

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Ho seguito il corso con Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 febbraio 2020 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

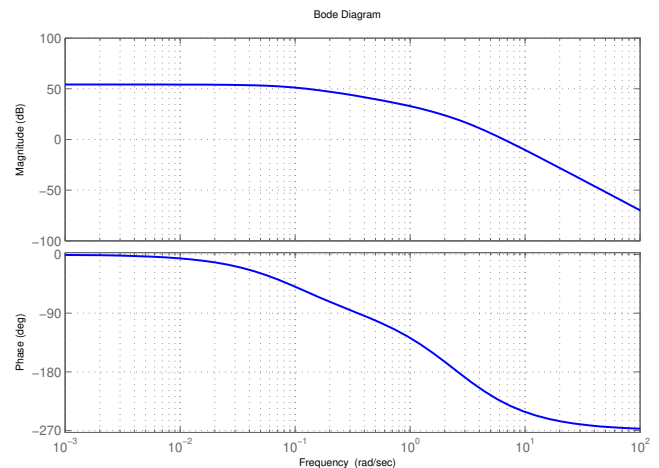
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. L' influenza sull'uscita di variazioni parametriche di un sistema $G(s)$ può essere diminuita utilizzando un solo controllore ad azione in avanti?

- No, mai
 Sì, ma solo se il sistema è stabile
 Sì, sempre

2. Dato il sistema retroazionato, di cui in figura sono riportati i diagrammi di bode della funzione di anello $L(s)$, il margine di fase risulta:

- $M_f \approx 80^\circ$
 $M_f \approx 50^\circ$
 $M_f \approx -50^\circ$
 $M_f \approx -80^\circ$



3. Dato un sistema in retroazione unitaria negativa stabile con funzione di anello $L(s)$, per garantire errore a regime nullo a fronte di un disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, è necessario che:

- $|1 + L(j\bar{\omega})| = 0$
 $|L(j\bar{\omega})| = 0$
 $|L(j\bar{\omega})| = 1$
 $|L(j\bar{\omega})| = \infty$

4. Lo spettro di un segnale tempo-continuo:

- può essere calcolato mediante la trasformata di Fourier
 può essere calcolato mediante la trasformata di Laplace
 è una rappresentazione del segnale nel dominio della frequenza
 può essere definito solo per segnali periodici

5. Una rete anticipatrice:

- ha come effetto utile l'attenuazione ad alta frequenza
 ha la costante di tempo dello zero più bassa di quella del polo
 ha un andamento passa-alto
 introduce un anticipo di fase che ha un valore massimo dipendente solo da α

6. Il tuning in anello aperto di un regolatore PID per un impianto $G(s)$:
- si basa su una stima del margine di ampiezza M_a e della pulsazione critica ω_f ($\arg\{G(j\omega_f)\} = -\pi$) di $G(s)$
 - si basa su una stima del tempo di ritardo T , della costante di tempo τ e del guadagno μ di $G(s)$
 - può essere applicato anche a impianti instabili
 - può essere realizzato solo se $G(s)$ ha grado relativo almeno pari a 3
7. Dato un impianto da controllare, se le specifiche richiedono una larghezza di banda per il sistema controllato pari a $\omega_b = 20$ rad/sec ma è presente un disturbo di misura a $\omega_n \approx 5$ rad/sec:
- oltre al regolatore in retroazione occorre un filtro passa-basso sul ramo (di retroazione) su cui agisce il disturbo
 - non è possibile trovare nessun regolatore in grado di soddisfare le specifiche
 - oltre al regolatore in retroazione occorre una compensazione in avanti del riferimento
 - oltre al regolatore in retroazione occorre un compensatore del disturbo
8. Dato un sistema di controllo digitale affetto da un rumore di misura alla pulsazione di $\omega_n = 600$ rad/s, per evitare il fenomeno dell'aliasing è sufficiente assumere una pulsazione di campionamento
- $\omega_s \geq 6000$ rad/s
 - $\omega_s \geq 1200$ rad/s
 - $\omega_s \geq 600$ rad/s
 - $\omega_s \geq 300$ rad/s
9. Il ricostruttore di ordine zero:
- rappresenta la conversione tra segnale tempo-continuo e sequenza di campioni
 - può essere modellato con la funzione di trasferimento $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$
 - rappresenta la conversione tra sequenza di campioni e segnale tempo-continuo
 - può essere approssimato con la funzione di trasferimento $\frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$
10. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:
- la velocità massima si riduce di un fattore 2
 - la variazione della velocità massima dipende dalla tipologia di traiettoria considerata
 - la velocità massima aumenta di un fattore 4
 - la velocità massima aumenta di un fattore 2

Cognome: _____

Nome: _____

N. Matr.: Ho seguito il corso con Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 febbraio 2020 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Errori parametrici e di modello dell'impianto nel controllo in retroazione/catena aperta: descrivere problematiche ed eventuali metodi di compensazione.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{40s + 800}{s^3 + 12.4s^2 + 28s + 40} = 40 \frac{(s + 20)}{(s^2 + 2.4s + 4)(s + 10)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa) $e_v \leq 4\%$;
- attenuazione di almeno 200 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione $\omega_d = 0.1 \text{ rad/s}$;

e dinamiche:

- sorpasso percentuale $S \leq 25\%$;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione $\omega_n = 200 \text{ rad/s}$;
- minimo tempo di assestamento compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate sopra.
- b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.
- d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione
 - la banda del sistema in anello chiuso
 - il disturbo di misura, al fine di prevenire l'aliasing
 - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 10°

Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

- e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$.

- Biagiotti f)** Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 0$ e $q_1 = -20$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 20$ e $a_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda $[0, 2] \text{ rad/s}$. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -20$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 0$ ($t_1 = 2T$).

Cognome:

Nome:

N. Matr.: Ho seguito il corso con Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 febbraio 2020 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

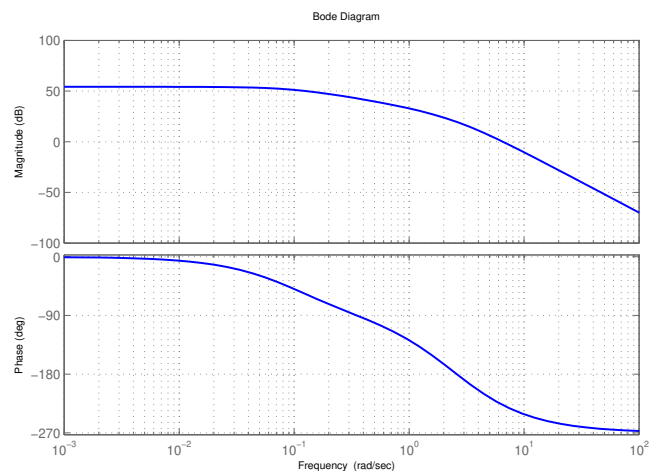
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. L' influenza sull'uscita di variazioni parametriche di un sistema $G(s)$ può essere diminuita utilizzando un solo controllore ad azione in avanti?

- No, mai
 Sì, ma solo se il sistema è stabile
 Sì, sempre

2. Dato il sistema retroazionato, di cui in figura sono riportati i diagrammi di bode della funzione di anello $L(s)$, il margine di fase risulta:

- $M_f \approx 80^\circ$
 $M_f \approx 50^\circ$
 $M_f \approx -50^\circ$
 $M_f \approx -80^\circ$



3. Dato un sistema in retroazione unitaria negativa stabile con funzione di anello $L(s)$, per garantire errore a regime nullo a fronte di un disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, è necessario che:

- $|1 + L(j\bar{\omega})| = 0$
 $|L(j\bar{\omega})| = 0$
 $|L(j\bar{\omega})| = 1$
 $|L(j\bar{\omega})| = \infty$

4. Lo spettro di un segnale tempo-continuo:

- può essere calcolato mediante la trasformata di Fourier
 può essere calcolato mediante la trasformata di Laplace
 è una rappresentazione del segnale nel dominio della frequenza
 può essere definito solo per segnali periodici

5. Una rete anticipatrice:

- ha come effetto utile l'attenuazione ad alta frequenza
 ha la costante di tempo dello zero più bassa di quella del polo
 ha un andamento passa-alto
 introduce un anticipo di fase che ha un valore massimo dipendente solo da α

6. Il tuning in anello aperto di un regolatore PID per un impianto $G(s)$:
- si basa su una stima del margine di ampiezza M_a e della pulsazione critica ω_f ($\arg\{G(j\omega_f)\} = -\pi$) di $G(s)$
 - si basa su una stima del tempo di ritardo T , della costante di tempo τ e del guadagno μ di $G(s)$
 - può essere applicato anche a impianti instabili
 - può essere realizzato solo se $G(s)$ ha grado relativo almeno pari a 3
7. Dato un impianto da controllare, se le specifiche richiedono una larghezza di banda per il sistema controllato pari a $\omega_b = 20$ rad/sec ma è presente un disturbo di misura a $\omega_n \approx 5$ rad/sec:
- oltre al regolatore in retroazione occorre un filtro passa-basso sul ramo (di retroazione) su cui agisce il disturbo
 - non è possibile trovare nessun regolatore in grado di soddisfare le specifiche
 - oltre al regolatore in retroazione occorre una compensazione in avanti del riferimento
 - oltre al regolatore in retroazione occorre un compensatore del disturbo
8. Dato un sistema di controllo digitale affetto da un rumore di misura alla pulsazione di $\omega_n = 600$ rad/s, per evitare il fenomeno dell'aliasing è sufficiente assumere una pulsazione di campionamento
- $\omega_s \geq 6000$ rad/s
 - $\omega_s \geq 1200$ rad/s
 - $\omega_s \geq 600$ rad/s
 - $\omega_s \geq 300$ rad/s
9. Il ricostruttore di ordine zero:
- rappresenta la conversione tra segnale tempo-continuo e sequenza di campioni
 - può essere modellato con la funzione di trasferimento $\frac{1 - e^{-sT}}{s}$
 - rappresenta la conversione tra sequenza di campioni e segnale tempo-continuo
 - può essere approssimato con la funzione di trasferimento $\frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$
10. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:
- la velocità massima si riduce di un fattore 2
 - la variazione della velocità massima dipende dalla tipologia di traiettoria considerata
 - la velocità massima aumenta di un fattore 4
 - la velocità massima aumenta di un fattore 2

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 febbraio 2020 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Errori parametrici e di modello dell'impianto nel controllo in retroazione/catena aperta: descrivere problematiche ed eventuali metodi di compensazione.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{40s + 800}{s^3 + 12.4s^2 + 28s + 40} = 40 \frac{(s + 20)}{(s^2 + 2.4s + 4)(s + 10)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa) $e_v \leq 4\%$;
- attenuazione di almeno 200 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione $\omega_d = 0.1 \text{ rad/s}$;

e dinamiche:

- sorpasso percentuale $S \leq 25\%$;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione $\omega_n = 200 \text{ rad/s}$;
- minimo tempo di assestamento compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate sopra.

SOLUZIONE:

Il soddisfacimento della specifica statica (errore finito per ingresso a rampa) richiede almeno un polo nell'origine e pertanto il regolatore $R(s)$ potrà avere la forma di un PI o un PID. Dalle specifiche dinamiche discendono i seguenti vincoli frequenziali:

- $S \leq 25\% \rightarrow \delta \geq 0.4 \rightarrow M_f^* \geq 100\delta = 40^\circ$;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" $\rightarrow \omega_c \leq \omega_n/10 = 20 \text{ rad/s}$;

Dal momento che viene richiesto di minimizzare il tempo di assestamento, si assumerà la massima pulsazione di incrocio compatibile con le altre specifiche. Perciò $\omega_c^* = 20 \text{ rad/s}$.

Alla pulsazione $\omega_c^* = 20$, la fase dell'impianto esteso $G_e(s) = \frac{G(s)}{s}$ vale $\arg\{G_e(j15)\} = -281.5237^\circ$. Di conseguenza l'aggiunta dello zero di un semplice PI consentirebbe al più di ottenere un margine di fase -11.5237° . Pertanto sarà necessario un regolatore PID.

Per la progettazione iniziale del PI $R_{pi}(s) = \mu \frac{\tau_z s + 1}{s}$ si procede per cancellazione con il polo reale dell'impianto che precede ω_c^* . Pertanto si assume $\tau_z = 1/10$. Il guadagno μ viene selezionato imponendo il soddisfacimento delle specifiche statiche. In particolare dalla prima si ricava

$$e_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \mu \frac{0.1s+1}{s} G(0)} = \frac{1}{\mu G(0)} \leq 0.04 \rightarrow \mu \geq \frac{1}{0.04 G(0)} = 1.25$$

essendo il guadagno statico $G(0) = 20$. Dalla seconda condizione, che può essere riscritta come

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{200} \text{ alla pulsazione } \omega_d = 0.1 \text{ rad/s}$$

considerando l'espressione approssimata di $|S(j\omega)|$ per basse frequenze, si ricava

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} = \frac{1}{\left| \mu \frac{0.1j\omega_d + 1}{j\omega_d} G(j\omega_d) \right|} \leq 0.005.$$

Svolgendo i calcoli risulta

$$\left| \frac{0.01j + 1}{0.1j} G(j0.1) \right| = 200.1420$$

da cui $\mu \geq \frac{1}{200.1420 \cdot 0.005} = 0.9993$.

Per garantire che entrambe le condizioni siano verificate, occorre assumere il valore di μ più grande tra quelli trovati, ovvero $\mu = 1.25$.

L'espressione del regolatore PI risulta

$$R_{PI}(s) = 1.25 \frac{0.1s + 1}{s}$$

Una volta realizzato il regolatore PI, la progettazione della rete di anticipo che compone il PID deve essere svolta a partire dal sistema esteso (denominato $G_{e1}(s)$) composto dall'impianto e dal regolatore $R_{PI}(s)$

$$G_{e1}(s) = R_{PI}(s)G(s) = 5 \frac{(s + 20)}{s(s^2 + 2.4s + 4)}$$

e imponendo la pulsazione di incrocio desiderata $\omega_c^* = 20$ rad/s e il margine di fase $M_f^* = 40^\circ$. Occorre pertanto calcolare modulo e argomento per $\omega = \omega_c^* = 20$ di $G_{e1}(s)$:

$$|G_{e1}(j20)| = 0.0177, \quad \arg\{G_{e1}(j20)\} = -218.0888^\circ.$$

I parametri della rete anticipatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^* = \frac{1}{|G_{e1}(j20)|} = 56.4128 \geq 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{e1}(j20)) = 78.08881^\circ \leq 90^\circ$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^*) \geq \frac{1}{M^*} \Rightarrow 0.2064 > 0.0177,$$

dalle formule di inversione si ricava che $\tau = 2.8722$ e $\alpha = 0.0034$ per cui

$$R_a(s) = \frac{2.872s + 1}{0.009641s + 1}$$

e alla fine il regolatore complessivo risulta

$$R_{PID}(s) = 1.25 \frac{(0.1s + 1)(2.872s + 1)}{s(0.009641s + 1)}$$

- b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

SOLUZIONE:

Per trovare l'espressione analitica dell'azione in avanti occorre invertire la funzione di trasferimento dell'impianto

$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s^3 + 12.4s^2 + 28s + 40}{40s + 800}$$

dove la funzione di trasferimento ha grado relativo -2 , per cui non fisicamente realizzabile. Dal momento che l'espressione analitica di $y_{sp}(t)$ e delle sue derivate risulta nota, è possibile implementare $R_{ff}(s)$ dividendone il numeratore per il denominatore e ottenendo in questo modo

$$R_{ff} = 0.025s^2 - 0.19s + 4.5 + \frac{-3560}{40s + 800}$$

da cui

$$U_{ff}(s) = 0.025 s^2 Y_{sp}(s) - 0.19 s Y_{sp}(s) + 4.5 Y_{sp}(s) + \frac{-3560}{40s + 800} Y_{sp}(s)$$

↓

$$u_{ff}(t) = 0.025 y_{sp}^{(2)}(t) - 0.19 y_{sp}^{(1)}(t) + 4.5 y_{sp}(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-3560}{40s + 800} Y_{sp}(s) \right\}$$

d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione

- la banda del sistema in anello chiuso
- il disturbo di misura, al fine di prevenire l'aliasing
- una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 10°

Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

SOLUZIONE:

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni suddette:

(a) $\omega_c = 20 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c = 200 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0314 \text{ s}$

(b) $\frac{\omega_s}{2} = \omega_n \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\omega_n} = \frac{2\pi}{400} = 0.0157 \text{ s}$

(c) $\Delta M_f = \frac{T}{2} \omega_c \frac{180}{\pi} \leq 10^\circ \Rightarrow T \leq \frac{10 \cdot 2\pi}{\omega_c \cdot 180} = 0.0175 \text{ s}$ essendo $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$.

Il valore $T = 0.01$ soddisfa tutti i vincoli.

Assumendo $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ la funzione di trasferimento del regolatore discretizzata risulta

$$R_{\text{PID}}(s) = 1.25 \frac{(0.1s + 1)(2.872s + 1)}{s(0.009641s + 1)}$$

↓

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{20.18 - 38.45z^{-1} + 18.28z^{-2}}{1 - 1.491z^{-1} + 0.4909z^{-2}} = \frac{20.18z^2 - 38.45z + 18.28}{z^2 - 1.491z + 0.4909}$$

e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$.

SOLUZIONE:

Interpretando z^{-1} come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che l'equazione alle differenze corrispondente a $R(z)$ è

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{20.18 - 38.45z^{-1} + 18.28z^{-2}}{1 - 1.491z^{-1} + 0.4909z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

↓

$$u_k = 1.491 u_{k-1} - 0.4909 u_{k-2} + 20.188 e_k - 38.45 e_{k-1} + 18.28 e_{k-2}$$

Biagiotti f) Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 0$ e $q_1 = -20$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 20$ e $a_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda $[0, 2]$ rad/s. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -20$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 0$ ($t_1 = 2T$).

SOLUZIONE:

L'espressione della traiettoria cicloidale è

$$q(t) = h q_N(\tau) \Big|_{\tau = \frac{t-t_0}{T}} + q_0$$

dove $q_N(\tau)$ è la corrispondente espressione normalizzata

$$q_N(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau.$$

Nel caso in esame lo spostamento in modulo vale $|h| = |q_1 - q_0| = 20$ mentre la durata T deve essere determinata sulla base dei vincoli. In particolare, dai limiti su velocità e accelerazione risulta

$$q_{max}^{(1)} = \frac{|h|}{T} q_{N\ max}^{(1)} \leq v_{max} \Rightarrow T \geq 20 \frac{2}{20} = 2 \text{ s}$$

$$q_{max}^{(2)} = \frac{|h|}{T^2} q_{N\ max}^{(2)} \leq a_{max} \Rightarrow T \geq \sqrt{20 \frac{2\pi}{40}} = 1.7725 \text{ s}$$

mentre la specifica di tipo frequenziale relativa al fatto di collocare lo spettro della traiettoria nella banda $[0, 2]$ rad/s si traduce in

$$\frac{2\pi}{T} \leq 2 \Rightarrow T \geq \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Si noti infatti che lo spettro dell'accelerazione della traiettoria cicloidale ($\sim \sin(\frac{2\pi}{T}t)$) è composto da una sola riga a pulsazione $\frac{2\pi}{T}$.

Il vincolo più stringente (che porta la periodo più lungo) è quello frequenziale, per cui si assumerà $T = \pi$ s. Sostituendo nell'espressione della traiettoria si ottiene

$$q(t) = -20 \left(\frac{t}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2t) \right)$$

mentre il ritorno risulta

$$q(t) = -20 + 20 \left(\frac{t - \pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2(t - \pi)) \right).$$
