CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

ANTITRAFORMATE DI LAPLACE
MODI DI UN SISTEMA

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Antitrasformate di Laplace

- **Problema:** data la soluzione della equazione differenziale nel dominio di Laplace calcolare l'andamento nel dominio del tempo in funzione dell'ingresso e delle condizioni iniziali (evoluzione temporale dell'uscita).

$$Y(s) = G(s)\,X(s) + L(s, y_0)$$

con $G(s)$ e $L(s, y_0)$ funzioni razionali fratte

- Nel caso (sempre vero nel nostro corso) in cui la trasformata di Laplace dell'ingresso sia anch'essa una funzione razione fratta allora il problema diviene quello di antitrasformare il rapporto di due polinomi in s.
- Grazie alla proprietà di linearità dell'operatore anti-trasformata di Laplace la risposta libera e quella forzata possono essere calcolati separatamente

Antitrasformate di Laplace

- Pertanto ci si concentra sull'antitrasformazione di un rapporto di polinomi in s, cioè di una funzione del tipo

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Si definisce $r = n - m$ il ***grado relativo*** della funzione razionale $Y(s)$

- **Obiettivo:** riscrivere il rapporto di polinomi come somma di termini elementari facilmente antitrasformabili (**sviluppo in fratti semplici**)

Antitrasformate di Laplace

Se:

- **grado relativo > 0**

  Frazione strettamente propria: si può scomporre il rapporto di N(s) e D(s) in una somma di termini facilmente antitrasformabili, detta *somma di fratti semplici*.

  Esempio:

$$Y(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

- **grado relativo = 0**

  Prima di procedere alla scomposizione in fratti semplici è necessario scomporre la funzione $F(s)$ nella somma di una costante e di una frazione strettamente propria, cioè

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s)$$

  dove

$$y_0 = \lim_{s \to \infty} Y(s), \qquad Y_1(s) = Y(s) - y_0$$

  Esempio:

$$Y(s) = \frac{3s^2+2s+1}{s^2+2s+5} = 3 - \frac{4s+14}{s^2+2s+5}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 3\delta(t) - \sqrt{41}\, e^{-t} \sin(2t+\varphi), \qquad \varphi = \arctan(4/5)$$

Antitrasformate di Laplace

- La funzione $Y(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

$$Y(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

- Le costanti complesse $z_1,\ z_2,\ z_m$ e $p_1,\ p_2,\ p_m$ vengono dette, rispettivamente, **zeri** e **poli** della funzione $Y(s)$.
- **Esempio**

$$Y(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$z=-2,$ zero

$p_1 = -1$

$p_2 = -3$ poli

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2+6s+5}{s^3+2s^2+16s} \\ &= \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+1+j\sqrt{15})(s+1-j\sqrt{(15)})} \end{aligned}$$

$z_1 = -1, \quad z_2 = -5,$ zeri

$p_1 = 0$

$p_2 = -1 + j\sqrt{15}$

$p_3 = -1 - j\sqrt{15}$ poli

Antitrasformate di Laplace

- Antitrasformazione in caso di **poli semplici**
- Antitrasformazione in caso di **poli multipli**

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Lo sviluppo della $Y(s)$ in somma di fratti semplici corrisponde all'espressione

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

K_i : **residui** relativi ai vari poli p_i →

- **Reali**
  in corrispondenza di poli reali
- **Complessi coniugati**
  in corrispondenza di poli complessi coniugati

- I residui si possono ricavare facilmente da

$$\begin{aligned} K_i &= (s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=p_i} \\ &= \frac{N(p_i)}{(p_i-p_1)\dots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\dots(p_i-p_n)} \qquad (i=1,\dots,n) \end{aligned}$$

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Infine, si ottiene l'antitrasformata della $Y(s)$ per la proprietà di linearità e utilizzando la

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

- Complessivamente, si ha:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i} \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}$$

- OSSERVAZIONI
  - l'andamento esponenziale è governato dalla posizione delle radici del polinomio a denominatore ovvero
    - poli della fdt nel caso di evoluzione libera
    - poli della fdt + radici del polinomio a denominatore di $X(s)$ nel caso di risposta forzata
  - Gli zeri della fdt e le condizioni iniziali (in generale il numeratore della funzione razione fratta) non influenzano gli andamenti esponenziali bensì i fattori moltiplicativi (residui)

ESEMPIO

- Sia
$$Y(s) = \frac{5\,s+3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

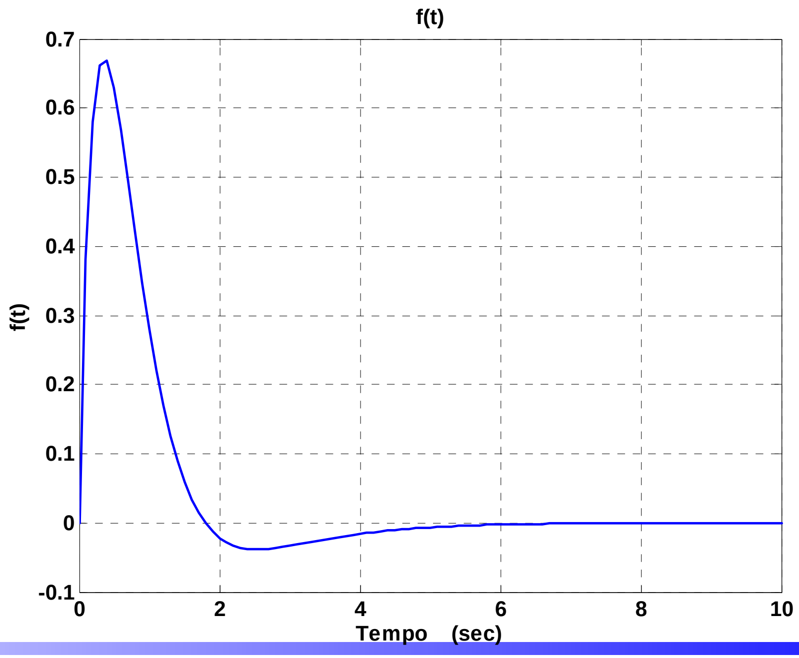
I residui sono:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{5\,(-1)+3}{(-1+2)\,(-1+3)} = -1 \qquad (s=-1)\\
K_2 &= \frac{5\,(-2)+3}{(-2+1)\,(-2+3)} = 7 \qquad (s=-2)\\
K_3 &= \frac{5\,(-3)+3}{(-3+1)\,(-3+2)} = -6 \qquad (s=-3)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e infine, antitrasformando i singoli termini, si ottiene

$$y(t) = -e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$



Antitrasformate di Laplace – Poli semplici c.c.

- Quando si hanno coppie di **poli complessi coniugati**, nella antitrasformata *y(t)* sono presenti esponenziali complesse moltiplicate per coefficienti complessi: essi si possono però facilmente ricondurre a prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche applicando le formule di Eulero.

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

- Si abbiano infatti i poli complessi coniugati

$$p_1 = \sigma_1 + j\,\omega_1 \;, \qquad p_2 = p_1^\star = \sigma_1 - j\,\omega_1$$

a cui corrispondono i residui (complessi coniugati)

$$K_1 = u_1 + j\,v_1 = M e^{j\varphi} \;, \qquad K_2 = K_1^\star = u_1 - j\,v_1 = M e^{-j\varphi}$$

- La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + j\,v_1}{s - (\sigma_1 + j\,\omega_1)} + \frac{u_1 - j\,v_1}{s - (\sigma_1 - j\,\omega_1)} = \frac{M e^{j\varphi}}{s - (\sigma_1 + j\,\omega_1)} + \frac{M e^{-j\varphi}}{s - (\sigma_1 - j\,\omega_1)}$$

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici c.c.

- Antitraformando

$$\boxed{Y_i(s) = \frac{M e^{j\varphi}}{s - (\sigma_1 + j\,\omega_1)} + \frac{M e^{-j\varphi}}{s - (\sigma_1 - j\,\omega_1)}}$$

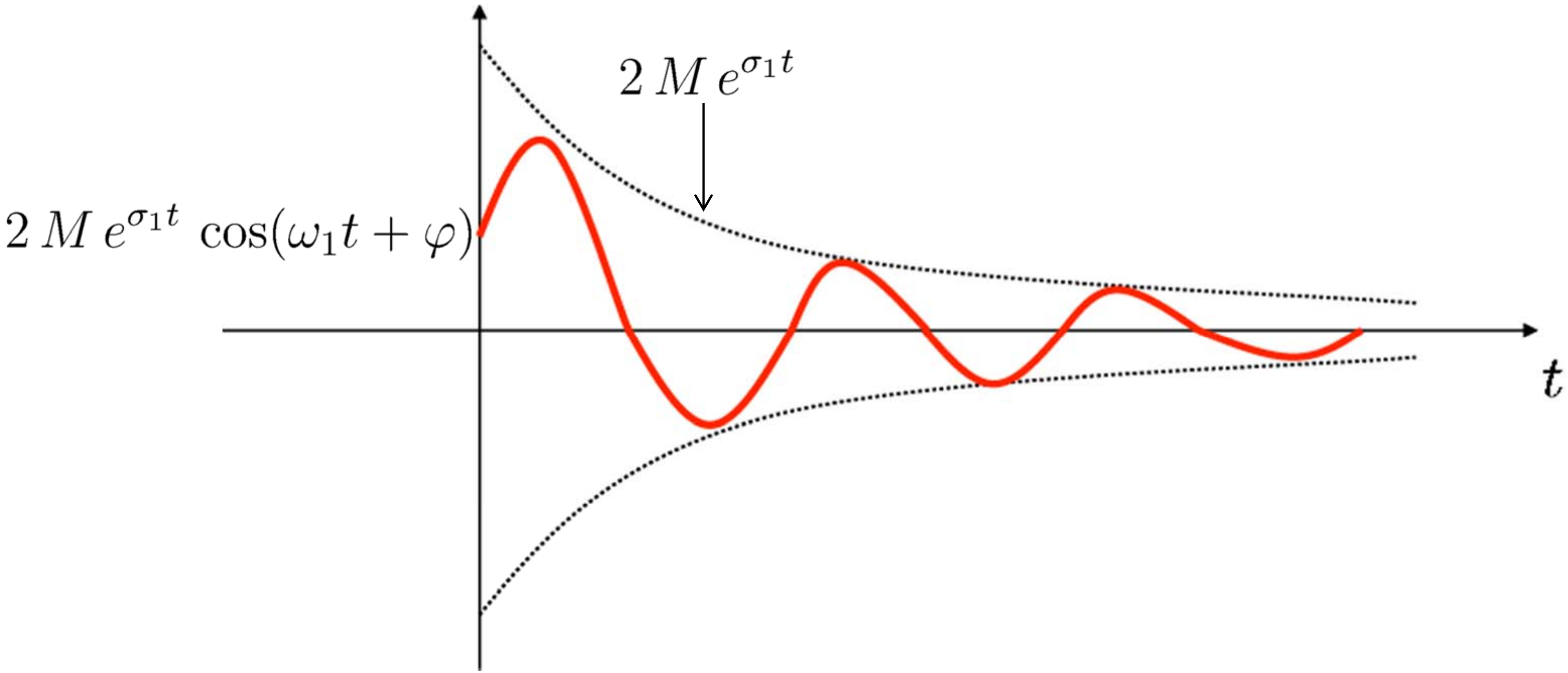
si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[Y_i(s)] &= M e^{j\varphi}\, e^{(\sigma_1 + j\,\omega_1)t} + M e^{-j\varphi}\, e^{(\sigma_1 - j\,\omega_1)t} \\
&= M\, e^{\sigma_1 t}\left(e^{j(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi)}\right) \\
&= 2\, M\, e^{\sigma_1 t} \left(\frac{e^{j(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi)}}{2}\right) \\
&= \boxed{2\, M\, e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi)} = 2\, M\, e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi + \pi/2)
\end{aligned}$$

dove $M = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}\,, \quad \varphi = \arg\left(u_1 + j\, v_1\right)$

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici c.c.

- L'effetto di una coppia di poli complessi coniugati a molteplicità singola è data da un segnale periodico di frequenza pari alla parte immaginaria dei poli modulato in ampiezza da un segnale esponenziale governato dalla parte reale dei poli. Il valore dei residui associati influenza la costate moltiplicativa M e la fase φ



Antitrasformate di Laplace – Poli semplici c.c.

- Sia
$$Y(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}$$

Scomponendo in fratti semplici e calcolando i residui si deduce

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{7\cdot 0 - 8\cdot 0 + 5}{(0+1-j2)(0+1+j2)} &&= 1 && (s=0)\\
K_2 &= \frac{7(-1+j2)^2 - 8(-1+j2)+5}{(-1+j2)(-1+j2+1+j2)} &&= 3+j4 && (s=-1+j2)\\
K_3 &= \frac{7(-1-j2)^2 - 8(-1-j2)+5}{(-1-j2)(-1-j2+1-j2)} &&= 3-j4 && (s=-1-j2)
\end{aligned}$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s+1-j2} + \frac{3-j4}{s+1+j2} = \frac{1}{s} + 5\left(\frac{e^{j\varphi}}{s+1-j2} + \frac{e^{-j\varphi}}{s+1+j2}\right),$$

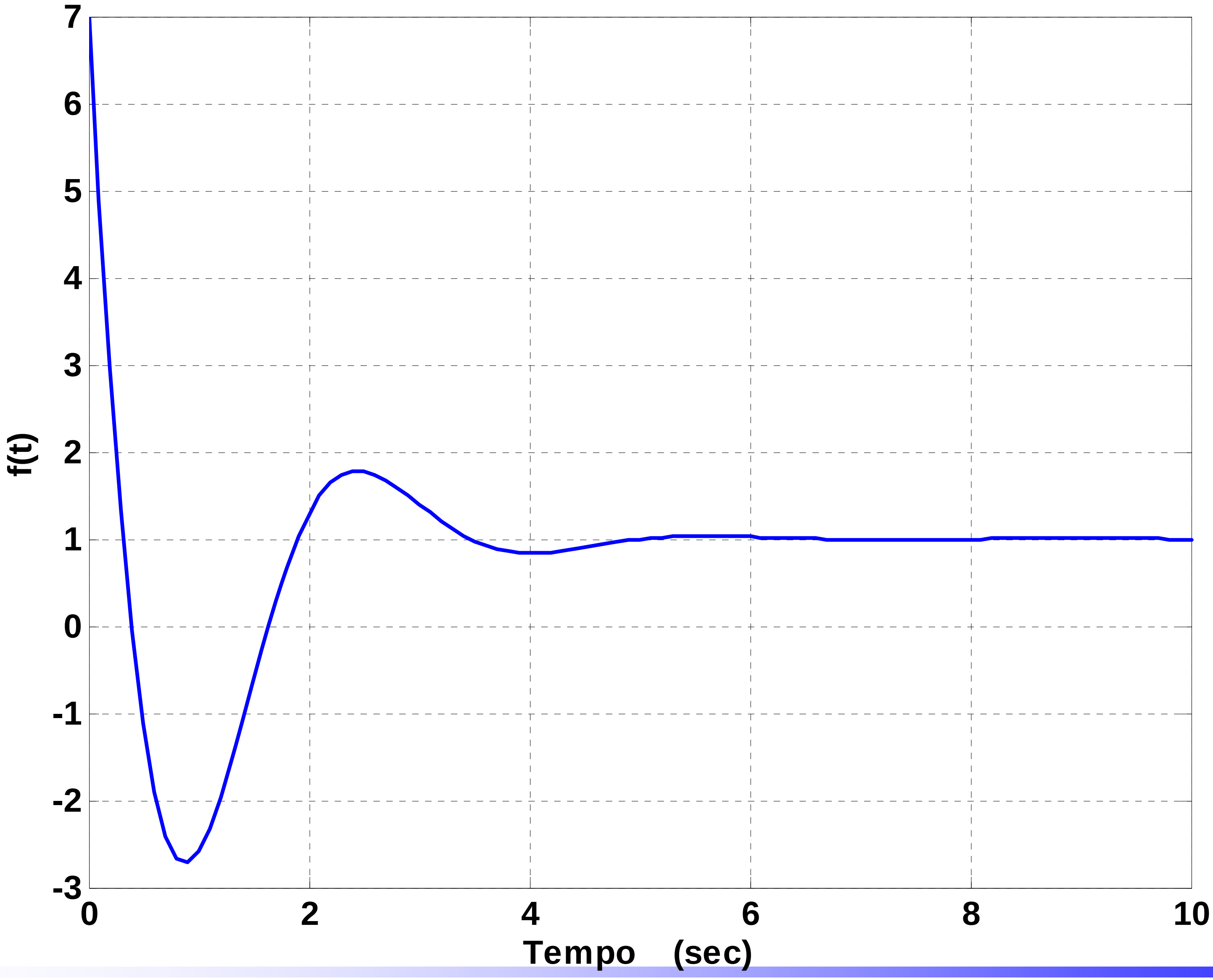
$$\varphi = \arctan(4/3) = 53,13°$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = 1 + 10\, e^{-t}\left(\frac{e^{j(2t+\varphi)} + e^{-j(2t+\varphi)}}{2}\right) = 1 + 10\, e^{-t}\cos(2t+\varphi)$$

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici c.c.

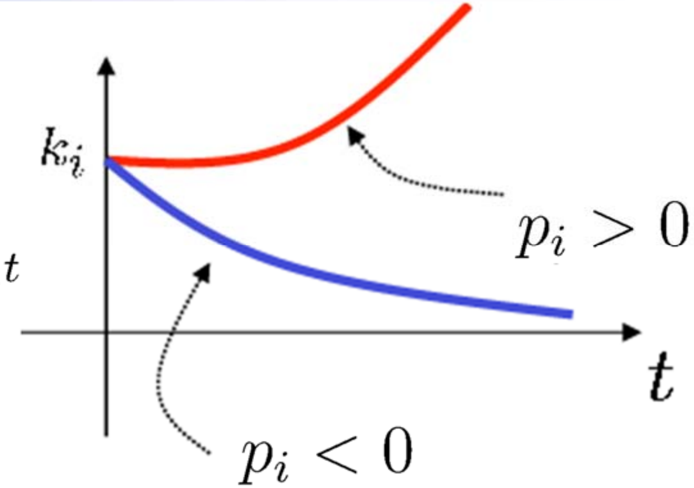
$$y(t) = 1 + 10\,e^{-t}\left(\frac{e^{j(2t+\varphi)} + e^{-j(2t+\varphi)}}{2}\right) = 1 + 10\,e^{-t}\cos(2t+\varphi)$$



Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Tabella riassuntiva:
  - **Polo reale**

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_i}{s-p_i}\right) = k_i\, e^{p_i t}$$



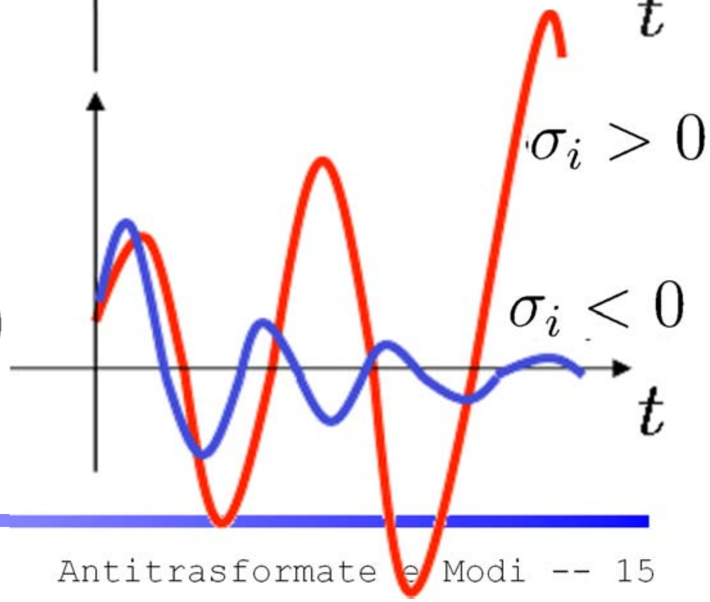
  - **Polo nell'origine**

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_i}{s}\right) = k_i$$

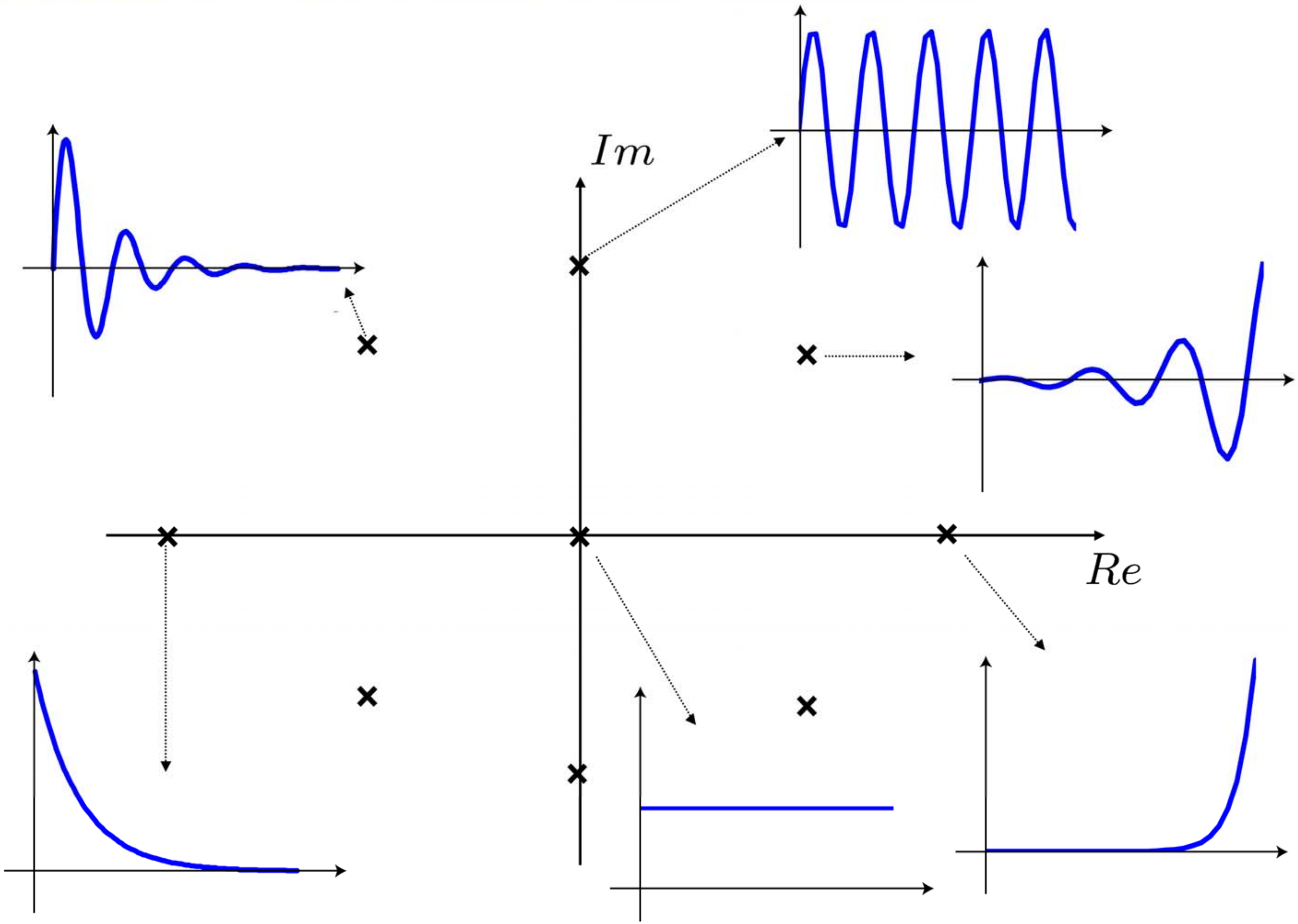
  - **Poli complessi coniugati**

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_i}{s-p_i} + \frac{k_i^\star}{s-p_i^\star}\right) = 2\, M_i\, e^{\sigma_i t}\, \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i, \;\; k_i = M_i e^{j\varphi_i}$$



Antitrasformate di Laplace – Poli semplici



Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- Si suppone che gli n poli della funzione razionale $Y(s)$ si possano dividere in h gruppi, ciascuno formato da r_i (i = 1, … ,h) poli coincidenti.
  In altre parole, si suppone che si abbiano h poli diversi p_i (i = 1, … , h), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$. Naturalmente è

$$\sum_{i=1}^{h} r_i = n$$

- Lo sviluppo in fratti semplici in questo caso è dato da

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\dots(s-p_h)^{r_h}}$$

$$= \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}$$

- in cui le costanti K_{il} si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=p_i} \qquad (i=1,\dots,h;\ell=1,\dots,r_i)$$

Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- Facendo uso della proprietà di linearità e della relazione

$$\mathcal{L}\left[t^n\, e^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

si può infine ottenere l'antitrasformata come

$$y(t) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!}\, t^{r_i-\ell}\, e^{p_i t}$$

Anche in questo caso i coefficienti K_i sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati, per cui le esponenziali complesse possono essere sostituite con prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, con procedimento analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- **Esempio:** Sia

$$Y(s) \;:=\; \frac{1}{s^3+4\,s^2+5\,s+2} = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

Calcolando i residui si deduce

$$K_{11} = (s+2)\,Y(s)\Big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds}(s+1)^2\,Y(s)\Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = (s+1)^2\,Y(s)\Big|_{s=-1} = 1$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

da cui, antitrasformando

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- **Esempio:** Sia

$$Y(s) := \frac{1}{s^3 + 4\,s^2 + 5\,s + 2} = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

Calcolando i residui si deduce

$$K_{11} = (s+2)\,Y(s)\big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds}(s+1)^2\,Y(s)\bigg|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = (s+1)^2\,Y(s)\big|_{s=-1} = 1$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

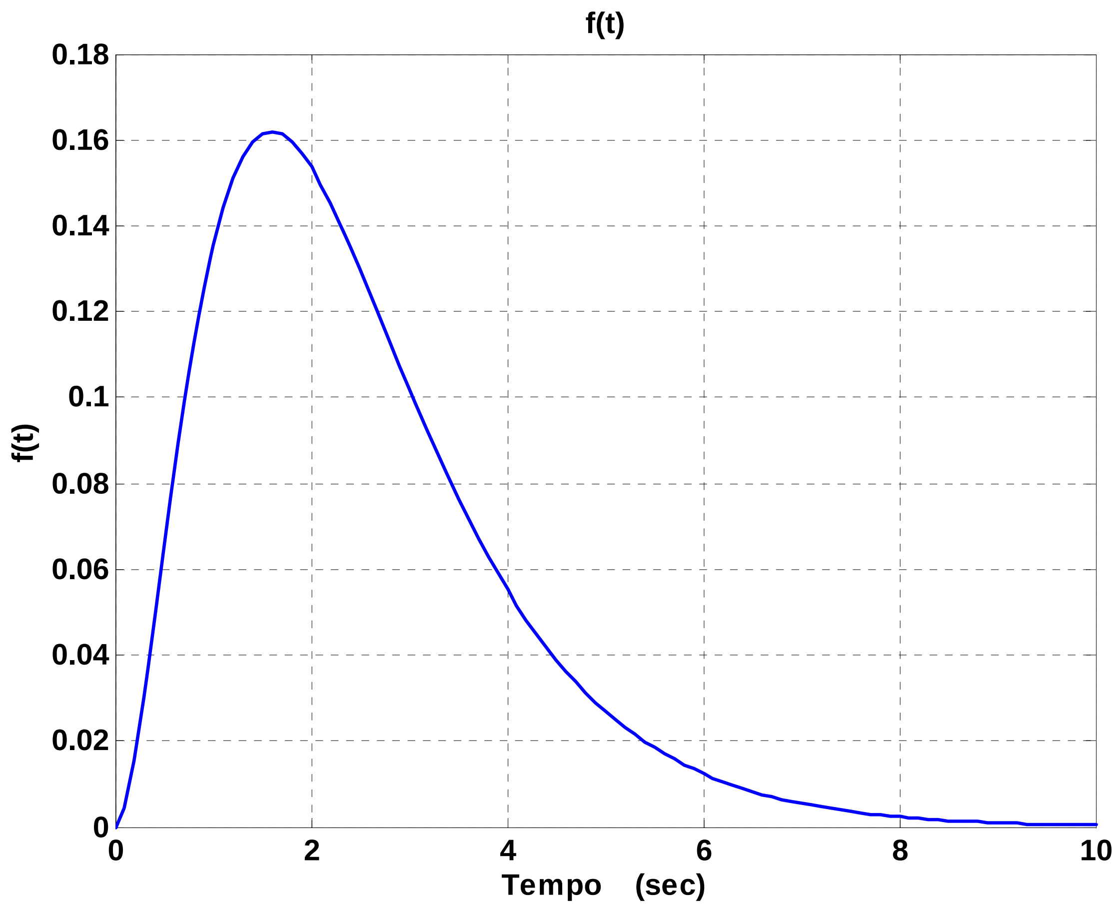
da cui, antitrasformando

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

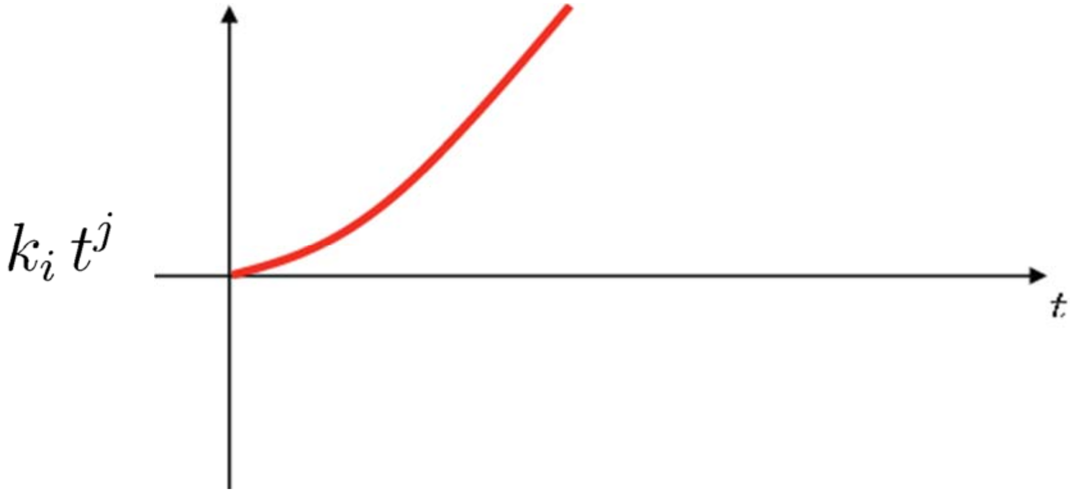
- Si ottiene:

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

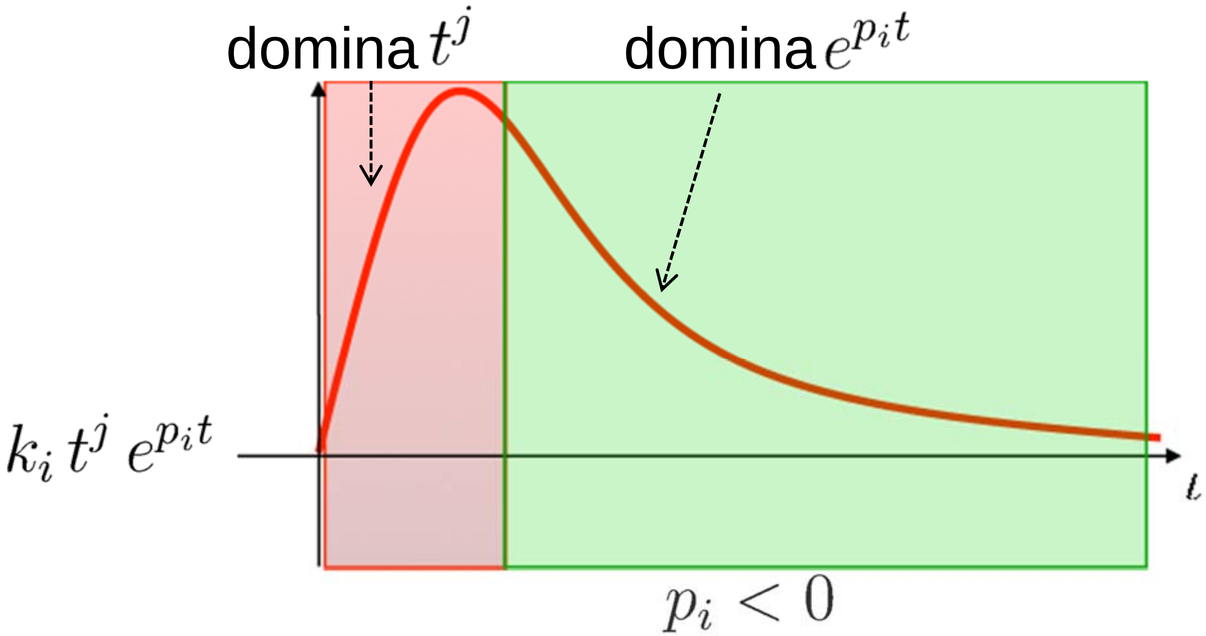


Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- Tabella riassuntiva:
  - **Poli nell'origine**

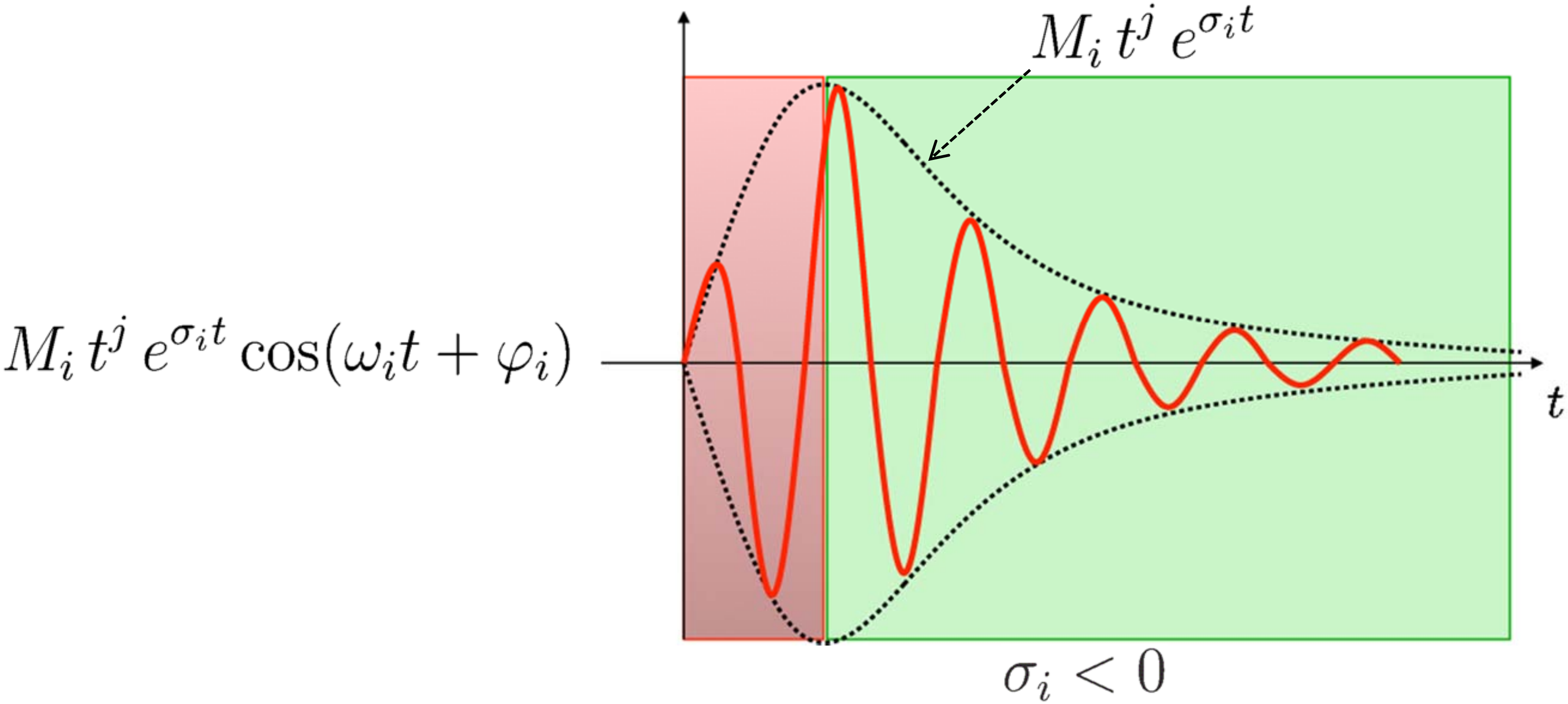


  - **Poli reali**



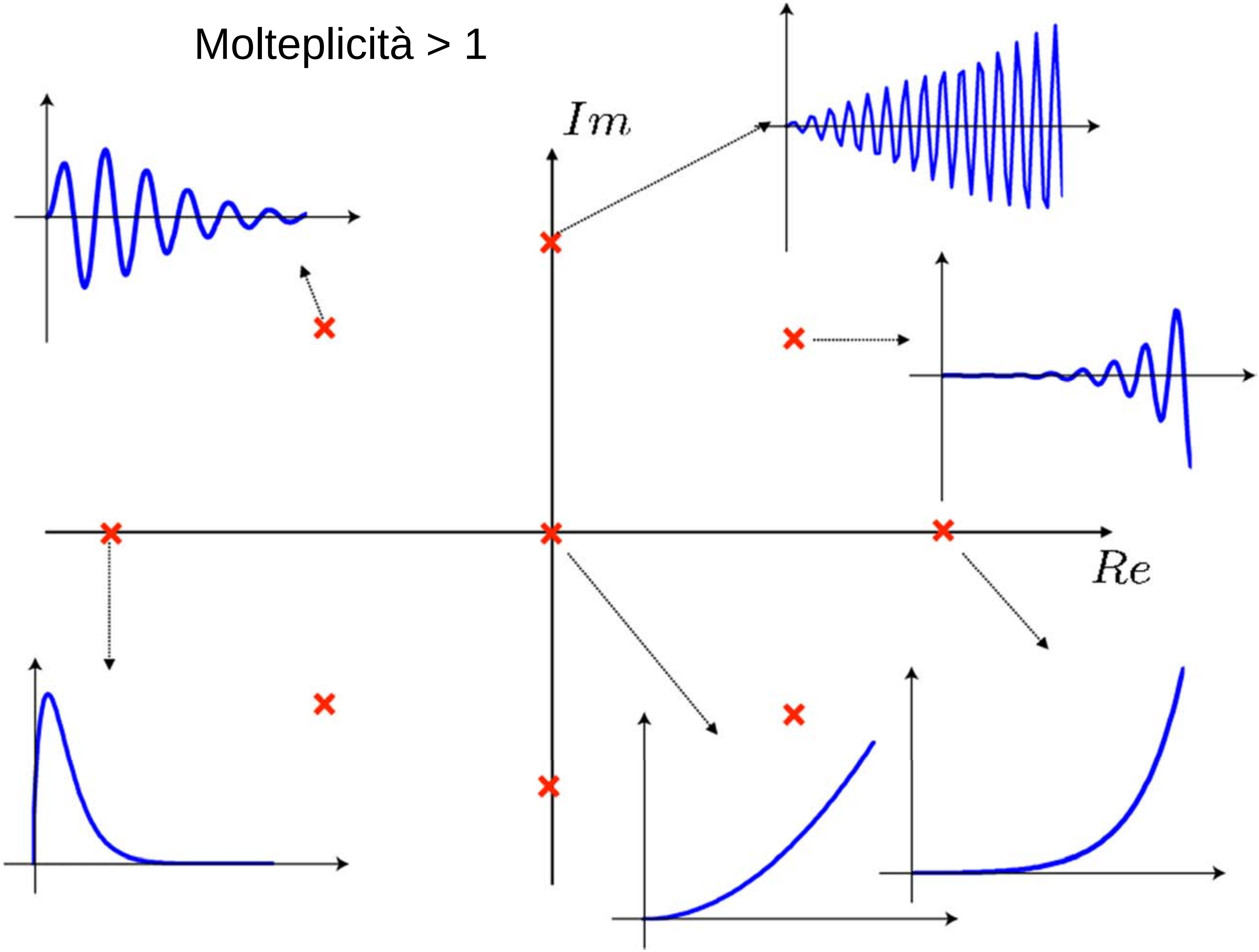
Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- Tabella riassuntiva:
  - **Poli complessi coniugati**



Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

Molteplicità > 1



Antitrasformate di Laplace

Qualche considerazione:

- L'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte si effettua con operazioni completamente di routine: l'unica difficoltà può essere il calcolo numerico dei poli (se il polinomio a denominatore è di grado superiore a due o a tre non si può effettuare in modo semplice). In questi casi è inevitabile ricorrere a procedimenti iterativi per la determinazione delle radici delle equazioni polinomiali.

- Il comportamento dell'antitrasformata per t >0 è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario.

  Infatti si è mostrato che l'antitrasformata di una funzione razionale è costituita da una somma di termini dei tipi

A) $k_i, \; k_i e^{p_i t}, \; M_i \, e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ **poli semplici**

B) $k_i \, t^j, \; k_i t^j e^{p_i t}, \; M_i \, t^j \, e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ ***poli multipli***

Risposta di un sistema dinamico

- Dalla teoria appena sviluppata si ha che la risposta di un sistema dinamico a fronte di un ingresso e' sempre scomponibile nella somma di tre contributi:

$$Y(s) = G(s)\,X(s) + L(s, y_0)$$

$$Y(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{k_{1i}}{(s-p_i)^{r_i}}}_{1} + \underbrace{\sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{k_{2i}}{(s-p_i)^{r_i}}}_{2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{k_{3i}}{(s-p_i)^{r_i}}}_{3}$$

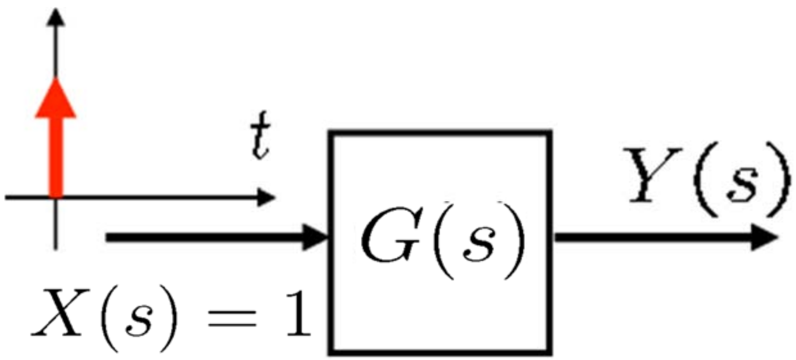
1. **Contributo dinamiche proprie del sistema** (il cui andamento è strutturalmente governato dai poli della funzione di trasferimento)
2. **Contributo ingresso** (il cui andamento è strutturalmente governato dalle radici del denominatore di $X(s)$)
3. **Contributo condizioni iniziali** (il cui andamento è strutturalmente governato dai poli della funzione di trasferimento)

Risposta di un sistema dinamico

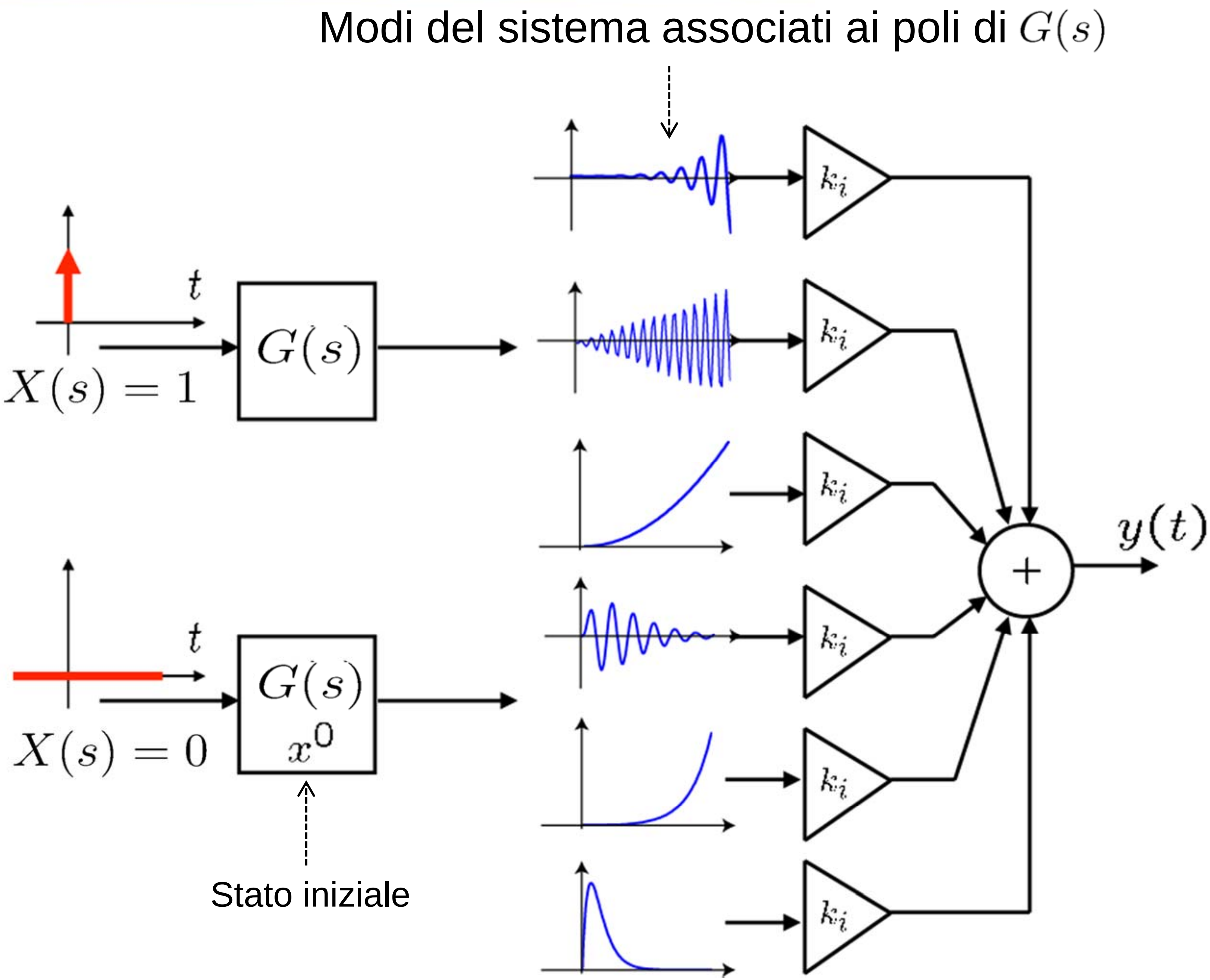
- I contributi (1) e (3) mettono in rilievo **dinamiche proprie del sistema**. Si parla in genere di **modi** del sistema dinamico per individuare gli andamenti temporali "elementari" associati ai poli della fdt. I modi sono quindi dinamiche proprie del sistema indipendenti dal particolare ingresso.

- La risposta libera di un sistema dinamico ad un qualunque stato iniziale è sempre scomponibile nella somma di modi elementari

- La risposta forzata di un sistema dinamico ad un ingresso impulsivo ($X(s) = 1$) è sempre scomponibile nella somma di modi elementari



Risposta di un sistema dinamico



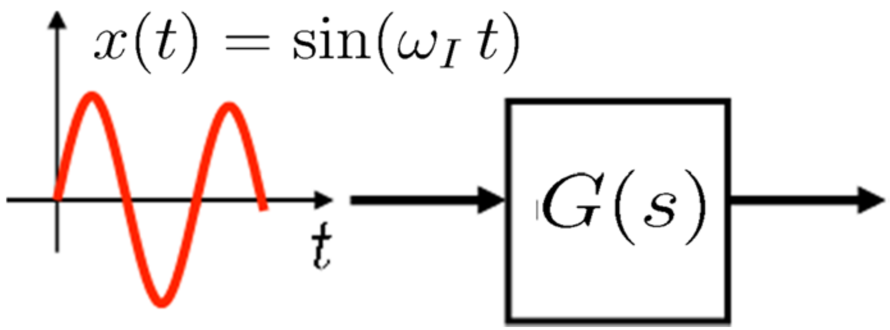
Effetto degli ingressi nella risposta forzata

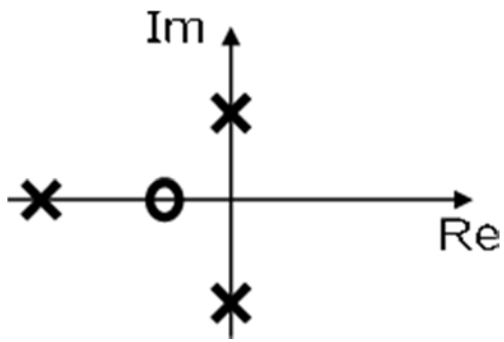
- Nello sviluppo in fratti semplici l’effetto dell’ingresso contribuisce con dei termini additivi (**modi dell’ingresso**) che si aggiungono ai modi naturali del sistema. Ci sono dei casi particolari, molto significativi, in cui la presenza dell’ingresso non si manifesta semplicemente con termini aggiuntivi ma

    - modifica le proprietà strutturali della risposta (**risonanza**)

    - non produce effetti sull’uscita (**proprietà bloccante degli zeri**)

Risonanza





$$X(s) = \frac{\omega_I}{s^2 + \omega_I^2}$$

$$G(s) = K\frac{(s+1)}{(s^2+\omega_S^2)(s+2)}$$

- Caso $\omega_I \neq \omega_S$

$$y(t) = \omega_I\, K\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)}{(s^2+\omega_S^2)(s+2)(s^2+\omega_I^2)}\right)$$

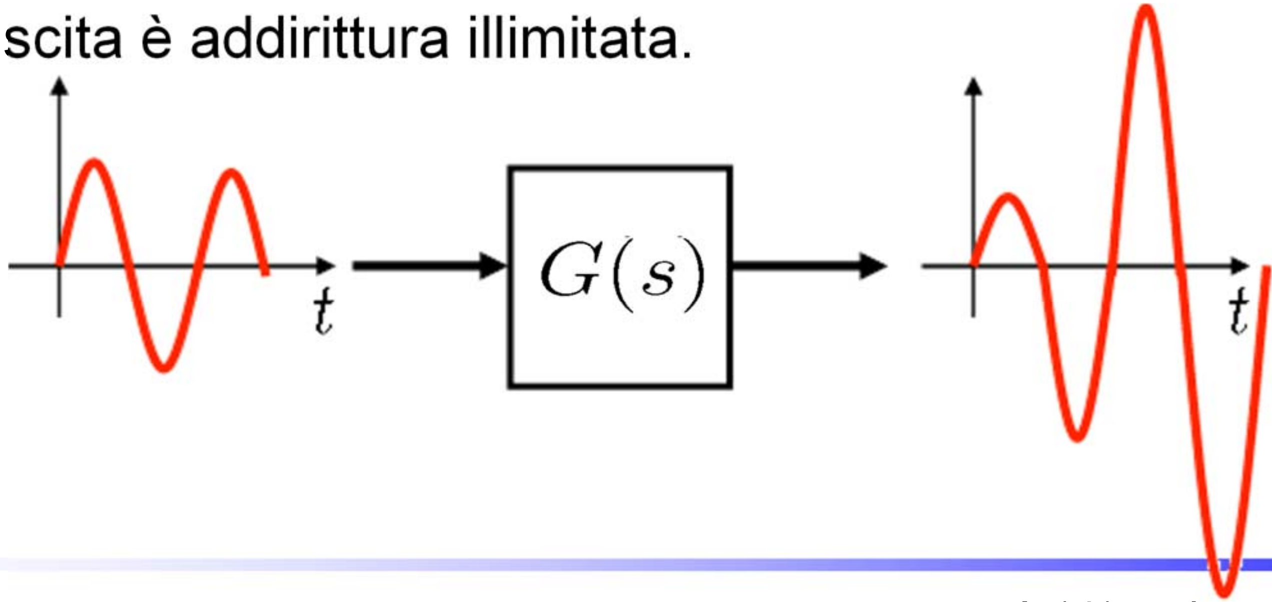
$$= \underbrace{k_0 e^{-2t} + k_1\cos(\omega_S t + \varphi_1)}_{\text{modi naturali}} + \underbrace{k_2\cos(\omega_I t + \varphi_2)}_{\text{effetto forzamento}}$$

Risonanza

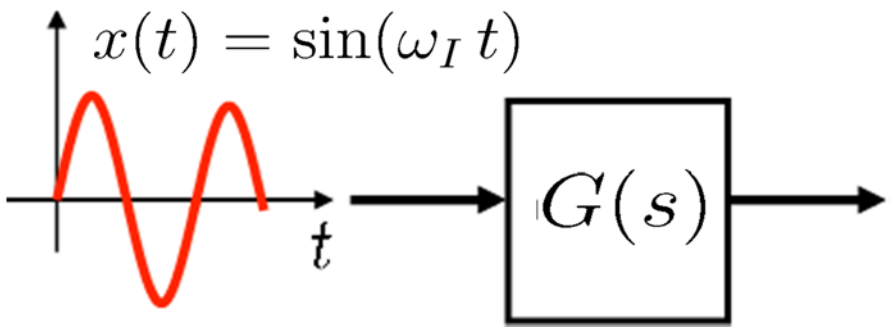
- Caso $\omega_I = \omega_S$ → **Poli a molteplicità 2**

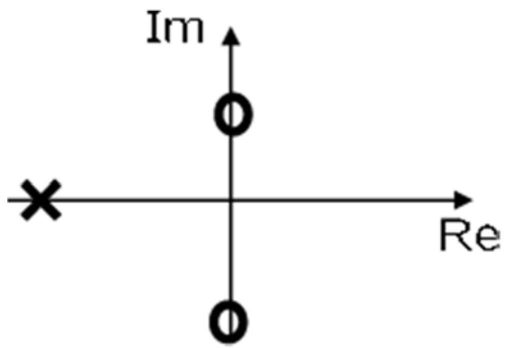
$$y(t) = \omega_I \, K \, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)}{(s^2+\omega_S^2)^2(s+2)}\right)$$
$$= k_0 e^{-2t} + k_1 \cos(\omega_S t + \varphi_1) + k_2 \, t \cos(\omega_S t + \varphi_2)$$

- Nel caso di corrispondenza tra modi del forzamento e modi del sistema la risposta forzata cambia strutturalmente (poli a molteplicità multipla). Nell'esempio appena presentato a fronte di un ingresso limitato l'uscita è addirittura illimitata.



Proprietà bloccante degli zeri





$$X(s) = \frac{\omega_I}{s^2 + \omega_I^2}$$

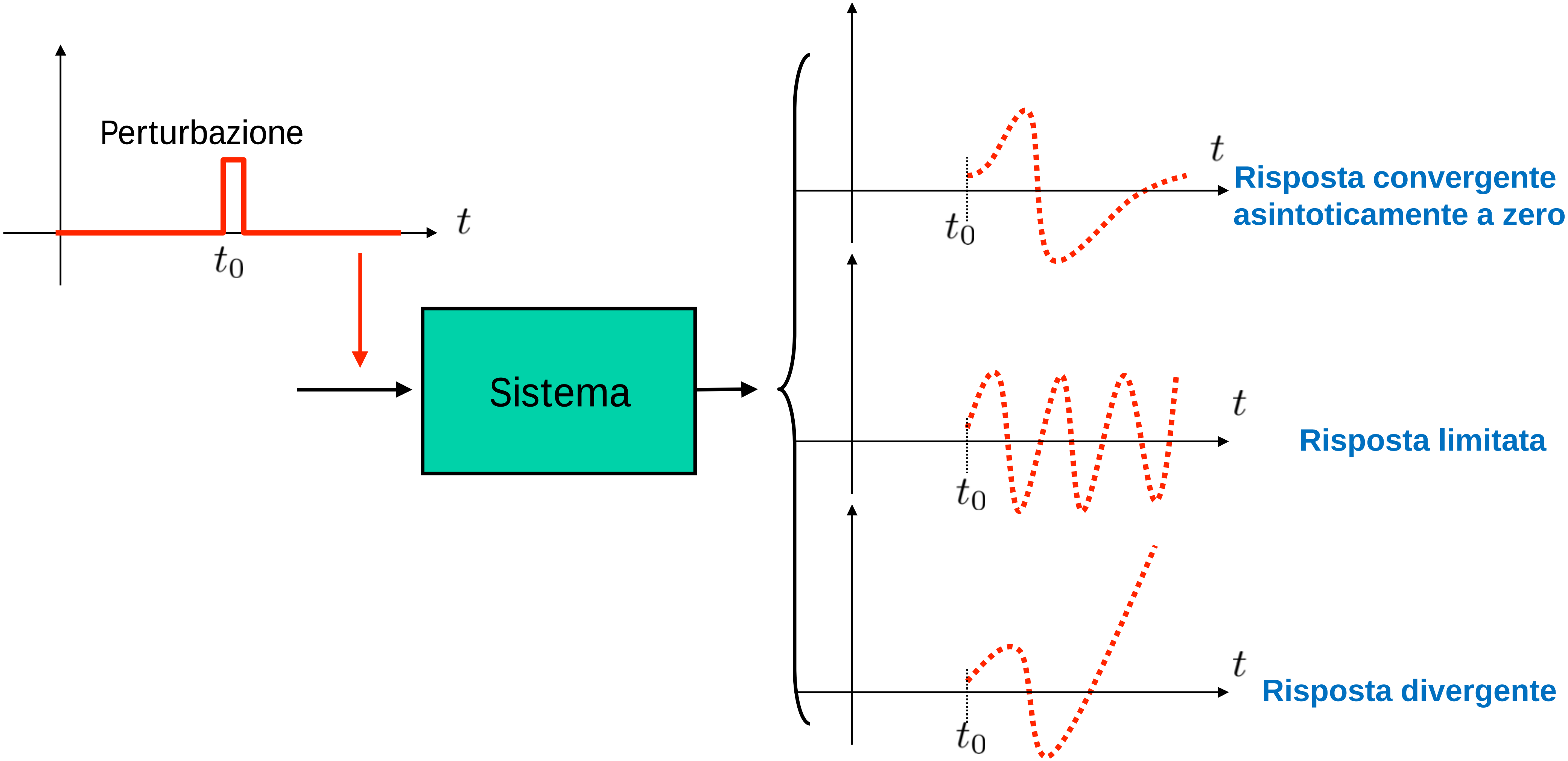
$$G(s) = K\frac{(s^2 + \omega_S^2)^2}{(s+2)^2}$$

- Caso $\omega_I \neq \omega_S$ $\qquad y(t) = k_0 e^{-2t} + k_1\, t e^{-2t} + k_2 \sin(\omega_I t + \varphi_1)$
- Caso $\omega_I = \omega_S$ $\qquad y(t) = k_0 e^{-2t} + k_1\, t e^{-2t}$

Modi forzanti che sono coincidenti con zeri della fdt, non hanno effetto sull'andamento asintotico dell'uscita

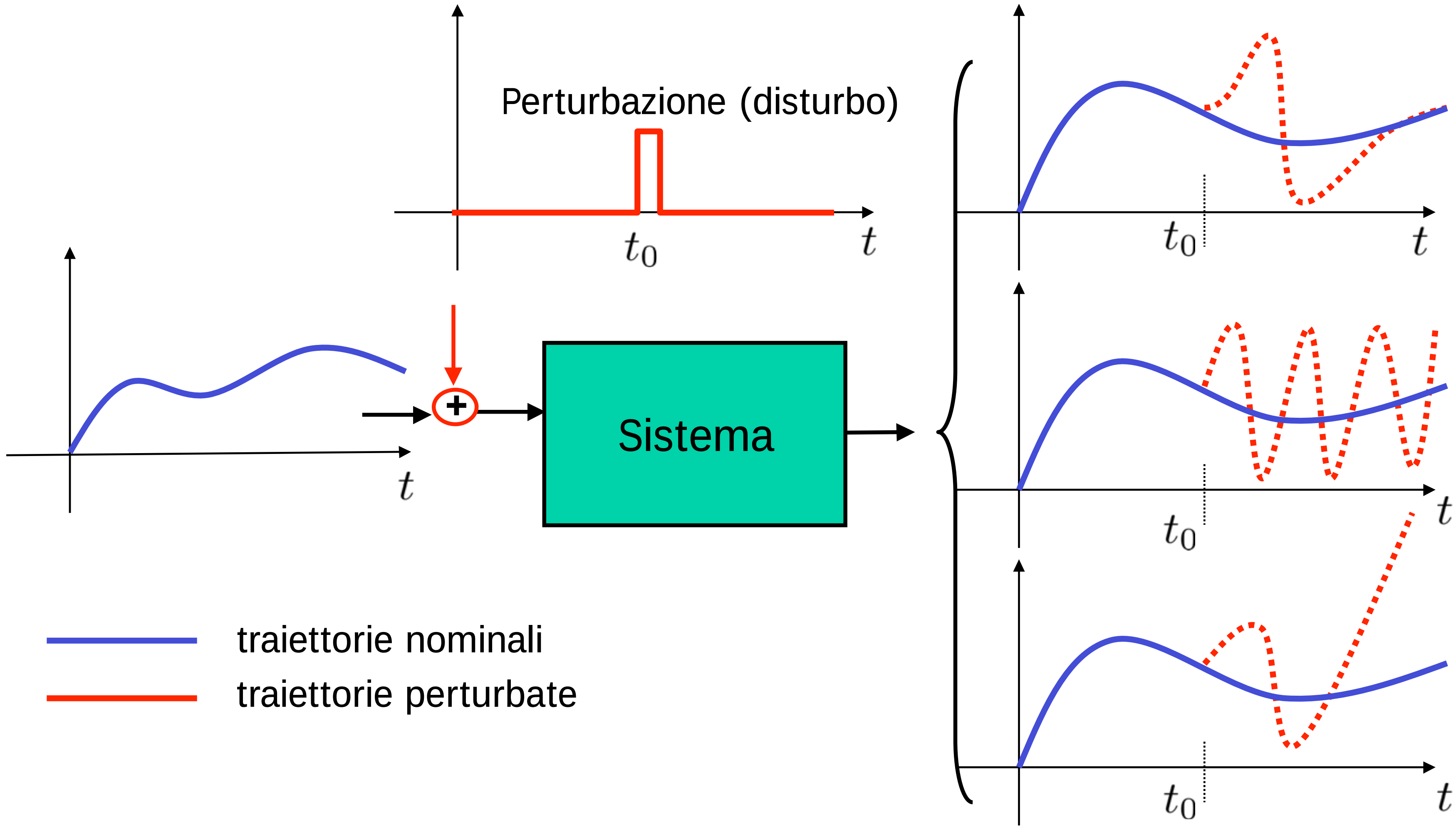
Stabilità (esterna)

- Nozione che cattura la proprietà di come l'uscita di sistema dinamico reagisce a fronte di "perturbazioni" sull'ingresso



Stabilità (esterna)

- Dalla proprietà di sovrapposizione degli effetti (sistemi lineari) si può pensare anche in termini di perturbazione di un moto nominale



Stabilità (esterna)

- La stabilità esterna si riduce ad analizzare la risposta di un sistema a fronte di un ingresso impulsivo

- Dalle regole di antitrasformazione è quindi facile mettere in relazione la stabilità esterna di un sistema con il segno della parte reale dei poli della funzione di trasferimento

- il sistema lineare con fdt $G(s)$ è esternamente
  - **Asintoticamente stabile** se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa
  - **Semplicemente stabile** se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale non positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità singola
  - **Instabile** se esiste almeno un polo a parte reale positiva o a parte reale nulla e molteplicità maggiore di 1.

Stabilità BIBO

- Sempre dalle proprietà di antitrasformazione di Laplace e in particolare dallo sviluppo in fratti semplici, è semplice dedurre che ogni sistema esternamente asintoticamente stabile risponde con uscite limitate a fronte di ingressi limitati non necessariamente impulsivi (stabilità **BIBO – Bounded Input Bounded Output**).

- Tale proprietà non è garantita nel caso di stabilità esterna semplice (risonanza tra ingresso e polo della fdt).

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

ANTITRAFORMATE DI LAPLACE
MODI DI UN SISTEMA
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti