CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

Analisi Armonica

Ing. Luigi Biagiotti

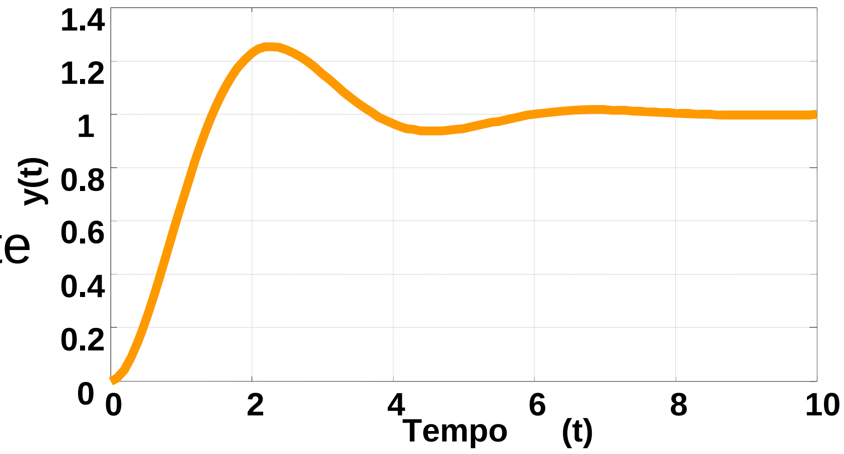
e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Analisi armonica di sistemi dinamici

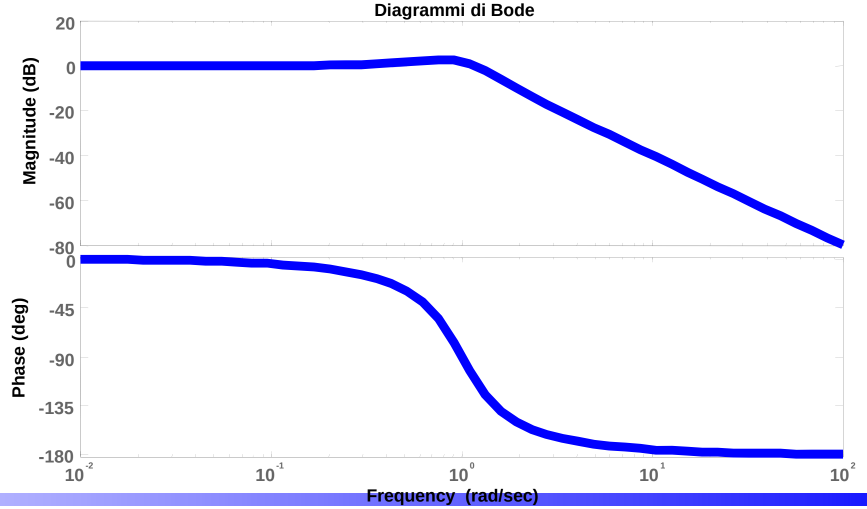
- **Analisi nel dominio del tempo.** Studio del comportamento dinamico di un sistema (soluzione delle equazioni differenziali lineari, p.e. basata sulla trasformazione di Laplace).

Deduzione della risposta dei sistemi lineari ad eccitazioni tipiche. Tale procedura di analisi viene comunemente detta *analisi nel dominio del tempo*.



- **Analisi armonica.** Un altro metodo per lo studio dei sistemi di controllo lineari è *l'analisi nel dominio della frequenza* o *analisi armonica*.

Diverso modello matematico dei sistemi lineari: la *funzione di risposta armonica*.



Analisi armonica

La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari stazionari strettamente legata alla funzione di trasferimento e pertanto equivalente alle equazioni differenziali (con sistemi inizialmente in quiete).

Spesso è però più vantaggiosa per alcune sue caratteristiche, principale fra le quali è l'attitudine ad essere rilevata sperimentalmente:

- *la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole "identificazione" a partire da dati sperimentali.*

Verranno di seguito:

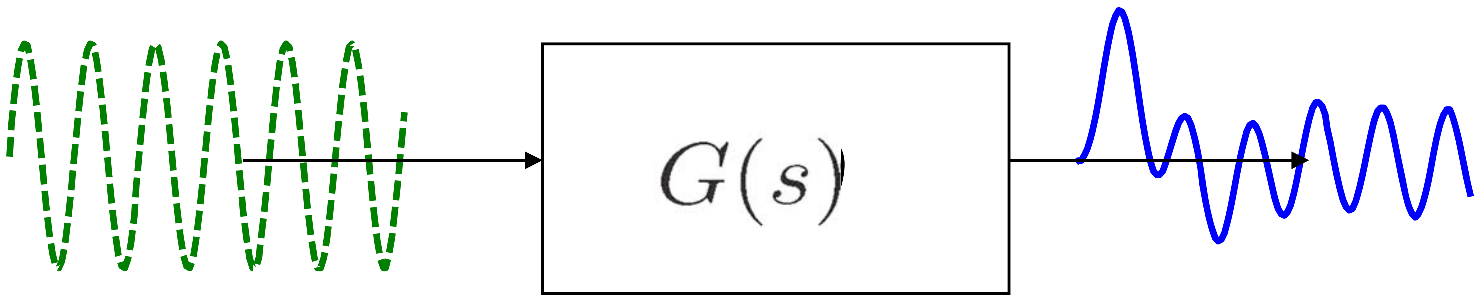
- analizzate le proprietà delle funzioni di risposta armonica dei sistemi del primo e del secondo ordine;
- presentati metodi per la deduzione e la rappresentazione delle funzioni di risposta armonica più generali, come:
  - *i diagrammi di Bode,*
  - *i diagrammi polari (di Nyquist),*
  - *i diagrammi di Nichols,*

  che rivestono un ruolo fondamentale nella progettazione dei dispositivi per modificare e migliorare il comportamento dinamico dei sistemi in retroazione.

Funzione di risposta armonica

- La definizione della funzione di risposta armonica si fonda su una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari:

- se si applica a un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile il segnale di ingresso $x(t) = X \sin(\omega t)$ esaurito il transitorio (in condizione di regime stazionario periodico) l'uscita varia pure con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω e può pertanto essere espressa con la relazione
$y(t) = Y(\omega)\ \sin(\omega t + \varphi(\omega))$



$x(t) = X\ \sin(\omega t)$

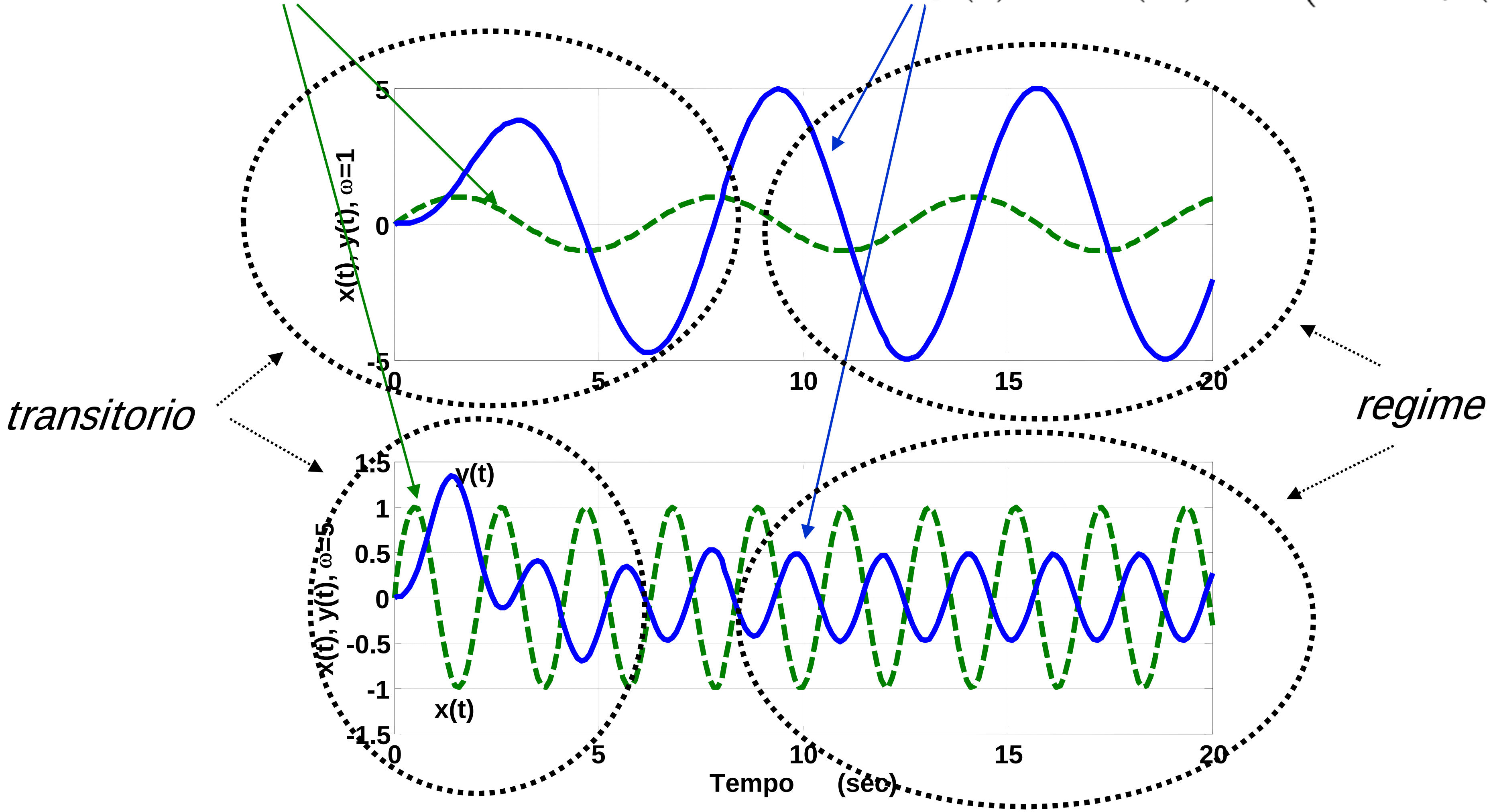
$y(t) = Y(\omega)\ \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

Ipotesi: $G(s)$ asintoticamente stabile

Funzione di risposta armonica

- L'ampiezza dell'uscita e l'angolo di fase rispetto all'ingresso sono in generale funzioni della pulsazione ω del segnale di ingresso.

$$x(t) = X\ \sin(\omega t) \qquad y(t) = Y(\omega)\ \sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$



Funzione di risposta armonica

- Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione $F(\omega)$ di variabile reale e a valori complessi:

$$F(\omega) \;=\; \frac{Y(\omega)}{X}\, e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X}\left(\cos\varphi(\omega) + j\,\mathrm{sen}\,\varphi(\omega)\right)$$

$$F(\omega) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{modulo: rapporto } Y(\omega)/X \\ \text{argomento: angolo } \varphi(\omega) \end{cases}$$

Tale funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente da *X*

Essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio $0 < \omega < \infty$.

Funzione di risposta armonica

- In relazione alla funzione di risposta armonica vale il seguente teorema.

- ***Teorema*** *(regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari)*

  Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente i poli a parte reale negativa

$$G(s) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\{p_i\} < 0$$

  soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione.

  La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ *è legata alla funzione di trasferimento* $G(s)$ *dalla relazione*

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

Funzione di risposta armonica

- **Dimostrazione:** Avendo i poli a parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile, cioè la sua risposta ad ogni perturbazione tende ad annullarsi per *t* tendente all'infinito.

  La trasformata di Laplace del segnale d'ingresso $x(t) = X \sin(\omega t)$ è

  $$X(s) = \frac{X\,\omega}{s^2 + \omega^2}$$

  mentre quella del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione

  $$Y(s) = G(s)\,X(s) = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s)\,\frac{X\,\omega}{(s - j\omega)\,(s + j\omega)}$$

- I poli della funzione a secondo membro sono gli stessi della funzione di trasferimento $G(s)$, più quelli corrispondenti al segnale di ingresso:

  $$p_1 = j\omega \quad \text{e} \quad p_2 = -j\omega$$

  Nell'antitrasformata i primi corrispondono a un termine transitorio $y_0(t)$ e gli altri a un termine permanente $y_p(t)$ che, come si verificherà, è sinusoidale.

Funzione di risposta armonica

Da

$$Y(s) = G(s)\,X(s) = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s^2+\omega^2} = G(s)\,\frac{X\,\omega}{(s-j\omega)\,(s+j\omega)}$$

Si può scrivere $y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1\,e^{j\omega t} + K_2\,e^{-j\omega t}$

in cui K_1 e K_2 sono i residui corrispondenti ai poli p_1 e p_2:

$$K_1 = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s+j\omega}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{X}{2\,j}\,G(j\omega), \qquad K_2 = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s-j\omega}\bigg|_{s=-j\omega} = \frac{-X}{2\,j}\,G(-j\omega)$$

Poichè vale la relazione $F(s^\star) = F^\star(s)$, si può scrivere

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}\ , \qquad G(-j\omega) = |G(j\omega)|\,e^{-j\varphi(\omega)}\ ,$$

in cui è $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$.

Data l'ipotesi di stabilità asintotica, per *t* sufficientemente elevato si può trascurare il termine transitorio $y_0(t)$.

Funzione di risposta armonica

- Da

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1\, e^{j\omega t} + K_2\, e^{-j\omega t}$$

- Si ottiene infine

$$\begin{aligned} y(t) \simeq y_p(t) &= |G(j\omega)|\, X\, \frac{e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t+\varphi(\omega))}}{2\,j} \\ &= |G(j\omega)|\, X\;\sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big) \end{aligned}$$

da cui la definizione (già vista) di funzione di risposta armonica

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}\, e^{j\varphi(\omega)}$$

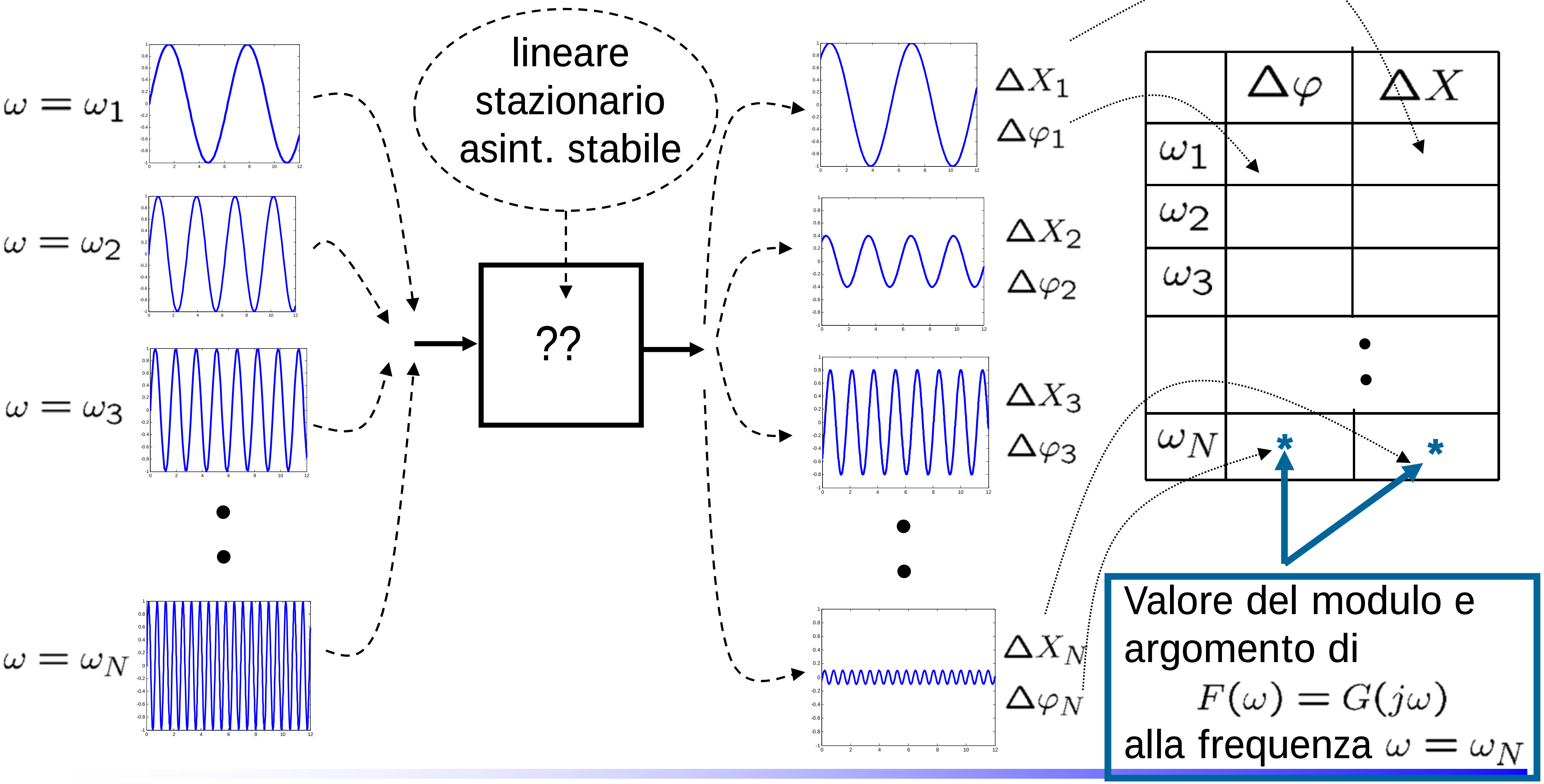
$$F(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \text{modulo: rapporto } Y(\omega)/X \\ \text{argomento: angolo } \varphi(\omega) \end{cases}$$

Funzione complessa di variabile reale ω:

- il modulo rappresenta il fattore di amplificazione/attenuazione a regime dell'ampiezza di ingressi sinusoidali alla frequenza ω;
- l'argomento lo sfasamento tra ingresso e uscita

Funzione di risposta armonica

- Osservazione importante: il legame tra funzione di trasferimento e funzione di risposta armonica assume un grande significato pensando che quest'ultima si presta ad una identificazione sperimentale (analisi delle risposte a fronte di ingressi sinusoidali)



Funzione di risposta armonica

Modellistica fisica

Sperimentazione

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

Funzione di trasferimento

$G(s)$

Funzione di risposta armonica

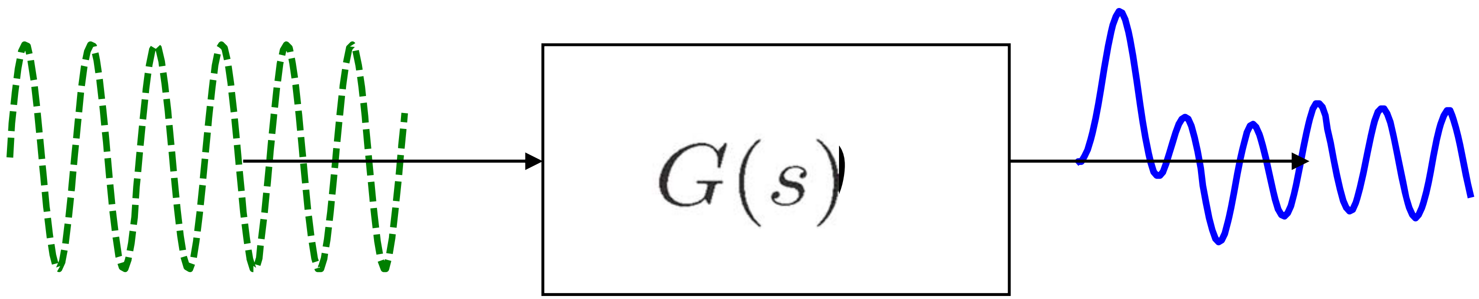
$F(\omega)$

??

Vedremo, studiando i metodi grafici per la rappresentazione della funzione di risposta armonica, che sarà possibile mettere in diretta relazione l’andamento (sperimentale) della funzione di risposta armonica con la posizione di poli/zeri della funzione di trasferimento

Funzione di risposta armonica

- La funzione di risposta armonica deve essere utilizzata tutte le volte che si vuol calcolare la risposta a regime di un sistema lineare asintoticamente stabile quando in ingresso è presente un segnale sinusoidale



$$x(t) = X \sin\big(\omega t + \alpha\big) \qquad y_\infty(t) = X\,|G(j\omega)|\,\sin\big(\omega t + \alpha + \arg G(j\omega)\big)$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

Analisi Armonica
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti