CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Il criterio di Routh

- La stabilità dei sistemi lineari stazionari espressi da una funzione di trasferimento razionale fratta del tipo

$$G(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

  è legata alla posizione, nel piano complesso, dei poli della funzione di trasferimento, che sono le radici di una equazione algebrica del tipo

$$a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0 \qquad (1)$$

  cioè la ***equazione caratteristica*** del sistema.

- Se l'equazione caratteristica è di grado elevato, la determinazione delle sue radici comporta calcoli non semplici.

- Risulta quindi utile un criterio che consenta di determinare, eseguendo un esame dei coefficienti, il segno della parte reale delle radici stesse.

- Il ***Criterio di Routh*** consente di dedurre informazione sulla posizione dei poli della $G(s)$ senza risolvere l'equazione caratteristica.

Il criterio di Routh

Data:

$$G(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

Senza perdere di generalità si suppone che:

- il coefficiente a_n sia positivo;
- il coefficiente a_0 sia non nullo,

- Si verifica facilmente che se l'equazione ha radici tutte con parte reale negativa, cioè se il corrispondente sistema è asintoticamente stabile, tutti i coefficienti $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0$ sono positivi.

Condizione Necessaria (ma non sufficiente) perché le radici della (1) abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0,\ \ a_1 > 0,\ \ldots\ ,\ \ a_{n-1} > 0,\ \ a_n > 0$$

Il criterio di Routh

- Sia data l'equazione caratteristica:

$$a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$$

- Per applicare il criterio di Routh occorre anzitutto costruire con i coefficienti del polinomio la ***tabella di Routh***:

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \ldots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

- ***Le prime due righe della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata***.

- Gli elementi della riga successiva sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3}}{a_{n-1}}\,, \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n\, a_{n-5}}{a_{n-1}}\,, \qquad \ldots,$$

Il criterio di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
b_{n-2} & = & \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
b_{n-4} & = & \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-4} - a_n\,a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
\dots & &
\end{array}
\right.
$$

- Il termine b_{n-2} è espresso dal determinante costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga.

- Il termine b_{n-4} è espresso dal determinante costituito dai primi e terzi coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso ancora per il primo coefficiente della seconda riga ....

- In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

$$
c_{n-3} = \frac{b_{n-2}\,a_{n-3} - a_{n-1}\,b_{n-4}}{b_{n-2}}, \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}\,a_{n-5} - a_{n-1}\,b_{n-6}}{b_{n-2}}, \qquad \dots,
$$

- Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri *n, n-1, …* e sono di lunghezza decrescente: l'ultima riga, (la numero 0) ha un solo elemento.

Il criterio di Routh

- Data la Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

vale il seguente

- ***Teorema di Routh.***

> Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella, considerati successivamente, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.

Il criterio di Routh - Esempio

- Sia data l'equazione $s^3 - 4\,s^2 + s + 6 = 0.$

  La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & -4 & 6 \\
1 & \dfrac{-4-6}{-4} = 2.5 & 0 \\
0 & \dfrac{2.5 \cdot 6}{2.5} = 6 &
\end{array}
$$

- La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: si hanno pertanto due radici a parte reale positiva (le radici dell'equazione sono -1, 2, 3).

Il criterio di Routh - Esempio

- Sia data l'equazione $2\,s^4 + s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 10 = 0.$

  La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 1 & 5 & 0 \\
2 & -7 & 10 & \\
1 & \dfrac{45}{7} & 0 & \\
0 & 10 & &
\end{array}
$$

- La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: anche in questo caso due radici hanno parte reale positiva.

Il criterio di Routh

- Ovviamente se, durante la costruzione della tabella, i termini di una stessa riga sono moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo, non si modifica il numero delle variazioni di segno nella prima colonna.

- Quindi ***si* può evitare che nella tabella compaiano numeri frazionari** a partire da un polinomio con coefficienti interi: nel calcolo degli elementi di una o più righe si può fare a meno di dividere per il primo elemento della riga superiore, limitandosi a un cambiamento di segno se esso è negativo.

- **Esempio.** Sia data l'equazione $4\,s^4 + 3\,s^3 + 5\,s^2 + 2\,s + 1 = 0.$
  La tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|ccl}
4 & 4 & 5 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 0 \\
2 & 7 & 3 & \text{(non si è diviso per 3)} \\
1 & 5 & 0 & \text{(non si è diviso per 7)} \\
0 & 3 & &
\end{array}
$$

Tutte le radici hanno parte reale negativa.

Il criterio di Routh

- Durante la costruzione della tabella di Routh si possono presentare i seguenti due casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

  - **il primo termine di una riga è nullo**
  - **tutti i termini di una riga sono nulli**

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 0 & 5 & 0 \\
2 & ?? & & \\
1 & \ldots & & \\
0 & \ldots & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
4 & 5 & 6 & 2 \\
3 & 0 & 0 & 0 \\
2 & ?? & & \\
1 & \ldots & & \\
0 & \ldots & &
\end{array}
$$

Il criterio di Routh

- **Nel primo caso** (*il primo termine di una riga è nullo*) la costruzione della tabella può essere completata considerando, in luogo del termine nullo, un termine +ε o -ε di modulo piccolo a piacere (non è necessario dividere la riga successiva per il termine in questione, ma solo tener conto del suo segno, da cui peraltro non dipende il risultato dell'analisi della tabella di Routh).

- **Esempio.** Si consideri l'equazione $s^3 + 3\,s - 2 = 0$. La tabella di Routh, nei due casi in cui si assegnino rispettivamente il segno positivo e il segno negativo al termine ε, è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & +\varepsilon & -2 \\ 1 & 3\varepsilon+2 & \\ 0 & -2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -\varepsilon & -2 \\ 1 & 3\varepsilon-2 & \\ 0 & -2 & \end{array}$$

Nella prima colonna si riscontra una variazione di segno, che rivela la presenza di una radice a parte reale positiva.

Il criterio di Routh

- **Nel secondo caso** (tutti i termini di una riga sono nulli) la costruzione della tabella non può essere in alcun modo proseguita.

- Questo caso si verifica sempre in corrispondenza di una riga contraddistinta da un numero dispari: sia esso $2m\text{-}1$.

- Le eventuali variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella, relative alle prime $n\text{-}2m\text{+}1$ righe, riguardano solo $n\text{-}2m$ radici del polinomio: ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva, ogni permanenza ad una radice a parte reale negativa.

$$
\begin{array}{c|cccc}
.. & \dots & \dots & \dots & \dots \\
.. & \dots & \dots & \dots & \dots \\
2m-2 & b_{2m} & b_{2m-2} & b_{2m-4} & \dots \\
2m-1 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

Il criterio di Routh

- Per dedurre informazione sulla posizione delle restanti 2m radici, si può procedere nel seguente modo. Siano

$$b_{2m},\ b_{2m-2},\ \ldots,\ b_0$$

  i termini della riga immediatamente precedente la riga di tutti zeri.

- Si costruisce **l'equazione ausiliaria**

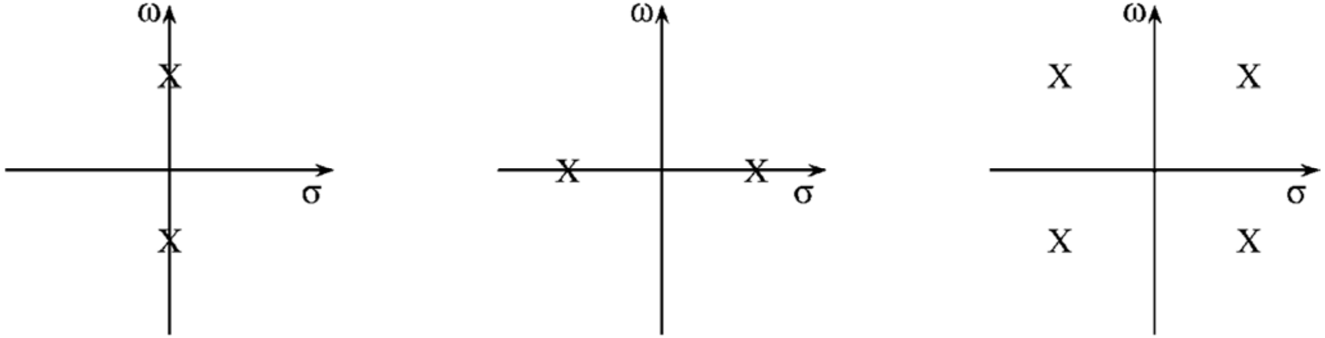
$$b_{2m}s^{2m} + b_{2m-2}\,s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$$

  e la si risolve:

  le sue radici coincidono con le 2m radici dell'equazione polinomiale in esame sulle quali la tabella di Routh non ha fornito informazione.

Il criterio di Routh

- Poichè nell'equazione ausiliaria mancano i termini di grado dispari, le radici sono disposte simmetricamente rispetto all'origine.



- Infatti l'equazione ausiliaria si riconduce ad un'equazione di grado *m* operando la posizione $s^2 = z$: $b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2}\, s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$

$$b_{2m} z^m + b_{2m-2}\, z^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$$

- Ogni *radice reale negativa* dell'equazione algebrica di grado m nella variabile z che così si ottiene corrisponde, nell'equazione, a due radici immaginarie;
- Ogni *radice reale positiva* a due radici reali simmetriche rispetto all'origine;
- Ogni *coppia di radici complesse coniugate* a due coppie di radici complesse coniugate simmetriche rispetto all'origine.
- ***Pertanto l'equazione ausiliaria ha tante radici a parte reale positiva quante sono le sue radici a parte reale negativa e può presentare anche radici a parte reale nulla.***

Il criterio di Routh

- **Esempio.** Data l'equazione polinomiale $s^4 + s^3 - 3\,s^2 - s + 2 = 0$ si costruisce la tabella

4	1	-3	2
3	1	-1	0
2	-2	2	
1	0	0	

- La tabella fornisce informazione solo su due delle quattro radici dell'equazione: una di esse ha parte reale negativa, l'altra parte reale positiva.

- L'equazione ausiliaria è $-2\,s^2 + 2 = 0$, che risolta fornisce le altre due radici: *-1*, *1*.

Il criterio di Routh - Esempio

- Tabella di Routh corrispondente all'equazione caratteristica
  $s^6 + s^5 - 2\,s^4 - 3\,s^3 - 7\,s^2 - 4\,s - 4 = 0$

$$
\begin{array}{c|cccc}
6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\
5 & 1 & -3 & -4 & \\
4 & 1 & -3 & -4 & \\
3 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

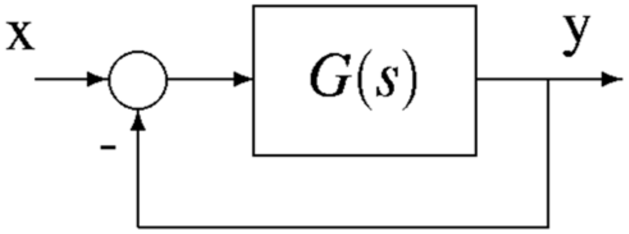
- Presentandosi una riga di tutti zeri, si ricava l'equazione ausiliaria $s^4 - 3\,s^2 - 4 = 0$ le cui radici, in s^2, sono

$$
\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad s_1 = j\,,\ s_2 = -j\,,\ s_3 = 2\,,\ s_4 = -2
$$

Il criterio di Routh

- Il criterio di Routh è di grande utilità nel progetto di dispositivi di controllo in retroazione e per l'analisi di sistemi dinamici la cui equazione caratteristica sia funzione di un parametro, del quale si voglia determinare il campo di variabilità per il quale il sistema è stabile.

- Esempio. Sia dato il sistema in retroazione



$$G(s) = \frac{K}{s^4 + 6\,s^3 + 11\,s^2 + 6\,s + 2}$$

determinare i valori di K per il cui il sistema retroazionato è stabile

- L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^4 + 6\,s^3 + 11\,s^2 + 6\,s + K + 2 = 0$$

Il criterio di Routh

- La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 11 & K+2 \\
3 & 6 & 6 & 0 \\
2 & 10 & K+2 & \\
1 & 48-6K & 0 & \\
0 & K+2 & &
\end{array}
$$

- Per la stabilità asintotica si deducono le condizioni:
  - $48 - 6K > 0$ (da cui $K < 8$)
  - $K + 2 > 0$ (da cui $K > -2$).

- Il campo corrispondente alla stabilità asintotica del sistema è pertanto

$$-2 < K < 8$$

- Quando K assume il valore limite inferiore dell'intervallo di stabilità (K = -2) si ha un polo nell'origine, quando assume il valore limite superiore (K = 8) si ha una coppia di poli immaginari: in entrambi i casi il sistema è stabile, ma non asintoticamente.

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti