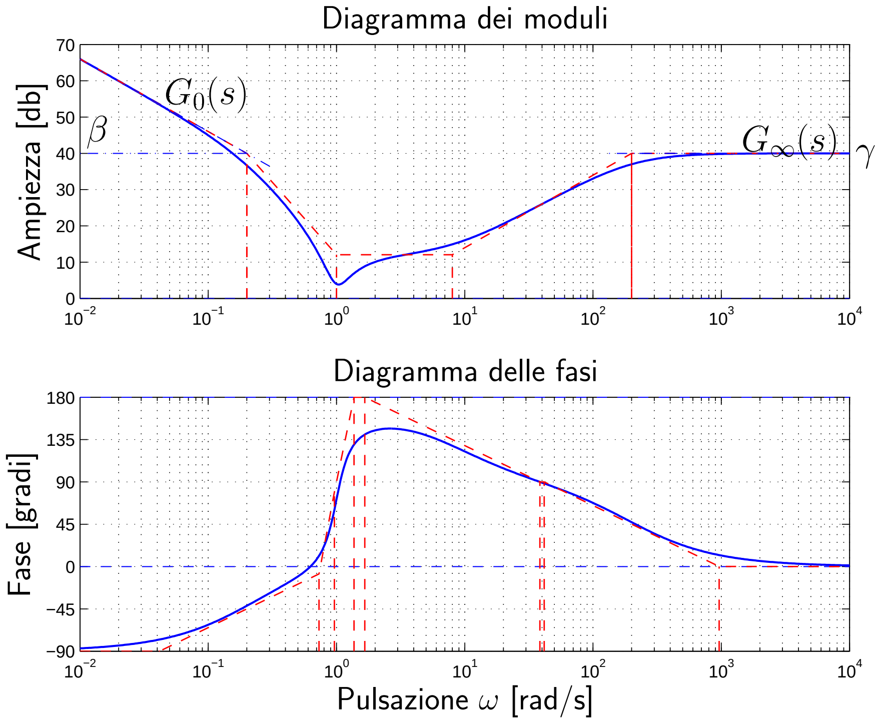
$$\beta = 40 \text{ db} = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

$0 \rightarrow$ un polo
$0.2 \rightarrow$ uno polo instabile
$1 \rightarrow$ due zeri c.c stabili
$8 \rightarrow$ uno zero instabile
$20 \rightarrow$ uno polo stabili

Coefficiente δ:

$$M_{\alpha_n} = 0.4 \quad \rightarrow \quad \zeta = 0.2.$$



La pendenza iniziale "-1" indica la presenza di un polo nell'origine. Il valore di $\zeta = 0.2$ della coppia di zeri complessi coniugati si determina dal valore $M_{\alpha_n} = -8$ db in corrispondenza della pulsazione $\alpha_n = 1$.

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{\overbrace{100}^{K}(s^2 + 0.4\,s + 1)(s-8)}{s\,(s-0.2)(s+200)} = \frac{20\,(1 + 0.4\,s + s^2)(1 - 0.125\,s)}{s\,(1 - 5\,s)(1 + 0.005\,s)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 0.2$ sia uguale a β:

$$|G_0(s)|_{s=j0.2} = \left|\frac{8K}{40s}\right|_{s=j0.2} = \frac{8K}{8} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 100.$$

Il valore del guadagno K puó essere determinato anche imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_\infty(s)$ per $\omega = 200$ sia uguale a $\gamma = 40$ db:

$$|G_\infty(s)|_{s=j200} = K = 40 \text{ db} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 100.$$

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Calcolare: 1) l'espressione analitica della funzione $G(s)$; 2) la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 5\sin(0.02\,t) + 3\cos(400\,t)$.

Guadagno β per $\omega = 0.2$:

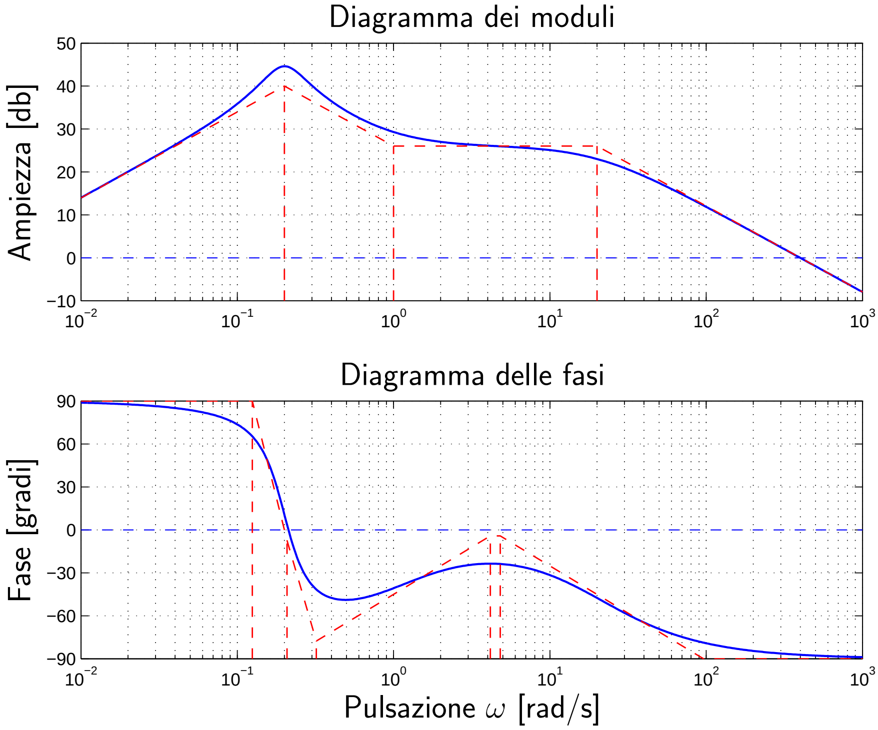
$$\beta = 40 \text{ db} = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

0 $\rightarrow$ uno zero
0.2 $\rightarrow$ due poli c.c. stabili
1 $\rightarrow$ uno zero stabile
20 $\rightarrow$ un polo stabile

Coefficiente δ:

$$M_R = 1.66 \quad \rightarrow \quad \delta = 0.3.$$



1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{\overbrace{400}^{K}\; s\,(s+1)}{(s^2 + 0.12\,s + 0.04)(s+20)} = \frac{500\,s\,(1+s)}{(1 + 3\,s + 25\,s^2)(1 + 0.05\,s)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 0.2$ sia uguale a β:

$$|G_0(s)|_{s=j0.2} = \left|\frac{K\,s}{0.8}\right|_{s=j0.2} = \frac{K\,0.2}{0.8} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 400.$$

2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 5\,|G(0.02j)|\,\sin(0.02\,t + \arg G(0.02j)) \\ &\quad +3\,|G(400j)|\,\cos(400\,t + \arg G(400j)) \\ &= 50.4\,\sin(0.02\,t + 87.62°) + 2.996\,\cos(400\,t - 87.26°). \end{aligned}$$

I valori di $|G(0.02j)|$, $\arg G(0.02j))$, $|G(400j)|$ e $\arg G(400j))$ si leggono direttamente sui diagrammi di Bode dei moduli e delle fasi.

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico: 1) ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$; 2) disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario.

Guadagno statico:

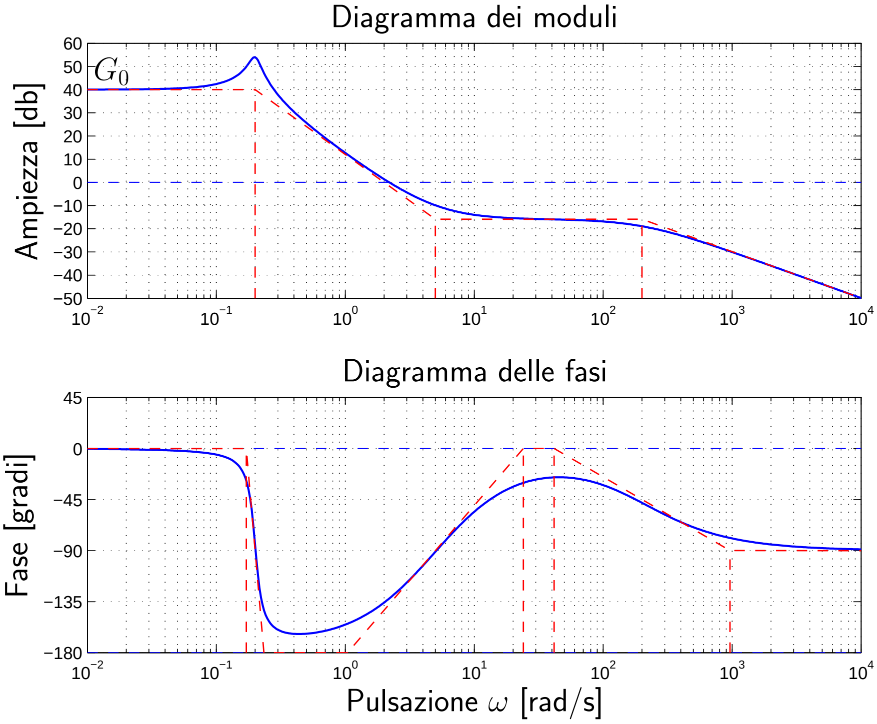
$$G(0) = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

0.2 $\rightarrow$ due poli c.c. stabili
5 $\rightarrow$ due zeri stabili
200 $\rightarrow$ uno zero stabile

Coefficiente δ:

$$M_R = 5 \quad \rightarrow \quad \delta = 0.1.$$



1) L'espressione analitica della funzione $G(s)$ è la seguente:

$$G(s) = \frac{32\,(s+5)^2}{(s^2 + 0.04\,s + 0.04)(s+200)} = \frac{100\,(1+0.2\,s)^2}{(1+s+25\,s^2)(1+0.005\,s)}.$$

2) L'andamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$ è mostrato in figura.

Poli dominanti:

$$p_{1,2} = -0.02 \pm j\,0.199.$$

Valore a regime:

$$y_\infty = G(0) = 100.$$

Tempo di assestamento:

$$T_a = \frac{3}{0.02} = 150 \text{ s}.$$

Periodo T_ω:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{0.199} \simeq 31.57 \text{ s}.$$