CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

TRASFORMATE DI LAPLACE

Ing. Luigi Biagiotti
e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it
http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Trasformate di Laplace

- Gli esempi visti di sistemi dinamici hanno mostrato che la loro evoluzione nel tempo può essere rappresentata da modelli matematici lineari stazionari del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

→ equazioni differenziali lineari ordinarie di ordine n.

- Per lo studio di tali sistemi, è quindi necessario essere in grado di risolvere una equazione di questo tipo, cioè di sapere calcolare una funzione y(t) che la verifica.

- E' indispensabile quindi la conoscenza delle proprietà e dei procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali lineari, in particolare delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti.

PROCEDIMENTO "DIFFICILE"

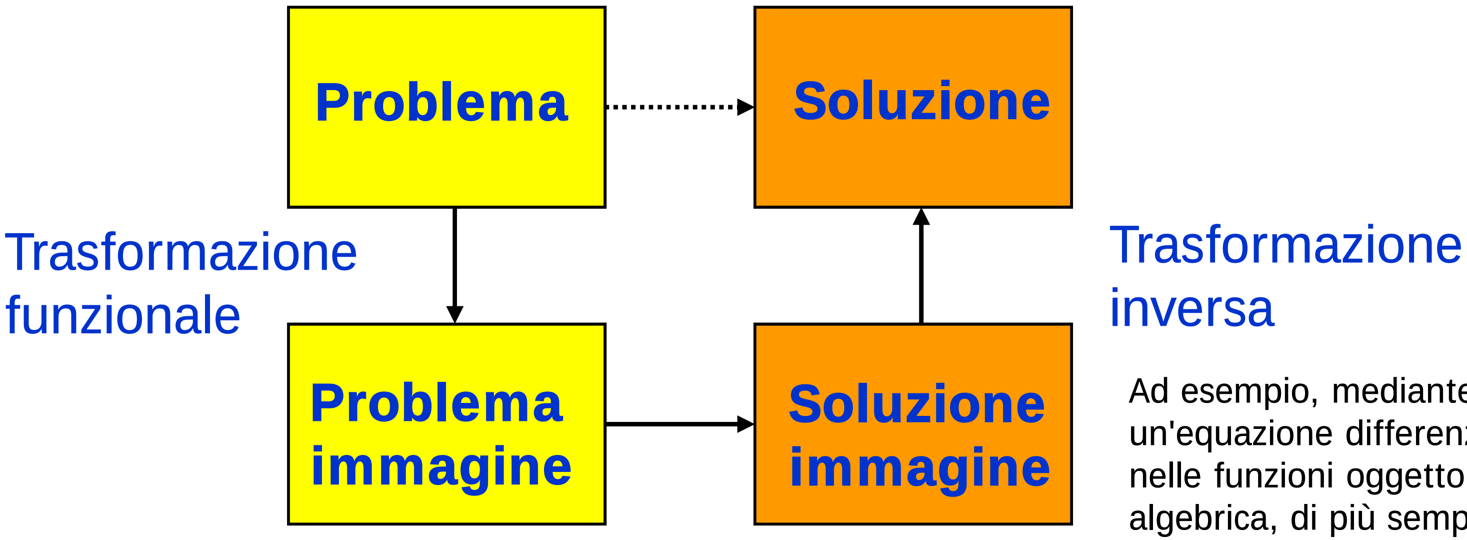
Trasformate di Laplace

- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, cioè le trasformazioni che associano funzioni a funzioni, in particolare la *trasformazione di Laplace*.

- Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine* di diversa natura.

- Operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e al *problema oggetto* viene ad essere associato un problema immagine di più facile soluzione.

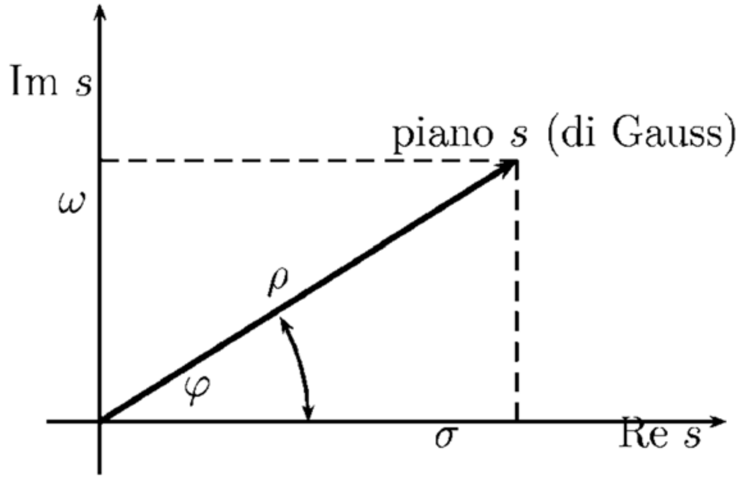
- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione* o *trasformazione inversa.*



Ad esempio, mediante la trasformazione di Laplace un'equazione differenziale o integro-differenziale nelle funzioni oggetto si trasforma in un'equazione algebrica, di più semplice soluzione, nelle funzioni immagine.

Funzioni di variabili complesse

- Nello studio delle trasformate di Laplace, si utilizzano variabili $s \in \mathbb{C}$.
- I numeri complessi si possono rappresentare come punti di un piano (piano di Gauss), i cui assi coordinati si dicono asse reale ed asse immaginario.



- Un numero complesso s si può esprimere come:

$$\begin{cases} s = \sigma + j\,\omega\,, & \text{forma cartesiana} \\ s = \rho\, e^{j\varphi}\,, & \text{forma polare} \end{cases}$$

Funzioni di variabili complesse

- Nella forma cartesiana:
  - σ è la parte reale: $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$
  - ω è la parte immaginaria: $\omega = \mathrm{Im}\{s\}$

- Nella forma polare:
  - ρ è il modulo: $\rho = |s|$
  - φ è l'argomento: $\varphi = \arg\{s\}$

- Dalla relazione

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

si deducono le seguenti formule per il passaggio dalla forma polare alla forma cartesiana e viceversa

$$\sigma = \rho\,\cos\varphi\,, \qquad \omega = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

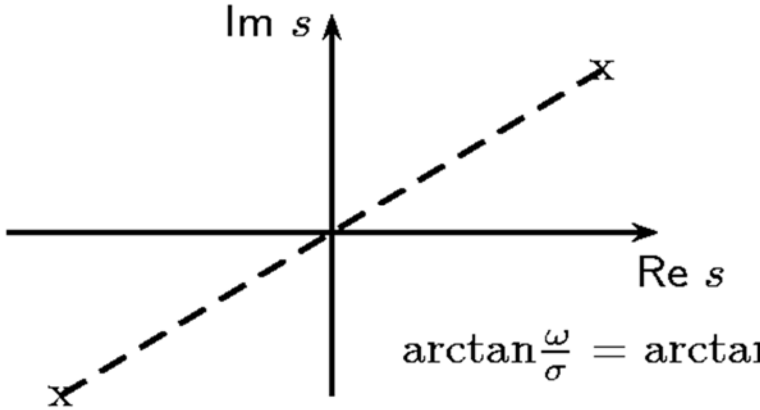
$$\rho = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}\,, \qquad \varphi = \arctan\frac{\omega}{\sigma} = \mathrm{arcsen}\,\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

Funzioni di variabili complesse

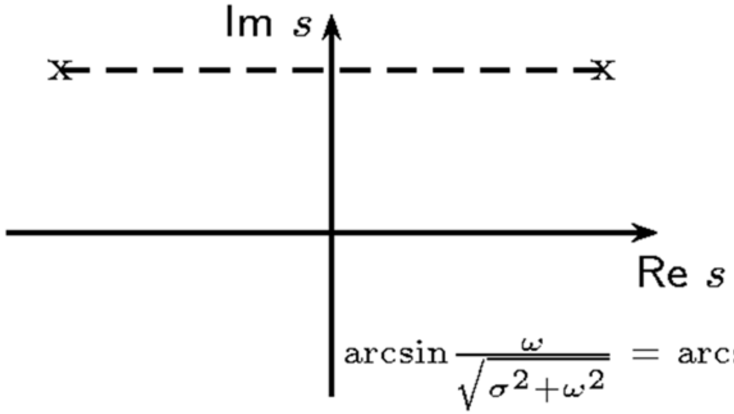
- Delle due funzioni che legano l'argomento alle parti reale e immaginaria, la seconda è la più conveniente quando $\sigma \to 0$, cioè per valori di $\tan\varphi \to \infty$.

- Comunque, esse sono entrambe inesatte perché le funzioni trigonometriche sono biunivoche (invertibili) solo in opportuni intervalli di misura π, mentre la conoscenza di σ e ω consente di determinare univocamente il valore di nell'intero intervallo, lungo 2π, corrispondente al valore principale.

- L'uso della prima espressione per il calcolo dell'argomento non consente di distinguere, nella forma polare, fra un numero complesso e il suo opposto di segno, mentre l'uso della seconda non consente di distinguere fra un numero complesso e il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario.



$$\arctan\frac{\omega}{\sigma} = \arctan\frac{-\omega}{-\sigma}$$



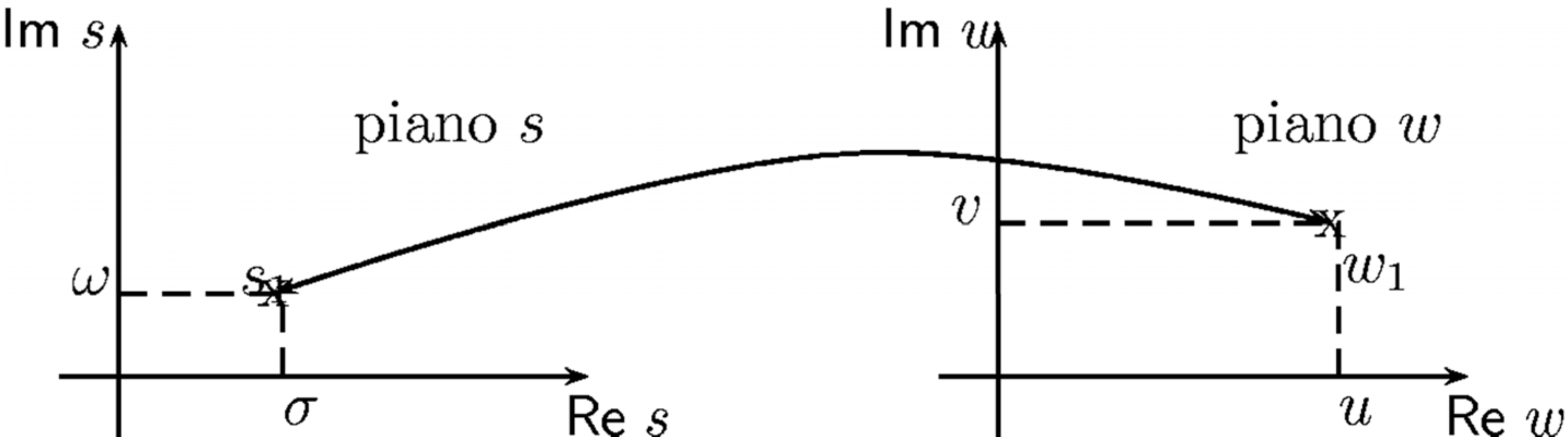
$$\arcsin\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}} = \arcsin\frac{\omega}{\sqrt{(-\sigma)^2+\omega^2}}$$

Funzioni di variabili complesse

- Una funzione di variabile complessa

$$w = f(s) = u(\sigma, \omega) + j\, v(\sigma, \omega)$$

viene assegnata specificando le due funzioni di variabile reale $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$, che ne rappresentano la parte reale (u) e la parte immaginaria (v), e stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti di due piani: il piano di Gauss della variabile indipendente s e quello della variabile dipendente w.



Corrispondenza stabilita da una funzione di variabile complessa $w_1 = f(s_1)$

Trasformate di Laplace

- La trasformazione di Laplace associa ***in modo biunivoco*** a una generica funzione del tempo f(t) a valori reali o complessi una funzione F(s) a valori in genere complessi e definita per valori di s pure complessi.

$$f(t) \iff F(s) \qquad \begin{cases} s \in \mathbb{C} \\ F(s) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

- Si usa la notazione $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$,

  che ha il significato: “F(s) è la *trasformata di Laplace* di f(t)”.

- Per la biunivocità della corrispondenza, si può scrivere

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

  con il significato: “f(t) è l’*antitrasformata di Laplace* di F(s)”

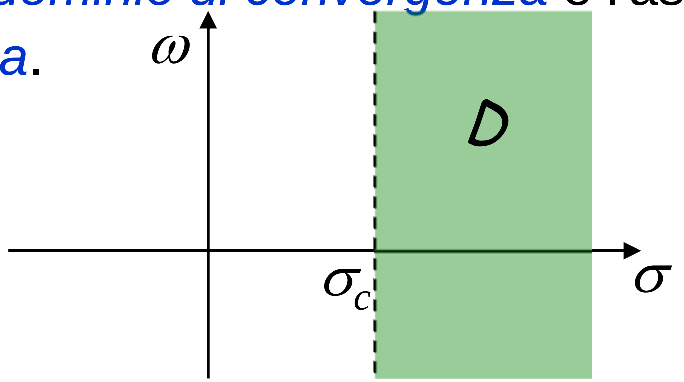
Trasformate di Laplace

- La trasformata e l'antitrasformata di Laplace sono definite dalle relazioni

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

- Le condizioni sotto le quali una data funzione *f(t)* è trasformabile secondo Laplace sono abbastanza estensive: in pratica risultano soddisfatte da qualunque funzione del tempo che rivesta interesse nell'ambito dell'analisi dei sistemi.
- La trasformata è pertanto definita in un dominio del piano s avente come contorno una retta parallela all'asse immaginario, che può non appartenere al dominio. Esso si dice *dominio di convergenza* e l'ascissa σ_c di tale retta *ascissa di convergenza*.



Proprietà delle trasformate

- Linearità

  Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}\left[c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\right] = c_1\, F_1(s) + c_2\, F_2(s)$$

- In corrispondenza di valori coniugati della variabile complessa s una generica trasformata di Laplace $F(s)$ assume valori coniugati, cioè vale la relazione

$$F(s^*) = F^*(s)$$

- Messa in scala

$$f(at) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Proprietà delle trasformate

- Traslazione nel tempo

$$u_G(t-t_0)\ f(t-t_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\left(s\right)e^{-st_0}$$

- Traslazione nella frequenza

$$f(t)e^{s_0 t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\left(s-s_0\right)$$

- Convoluzione nel tempo

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_1(s)\ F_2(s)$$

  - determinazione dell'evoluzione *y(t)* dell'uscita di un sistema senza il calcolo dell'integrale di convoluzione
  - analisi di sistemi complessi (lineari e stazionari) ottenuti come interconnessione di sistemi più semplici (lineari e stazionari)

Proprietà delle trasformate

- Convoluzione nella frequenza

$$F_1(s) * F_2(s) = \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F_1(\lambda) F_2(s-\lambda) d\lambda$$

questo integrale esiste $\forall\ s :$ Re$\{s\} \geq \sigma_0 + \sigma_2$. Si ha

$$f_1(t) f_2(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

- Derivazione

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Longleftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - s^{n-3} f^{(2)}(0^-) - \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$$

si noti che se le condizioni iniziali (per $t = 0^-$) di $f(t)$ e delle sue derivate sono nulle, allora

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^n F(s)$$

Proprietà delle trasformate

- Integrazione

$$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{F(s)}{s}$$

- Teorema del valore iniziale

$$f(0^+) \qquad = \qquad \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

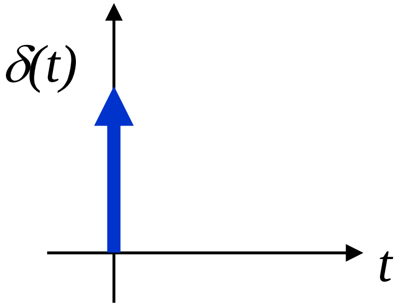
- Teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \qquad = \qquad \lim_{s\to 0} sF(s)$$

N.B.: $sF(s)$ non deve avere poli a parte reale ≥ 0 (stabilità)!

Trasformate di Laplace

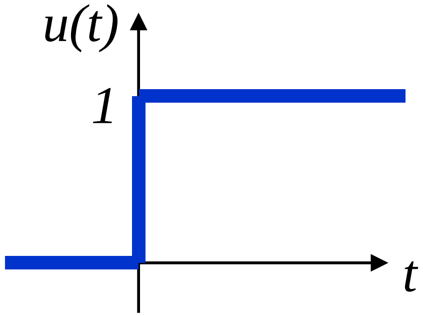
Impulso



$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

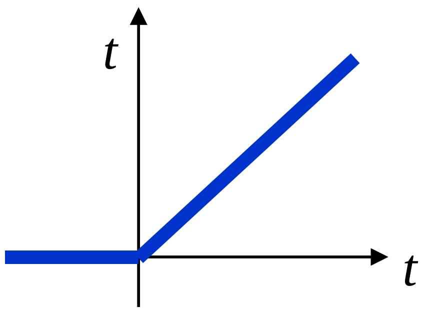
Gradino unitario



$$f(t) = u(t) = 1, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s}\left\{ e^{-st}\Big|_{t=\infty} - e^{-st}\Big|_{t=0} \right\} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Rampa unitaria

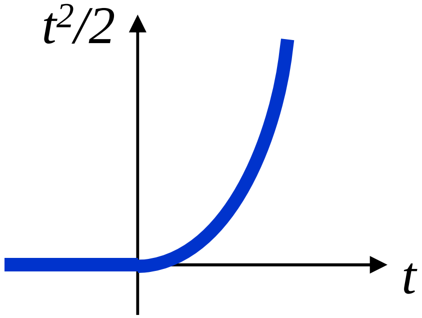


$$f(t) = t, \quad t > 0$$

$$F(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

Trasformate di Laplace

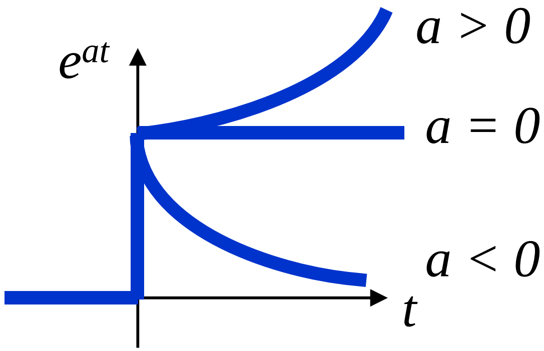
Parabola unitaria



$$f(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[t^2/2\right] = \int_0^\infty \frac{t^2}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{s^3}$$

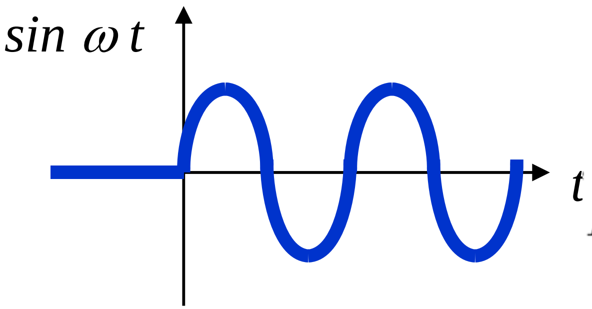
Esponenziale



$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

Sinusoide

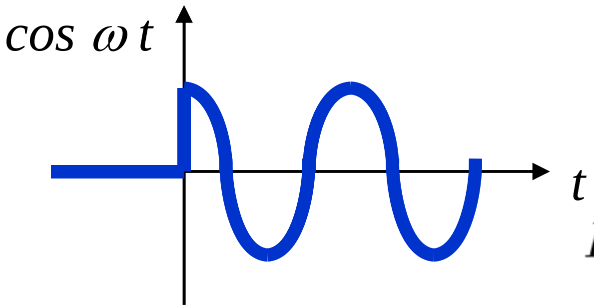


$$f(t) = \sin \omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\sin \omega t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Trasformate di Laplace

Cosinusoide



$$f(t) = \cos\omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos\omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- La quasi totalità delle trasformate di Laplace di uso più corrente nell'analisi dei sistemi lineari si può dedurre dalla relazione fondamentale

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

dove

- ***n*** è un generico numero intero positivo
- ***a*** è una costante reale o complessa

- Viene sottinteso che l'espressione della funzione di cui si considera la trasformata sia relativa a valori del tempo non negativi e che per valori del tempo negativi la funzione stessa sia identicamente nulla: di conseguenza può essere presente una discontinuità nell'istante t = 0.

Trasformate di Laplace - Esempi

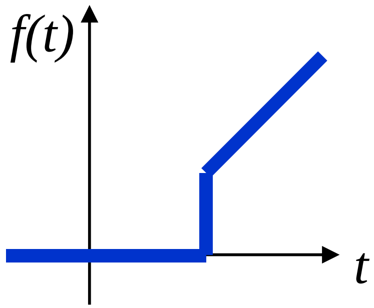
1) Si consideri la funzione

$$f(t) = 5te^{-2t} + 7e^{-3t}\cos 4t, \qquad t >= 0$$

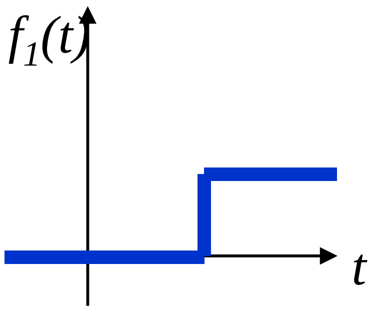
Ricordando la proprietà di linearità, e utilizzando le tabelle, è immediato ottenere

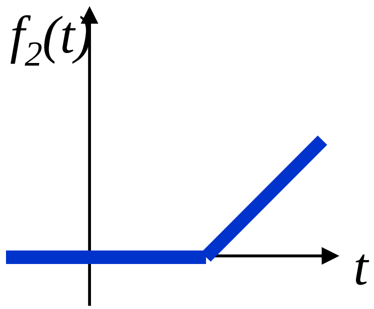
$$F(s) = \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{7(s+3)}{(s+3)^2+16}$$

2) Sia dato il segnale di figura



Il segnale può essere pensato come somma di un gradino ritardato e di una rampa (ritardati di 5 sec)





$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = u(t-5) + [u(t-5)](t-5)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_2(s) = \frac{e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-5s}}{s^2} = e^{5s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^{-5s}\left(\frac{s+1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Traformate di Laplace con MATLAB

- Con i comandi

```
>> syms s t
>> x1_t = 5*t*exp(-2*t)+7*exp(-3*t)*cos(4*t);
>> X1_s = laplace(x1_t,t,s);
>> pretty(X1_s)
```

MATLAB fornisce

```
     7 (s + 3)          5
-------------- + --------
          2             2
(s + 3)  + 16   (s + 2)
```

- I comandi

```
>> x2_t = heaviside(t-5)+heaviside(t-5)*(t-5);
>> X2_s = laplace(x2_t,t,s);
>> pretty(X2_s)
```

producono

```
     1              1
---------- + -----------
s exp(5 s)     2
              s  exp(5 s)
```

Funzione di trasferimento

- Un modello matematico di un sistema dinamico lineare e stazionario può essere espresso mediante una equazione differenziale del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

- Dato un segnale f(t), la trasformata di Laplace per la sua generica derivata i-esima è data da

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i f(t)}{dt^i}\right] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left.\frac{d^{i-j-1} f(t)}{d\,t^{i-j-1}}\right|_{t=0^-}$$

- Si prende in esame la trasformazione dell'equazione differenziale, riscritta come

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

Funzione di trasferimento

- Trasformando (teorema delle derivate) si ottiene

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i\,y(t)}{dt^i}\right] \;=\; s^i\,Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j\,\frac{d^{i-j-1}\,y(t)}{dt^{i-j-1}}\bigg|_{t=0^-}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i\,x(t)}{dt^i}\right] \;=\; s^i\,X(s) - \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} s^j\,\frac{d^{i-j-1}\,x(t)}{dt^{i-j-1}}\bigg|_{t=0^-}}_{=0,\quad x(t)=0,\quad t<0}$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,s^i\,Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i\,s^i\,X(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j\,\frac{d^{i-j-1}\,y(t)}{dt^{i-j-1}}\bigg|_{t=0^-}$$

Funzione di trasferimento

- Da questa risulta che la trasformata di Laplace $Y(s)$ della soluzione dell'equazione differenziale è data dalla somma delle due funzioni

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s)$$

con

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} y(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0^-} \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i \right) X(s)$$

che si possono riconoscere come le trasformate dell'*evoluzione libera* e dell'*evoluzione forzata*.

Funzione di trasferimento

- Si è ottenuta la relazione

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s)$$

dove

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left.\frac{d^{i-j-1}y(t)}{dt^{i-j-1}}\right|_{t=0^-} \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i \right) X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left.\frac{d^{i-j-1}y(t)}{dt^{i-j-1}}\right|_{t=0^-}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} + \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} \right) X(s)$$

Funzione di trasferimento

- Spesso nell'ambito dei controlli automatici si fa riferimento a sistemi *inizialmente in quiete*, cioè con tutte le condizioni iniziali nulle.

$$\Rightarrow \qquad Y_0(s) \equiv 0$$

- La trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando quella del segnale di ingresso per la "funzione di trasferimento" del sistema

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}$$

- La *funzione di trasferimento* di un sistema è una funzione G(s) della variabile s, moltiplicando la quale per la trasformata di Laplace X(s) della funzione di ingresso si ottiene la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata

$$Y_1(s) = G(s)X(s)$$

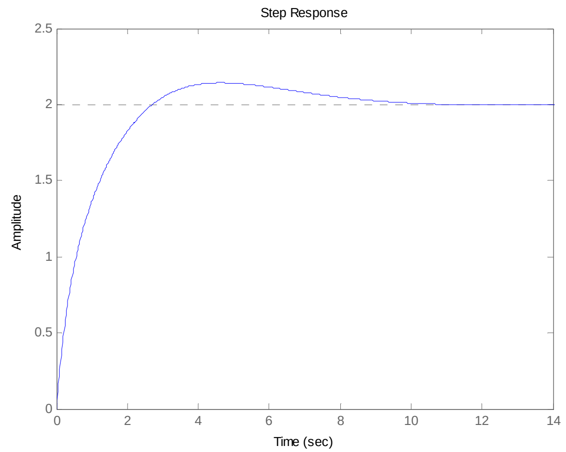
$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Definizione di una funzione di trasferimento con MATLAB

- I comandi

```
>> s=tf('s');
>> G = (3*s^2+5*s+2)/(s^3+4*s^2+3*s+1)
```

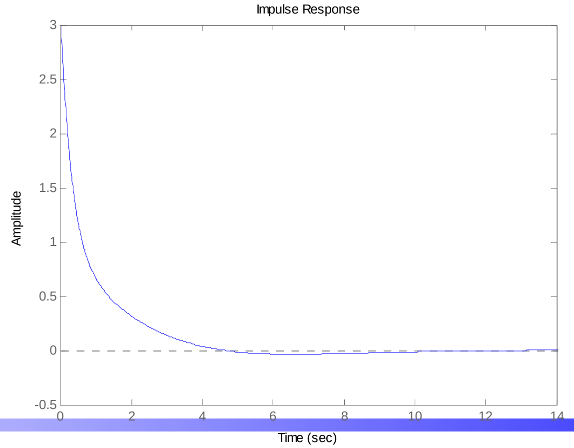
consentono di definire la f. di t. $G(s) = \dfrac{3s^2+5s+2}{s^3+4s^2+3s+1}$



- Il comando

```
>> step(G)
```

mostra la risposta al gradino

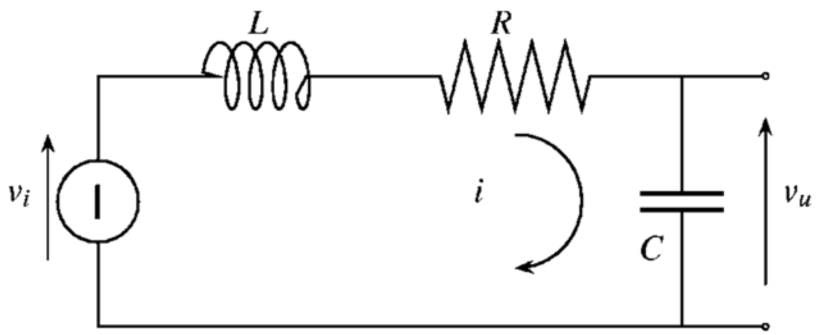


- Il comando

```
>> impulse(G)
```

mostra la risposta all'impulso

Funzione di trasferimento - Esempio



- Per questo circuito, si può scrivere l'equazione (legge di Kirhhoff):

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\ &= L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) \quad \overset{i(t)=C\frac{dv_u(t)}{dt}}{\Longrightarrow} \quad v_i(t) = LC\frac{d^2v_u(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_u(t)}{dt} + v_u(t)$$

Funzione di trasferimento - Esempio

- Si considerano le condizioni iniziali

$$i(0^-) = i_0\,, \qquad\qquad v_u(0^-) = e_0$$

e si applica all'ingresso un gradino di tensione di ampiezza V_0. Trasformando ambo i membri, si ottiene

$$V_i(s) = LC\left(s^2 V_u(s) - s\,v_u(0^-) - v_u'(0^-)\right) + RC\left(s\,V_u(s) - v_u(0^-)\right) + V_u(s)$$

- Notando che è

$$v_u(0^-) = e_0\,, \quad v_u'(0^-) = \frac{1}{C}\,i_0$$

si deduce poi

$$V_u(s) = \frac{1}{LC\,s^2 + RC\,s + 1}\,V_i(s) + \frac{L\,i_0 + LC\,s\,e_0 + RC\,e_0}{LC\,s^2 + RC\,s + 1}$$

Nel caso in esame

$$V_i(s) = \frac{V_0}{s}$$

Funzione di trasferimento - Esempio

- Per la soluzione completa dell'equazione differenziale occorre naturalmente antitrasformare l'espressione ottenuta.

- In questo caso, l'antitrasformazione non presenta alcuna difficoltà: ciascuno dei due termini a secondo membro è un rapporto di polinomi in s, facilmente antitrasformabile con il procedimento che verrà descritto in seguito.

- Da

$$V_u(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s) + \frac{Li_0 + LCs\,e_0 + RC\,e_0}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- considerando nulle le condizioni iniziali $i_0 = 0$ $e_0 = 0$

- si ottiene

$$V_u(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

- e si può notare che la funzione di trasferimento di questo sistema è data da

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad V_u(s) = G(s)V_i(s)$$

Dalla rappresentazione nello spazio degli stati alla funzione di trasferimento

- Dato un sistema lineare tempo-invariante descritto nello spazio degli stati da

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

- Trasformando con Laplace (e considerando condizioni iniziali nulle) si ottiene

$$sX(s) = A\,X(s) + B\,U(s) \qquad (1)$$
$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \qquad (2)$$

e quindi da (1) si ricava la relazione tra U(s) e X(s)

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1} B\,U(s)$$

che sostituita in (2) fornisce la relazione ingresso-uscita

$$Y(s) = [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s)$$

da cui

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI_n - A)^{-1}B + D]$$

Dalla rappresentazione nello spazio degli stati alla funzione di trasferimento con MATLAB

- Volendo ricavare la funzione di trasferimento (o meglio la matrice di trasferimento) del motore in corrente continua, di cui è stato trovato il modello nello spazio degli stati, si può procedere con matlab nel seguente modo

```
>> syms s R L k J b
>> A = [-R/L -k/L; k/J -b/J];
>> B = [1/L 0; 0 -1/J];          <------ Definizione simbolica delle
>> C = [0 1];                            matrici del modello
>> G = C*inv(s*eye(2)-A)*B      <------ Calcolo della G(s)
G =

[ k/(R*b + k^2 + J*R*s + L*b*s + J*L*s^2),
-(R + L*s)/(R*b + k^2 + J*R*s + L*b*s + J*L*s^2)]
```

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

Trasformate di Laplace
FINE

Ing. Luigi Biagiotti
e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it
http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti