# Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte A)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

## Compito del 4 giugno 2020 - Quiz

*Per ciascuno dei seguenti quesiti, riportare nel modulo fornito le lettere relative alle risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.*
*I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.*

1. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in $s$. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:
   - A. è sempre possibile
   - B. è possibile solo per sistemi a fase minima
   - C. è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria ($n \geq m$)
   - D. è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria ($n > m$)

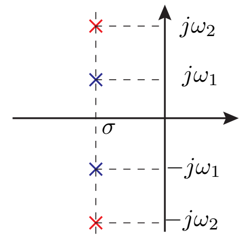
2. La pulsazione di oscillazione $\omega$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 10}$ è
   - A. $\omega = 1$
   - B. $\omega = 3$
   - C. $\omega = \sqrt{10}$

3. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima
   - A. ha almeno un polo a parte reale positiva
   - B. ha almeno uno zero a parte reale positiva
   - C. può avere sia un polo che uno zero a parte reale positiva

4. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{2}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$
   - A. tende a 0 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$
   - B. tende a 1 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$
   - C. tende a 2 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 2$
   - D. diverge per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$

5. Se al sistema $G(s) = \dfrac{s^2 + 4}{(s-4)(s+5)}$ viene fornito in ingresso il segnale $x(t) = 3\sin(2t - \pi/2)$ a regime l'uscita sarà:
   - A. nulla
   - B. costante ma non nulla
   - C. sinusoidale (con pulsazione $\omega = 2$)
   - D. illimitata

6. Siano date due funzioni di trasferimento del secondo ordine $G_i(s) = \dfrac{1}{(s-\sigma)^2+\omega_i^2}$, $i = 1, 2$ con i poli disposti come in figura. Nella risposta al gradino




   A. i sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono caratterizzati dallo stesso tempo di assestamento

   B. i sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono caratterizzati dallo stesso sorpasso percentuale

   C. il sistema $G_1(s)$ presenta una minore sovraelongazione rispetto a $G_2(s)$

   D. il sistema $G_2(s)$ presenta un tempo di assestamento minore rispetto a $G_1(s)$

7. Se la risposta temporale $y(t)$ al gradino unitario di un sistema $G(s)$ presenta tra l'atro un termine $M\,t^2\cos(2t-\varphi)$, allora la sua funzione di trasferimento sarà caratterizzata da

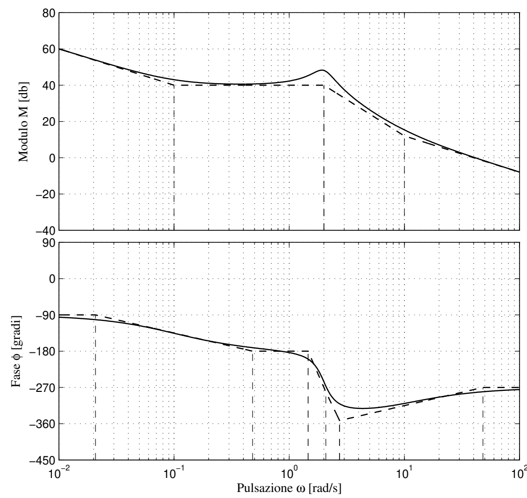
   A. una coppia di poli $p_i = \pm j2$ di molteplicità 3

   B. una coppia di poli $p_i = \pm j2$ di molteplicità 2

   C. una coppia di poli $p_i = 2 \pm j2$ di molteplicità 1

   D. una coppia di poli $p_i = -2 \pm j2$ di molteplicità 1

8. Se un sistema $G(s)$ è caratterizzato dai diagrammi di Bode riportati a fianco, posto in retroazione unitaria negativa, supposta stabile, allora:




   A. l'errore a regime per ingresso a gradino sarà costante ma non nullo

   B. l'errore a regime per ingresso a gradino sarà nullo

   C. l'errore a regime per ingresso a rampa sarà costante ma non nullo

   D. l'errore a regime per ingresso a rampa sarà nullo

9. Il diagramma di Bode delle ampiezze del ritardo

   A. è costante

   B. decresce esponenzialmente all'aumentare di $\omega$

   C. cresce esponenzialmente all'aumentare di $\omega$

10. La pulsazione di risonanza $\omega_R$ di un sistema del secondo ordine è:

   A. $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-\delta^2}$

   B. $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-2\delta^2}$

   C. $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$

   D. $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$

# Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte A)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

## Compito del 4 giugno 2020 - Problemi

*Nel modulo fornito, riportare le risposte ai seguenti quesiti (si noti che ad ogni domanda corrisponde una posizione ben precisa in cui rispondere). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.*

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

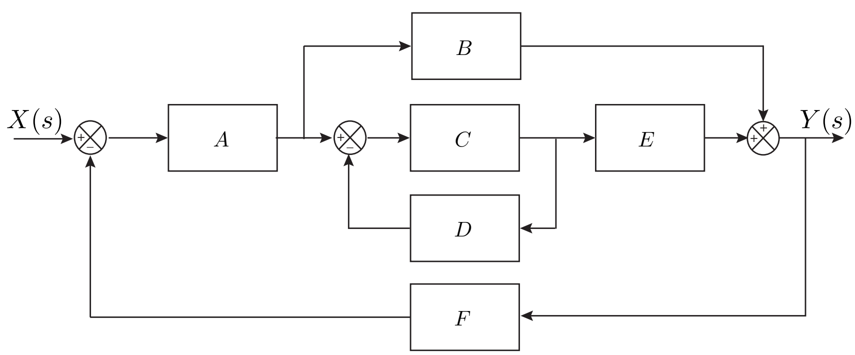
$$x_1(t) = \int_0^t \cos(2\tau)e^{6\tau}d\tau, \qquad x_2(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t-1)$$

dove $\delta(t)$ indica l'impulso di area unitaria.

b) Calcolare analiticamente la risposta $y_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$ all'ingresso $x(t) = 2e^{-2t}$:

$$G_1(s) = \frac{3(s+2)}{s^2+36}, \qquad G_2(s) = \frac{4s^2+12s+9}{s^2+3s+2}\, e^{-2s}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



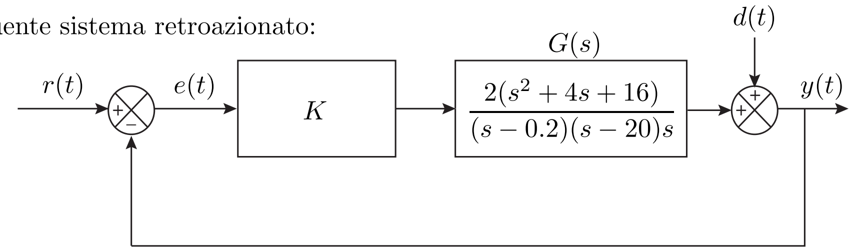

utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-2(s-1)(s^2+30s+900)}{(0.05s+1)(s+1)(s^2+9s+125)}$$

disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino di ampiezza 1, $x(t) = 1$. Calcolare il valore a regime $y_\infty$ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento $T_a$ del sistema e il periodo $T_\omega$ dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



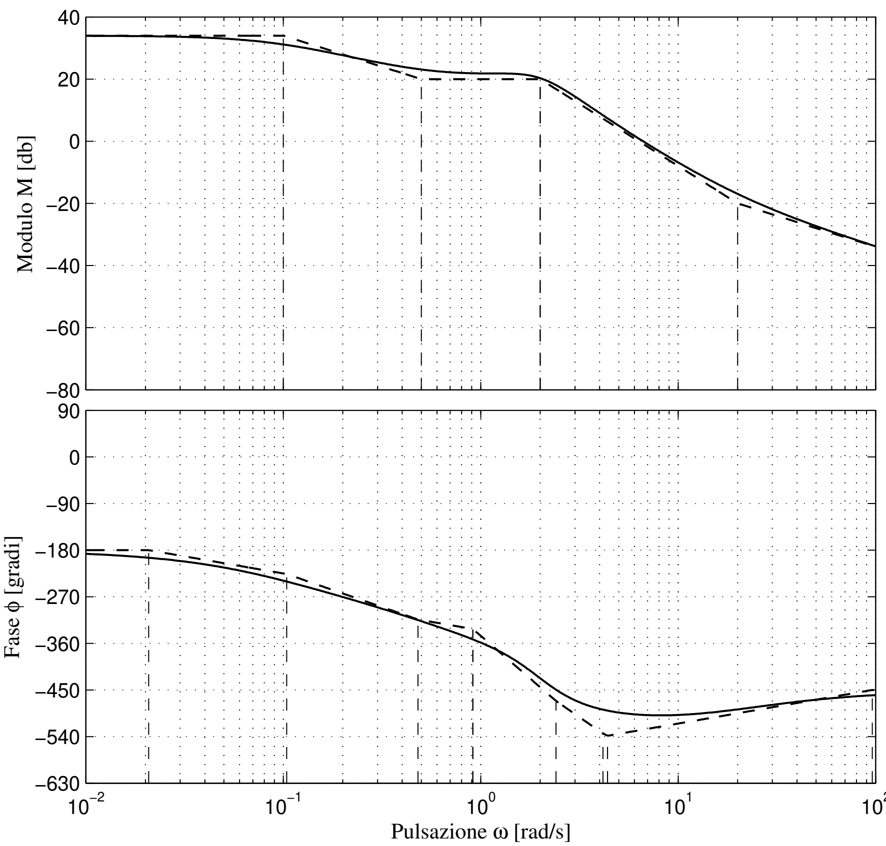

e.1) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

e.2) Posto $K = 15$, calcolare l'errore a regime $e_\infty$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 15t$ e il disturbo costante $d(t) = 20$.

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro $K$. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno $K$.

f) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

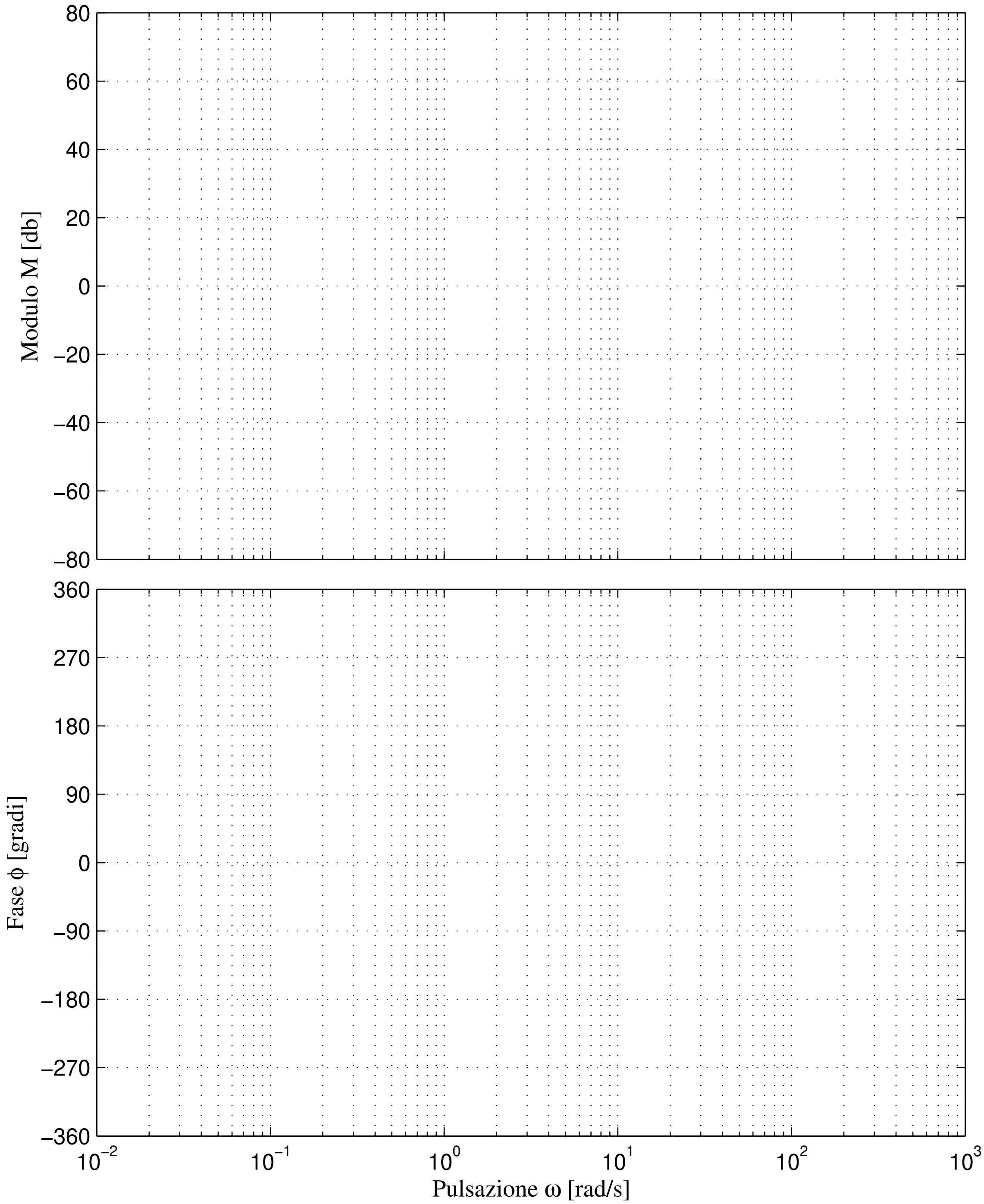



f.1) Ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 0.1 + 3\,\sin\left(7\,t - \frac{\pi}{2}\right).$$

## Diagrammi di Bode



# Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte A)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

## Compito del 4 giugno 2020 - Quiz

*Per ciascuno dei seguenti quesiti, riportare nel modulo fornito le lettere relative alle risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.*
*I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.*

1. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in $s$. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

   ○ è sempre possibile
   ○ è possibile solo per sistemi a fase minima
   ○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria ($n \geq m$)
   ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria ($n > m$)

2. La pulsazione di oscillazione $\omega$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 10}$ è

   ⊗ $\omega = 1$
   ○ $\omega = 3$
   ○ $\omega = \sqrt{10}$

3. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva
   ○ può avere sia un polo che uno zero a parte reale positiva

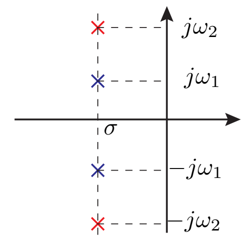
4. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{2}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$

   ○ tende a 0 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$
   ○ tende a 1 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$
   ⊗ tende a 2 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 2$
   ○ diverge per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$

5. Se al sistema $G(s) = \dfrac{s^2 + 4}{(s-4)(s+5)}$ viene fornito in ingresso il segnale $x(t) = 3\sin(2t - \pi/2)$ a regime l'uscita sarà:

   ○ nulla
   ○ costante ma non nulla
   ○ sinusoidale (con pulsazione $\omega = 2$)
   ⊗ illimitata

6. Siano date due funzioni di trasferimento del secondo ordine $G_i(s) = \dfrac{1}{(s-\sigma)^2 + \omega_i^2}$, $i = 1, 2$ con i poli disposti come in figura. Nella risposta al gradino




⊗ i sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono caratterizzati dallo stesso tempo di assestamento

○ i sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono caratterizzati dallo stesso sorpasso percentuale

⊗ il sistema $G_1(s)$ presenta una minore sovraelongazione rispetto a $G_2(s)$

○ il sistema $G_2(s)$ presenta un tempo di assestamento minore rispetto a $G_1(s)$

7. Se la risposta temporale $y(t)$ al gradino unitario di un sistema $G(s)$ presenta tra l'atro un termine $M\,t^2\cos(2t - \varphi)$, allora la sua funzione di trasferimento sarà caratterizzata da

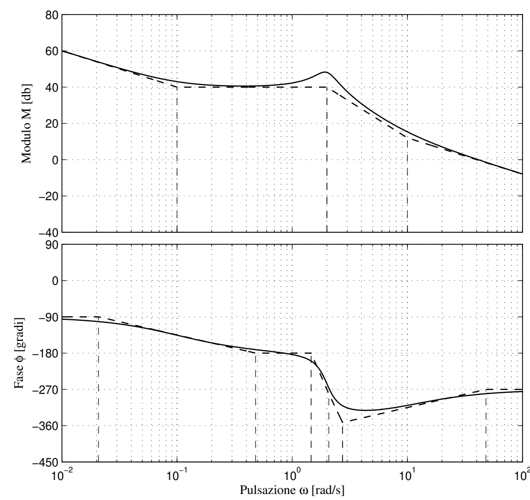
⊗ una coppia di poli $p_i = \pm j2$ di molteplicità 3

○ una coppia di poli $p_i = \pm j2$ di molteplicità 2

○ una coppia di poli $p_i = 2 \pm j2$ di molteplicità 1

○ una coppia di poli $p_i = -2 \pm j2$ di molteplicità 1

8. Se un sistema $G(s)$ è caratterizzato dai diagrammi di Bode riportati a fianco, posto in retroazione unitaria negativa, supposta stabile, allora:




○ l'errore a regime per ingresso a gradino sarà costante ma non nullo

⊗ l'errore a regime per ingresso a gradino sarà nullo

⊗ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà costante ma non nullo

○ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà nullo

9. Il diagramma di Bode delle ampiezze del ritardo

⊗ è costante

○ decresce esponenzialmente all'aumentare di $\omega$

○ cresce esponenzialmente all'aumentare di $\omega$

10. La pulsazione di risonanza $\omega_R$ di un sistema del secondo ordine è:

○ $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1-\delta^2}$

○ $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1-2\delta^2}$

○ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$

⊗ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$

# Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte A)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

## Compito del 4 giugno 2020 - Problemi

*Nel modulo fornito, riportare le risposte ai seguenti quesiti (si noti che ad ogni domanda corrisponde una posizione ben precisa in cui rispondere). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.*

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \int_0^t \cos(2\tau)e^{6\tau}d\tau, \qquad x_2(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t-1)$$

dove $\delta(t)$ indica l'impulso di area unitaria.

---

**SOLUZIONE:**

$$X_1(s) = \frac{(s-6)}{s[(s-6)^2+4]}, \qquad X_2(s) = 2 + 3e^{-s}$$

---

b) Calcolare analiticamente la risposta $y_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$ all'ingresso $x(t) = 2e^{-2t}$:

$$G_1(s) = \frac{3(s+2)}{s^2+36}, \qquad G_2(s) = \frac{4s^2+12s+9}{s^2+3s+2}\, e^{-2s}$$

---

**SOLUZIONE:**

La risposta $y_1(t)$ relativa alla funzione $G_1(s)$ può essere calcolata antitrasformando la funzione

$$Y_1(s) = G_1(s)X(s) = \frac{3(s+2)}{s^2+36}\frac{2}{s+2} = \frac{6}{s^2+36}$$

essendo $X(s) = \frac{2}{s+2}$ la trasformata del segnale di ingresso $x(t)$. Esaminando $Y_1(s)$ risulta evidente come

$$y_1(t) = \sin(6t).$$

La risposta di $G_2(s)$ all'ingresso $x(t)$ può essere calcolata antitrasformando

$$Y_2(s) = G_2(s)X(s) = \frac{4s^2+12s+9}{s^2+3s+2}\, e^{-2s}\, \frac{2}{s+2} = \frac{8s^2+24s+18}{(s+2)^2\,(s+1)}\, e^{-2s}.$$

Scomponendo la parte polinomiale di $Y_2(s)$ in fratti semplici, risulta

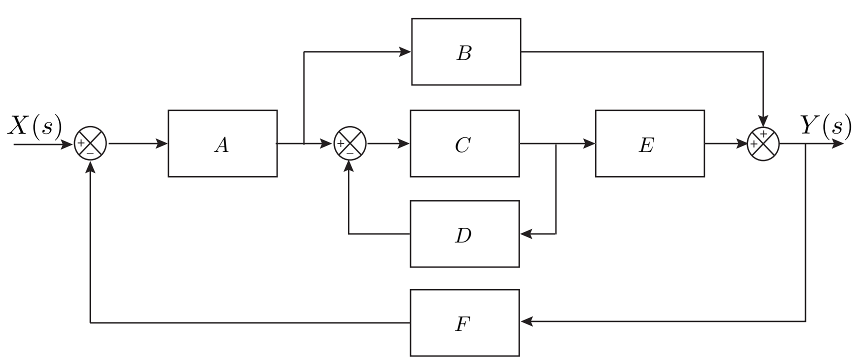
$$Y_2(s) = \left(\frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}\right) e^{-2s}$$

da cui, applicando la proprietà di linearità delle trasformate di Lapalce e quella relativa al ritardo temporale, si ha

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2e^{-(t-2)} + 6e^{-2(t-2)} - 2(t-2)e^{-2(t-2)} & t \geq 2. \end{cases}$$

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

**SOLUZIONE:**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ACE + AB(1 + CD)}{1 + ACEF + ABF + CD + ABFCD}$$

d) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-2(s-1)(s^2 + 30s + 900)}{(0.05s + 1)(s + 1)(s^2 + 9s + 125)}$$

disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino di ampiezza 1, $x(t) = 1$. Calcolare il valore a regime $y_\infty$ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento $T_a$ del sistema e il periodo $T_\omega$ dell'eventuale oscillazione smorzata.

**SOLUZIONE:**

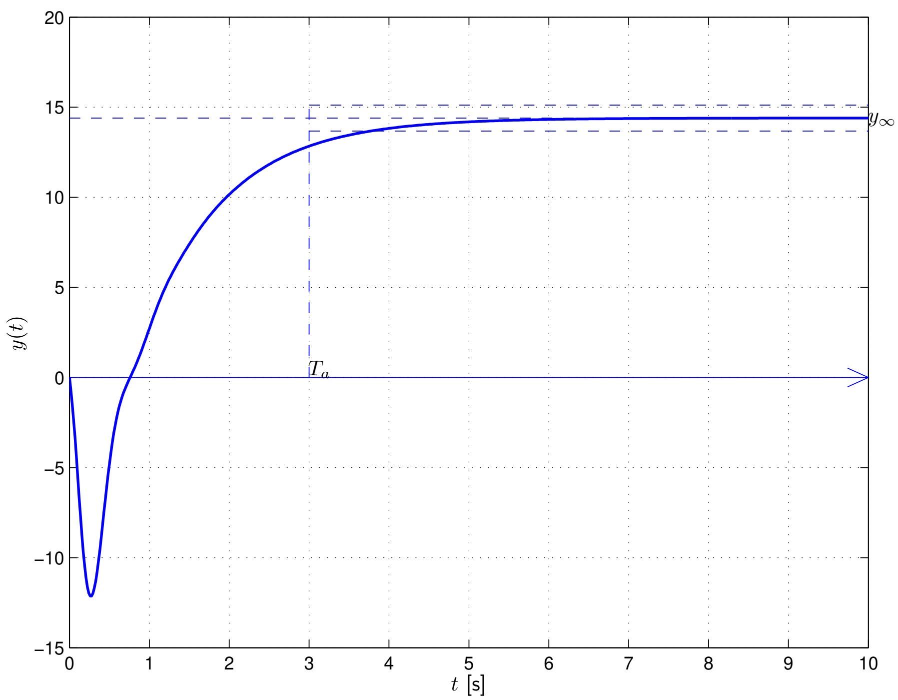
Riscrivendo la funzione nella forma poli-zeri

$$G(s) = \frac{-40(s-1)(s^2 + 30s + 900)}{(s + 20)(s + 1)(s^2 + 9s + 125)}$$

si evidenzia immediatamente come il polo dominante (reale) si trovi in

$$p = -1$$

ma sia presente anche uno zero a fase non minima in $+1$ che influenza notevolmente la risposta del sistema. Di conseguenza la risposta al gradino avrà un andamento qualitativo di tipo aperiodico, con una sottoelongazione iniziale, come mostrato in figura.




Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 1$ risulta

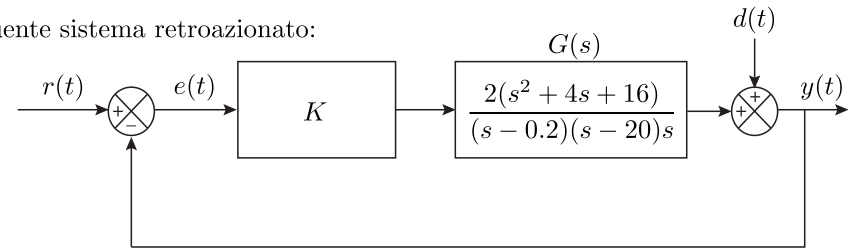
$$y_\infty = A\,G(0) = 14.4,$$

il tempo di assestamento $T_a$ è

$$T_a = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{1} = 3 \text{ s},$$

mentre il periodo delle oscillazioni non è definito.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:




e.1) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

---

**SOLUZIONE:**
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{2(s^2+4s+16)}{(s-0.2)(s-20)s} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2K-20.2)s^2 + (8K+4)s + 32K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 8K+4 & & \\ 2 & 2K-20.2 & 32K & \rightarrow & K > 10.1 \\ 1 & 16K^2 - 185.6K - 80.8 & & \rightarrow & K < -0.42 \vee K > 12.02 \\ 0 & 32K & & \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 12.02 = K^\star$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{32\,K^\star}{2K^\star - 20.2}} = 10.0083 \text{ rad/s}$$

---

e.2) Posto $K = 15$, calcolare l'errore a regime $e_\infty$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 15t$ e il disturbo costante $d(t) = 20$.

---

**SOLUZIONE:**
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Essendo il sistema di tipo 1, l'errore per ingresso di riferimento a rampa sarà costante e pari a

$$e_v = \frac{A}{K_v} = \frac{15}{120} = 0.125$$

essendo $A = 15$ l'ampiezza della rampa e $K_v = \lim_{s\to 0} sKG(s) = 120$ (con $K = 15$) la costante di velocità. L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ sarà invece nullo, perchè il sistema è di tipo 1 e il disturbo considerato è costante. Si noti come il disturbo $d(t)$ agisca all'uscita del sistema $G(s)$ e la relazione dinamca con l'errore $e(t)$ sia, a meno del segno, esattamente uguale a quella che lega riferimento ed errore. Pertanto valgno gli stessi ragionamenti nel valutare l'errore a regime. Applicando la sovrapposizione degli effetti, l'errore a regime risulta complessivamente

$$e_\infty(t) = 0.125.$$

---

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

---

**SOLUZIONE:**
Vedi figura in fondo.

---

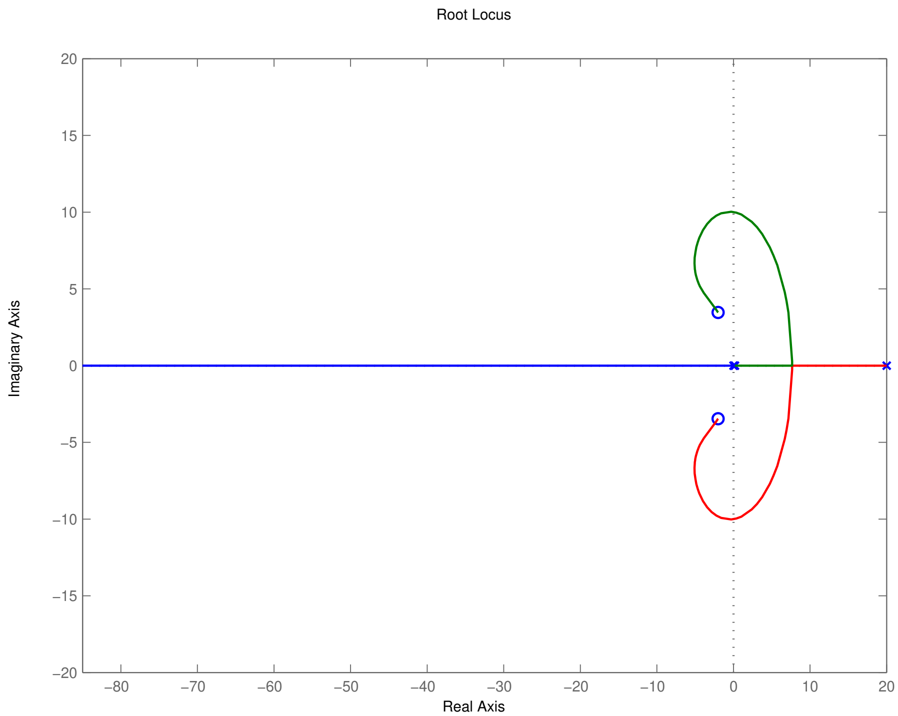
e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro $K$. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno $K$.

**SOLUZIONE:**

Essendo $1$ il grado relativo del sistema, ci sarà un solo asintoto disposto orizzontalmente lungo l'asse reale negativo la cui ascissa[1] si trova in

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(0.2 + 20 + 4) = -24.2.$$

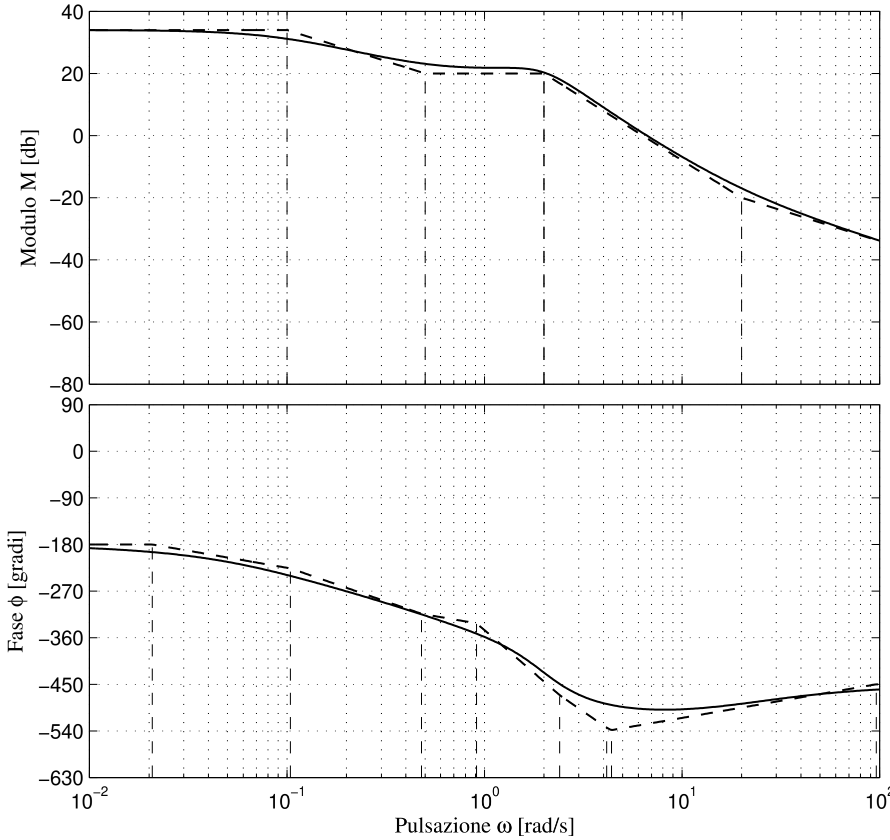
Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.




Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^* = \pm j10.0083$ per $K = K^* = 12.02$.

f) Facendo riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

[1] In realtà il calcolo del centro degli asintoti nel caso di un solo asintoto è poco significativo.




f.1) Ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

---

**SOLUZIONE:**

$$G(s) = \frac{-50(-2s+1)(0.05s+1)}{(10s+1)\left(\dfrac{s^2}{4}+0.5s+1\right)} = \frac{2(s-0.5)(s+20)}{(s+0.1)(s^2+2s+4)}$$

dove il valore $\mu = -50$ si determina, dal guadagno statico $G(0) = \mu$ (non essendoci poli nell'origine). In particolare

$$|\mu|_{db} = |G(0)|_{db} \approx 34 \qquad \rightarrow \qquad |\mu| = 50.$$

Il segno meno dipende dal fatto che la fase iniziale della funzione di risposta armonica è pari a $-180^o$. Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è $\delta = 0.5$ dal momento che il diagramma reale delle ampiezze attraversa il diagramma asintotico esattamente in corrispondenza del punto di rottura in $\omega_n = 2$ rad/s.

---

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 0.1 + 3\,\sin\left(7\,t - \frac{\pi}{2}\right).$$

---

**SOLUZIONE:**

La risposta a regime del sistema all'ingresso $x(t)$ risulta

$$y_\infty(t) = 0.1G(0) + 3|G(j7)|\,\sin\left(7\,t + \arg\{G(j7)\} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Pertanto, andando a leggere i valori direttamente dai diagrammi di Bode forniti si trova che

$$y_\infty(t) = 0.1\cdot(-50) + 3\cdot 0.9014\,\sin\left(7\,t - 8.7009 - \frac{\pi}{2}\right) = -5 + 2.7043\,\sin(7\,t - 10.2717).$$

Notare che il guadagno statico $G(0)$ risulta negativo avendo il sistema una fase iniziale pari a $-180^o$.

## Diagrammi di Bode