Cognome: Nome: N. Matr.:☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 febbraio 2020 - Quiz A

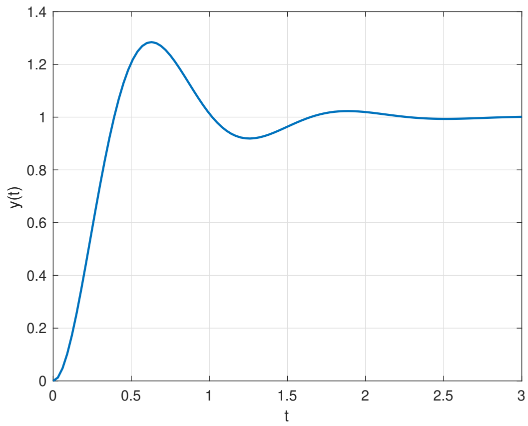
Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{100}{s^2+4s+4}$ in risposta al gradino unitario è:

   ◯ $S = 100\%$
   ◯ $S = 10\%$
   ◯ $S = 5\%$
   ◯ $S = 0\%$

2. Se un sistema dinamico LTI dà luogo alla risposta al gradino unitario di figura esso sarà caratterizzato dalla coppia di poli complessi coniugati:

   ◯ $p_{1,2} = -2 \pm j5$
   ◯ $p_{1,2} = -0.2 \pm j5$
   ◯ $p_{1,2} = -0.2 \pm j0.5$
   ◯ $p_{1,2} = -2 \pm j25$



3. Se si considera l'ingresso costante $\bar{u} = 1$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sin(x_1(t)) - x_2(t) + u^2(t) \end{cases}$

   ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -\pi \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Quali dei seguenti sistemi sono asintoticamente stabili?

   ◯ $G(s) = \dfrac{s-5}{(s+20)(s+3)^2}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+20)(s+9)}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+20)(s^2+9)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{s(s+9)^2}$

5. La risposta a regime del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = x(t)$ al segnale di ingresso $x(t) = \sin\left(\frac{b}{M}t\right)$ vale:

   ◯ $y(t) = \frac{M}{\sqrt{2}b}\sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}M}\sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b}\sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$

6. Dato un sistema lineare, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, la banda passante è definita come l'intervallo di pulsazioni per cui:

   - ◯ $|G(j\omega)| \approx K$ e $\arg G(j\omega) \approx -\pi$
   - ◯ $|G(j\omega)| \approx 0$ e $\arg G(j\omega) \approx 0$
   - ◯ $|G(j\omega)| \approx K$ e $\arg G(j\omega) \approx 0$
   - ◯ $|G(j\omega)| \approx 0$ e $\arg G(j\omega) \approx -\pi$

7. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3 + s^2 + 12}{4s^3 + 5s^2 + s + 1}$ è pari a:

   - ◯ $3/4$
   - ◯ 12
   - ◯ ∞
   - ◯ 0

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   - ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   - ◯ permette di calcolare solo la risposta forzata del sistema, ma non la risposta libera
   - ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   - ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

9. L'equazione differenziale $\ddot{y} = -2\,t\,\dot{y} - 3\,y + 2\,x$, dove x è l'ingresso, y l'uscita e t la variabile tempo, è

   - ◯ lineare
   - ◯ non lineare
   - ◯ stazionaria
   - ◯ non stazionaria

10. Ponendo la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{20000}{s(s+10)(s+50)^2}$ in retroazione unitaria negativa si ottiene un sistema stabile caratterizzato da un errore a regime per ingresso a rampa (di ampiezza 4) $X(s) = \dfrac{4}{s^2}$:

    - ◯ nullo
    - ◯ costante e pari a 5
    - ◯ costante e pari a 1.25
    - ◯ costante e pari a 0.4

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 febbraio 2020 - Esercizi A

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2 - \cos(4\,t)]\,e^{-3t}, \qquad x_2(t) = 1 + t^2 e^{2-t}$$

b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

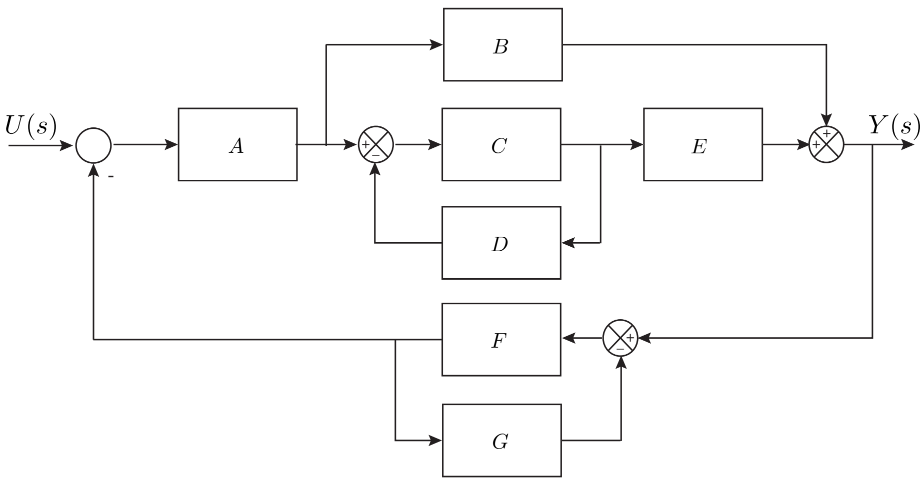
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -6 & -34 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -32 & -136 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

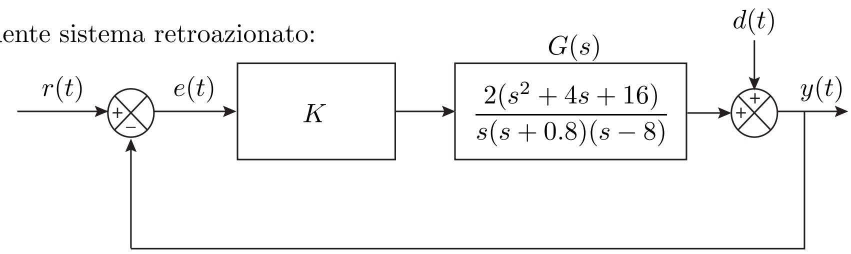
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $U(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{100(0.1s + 1)}{(1 + s)(20 + s)(s^2 + 2s + 100)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $u(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

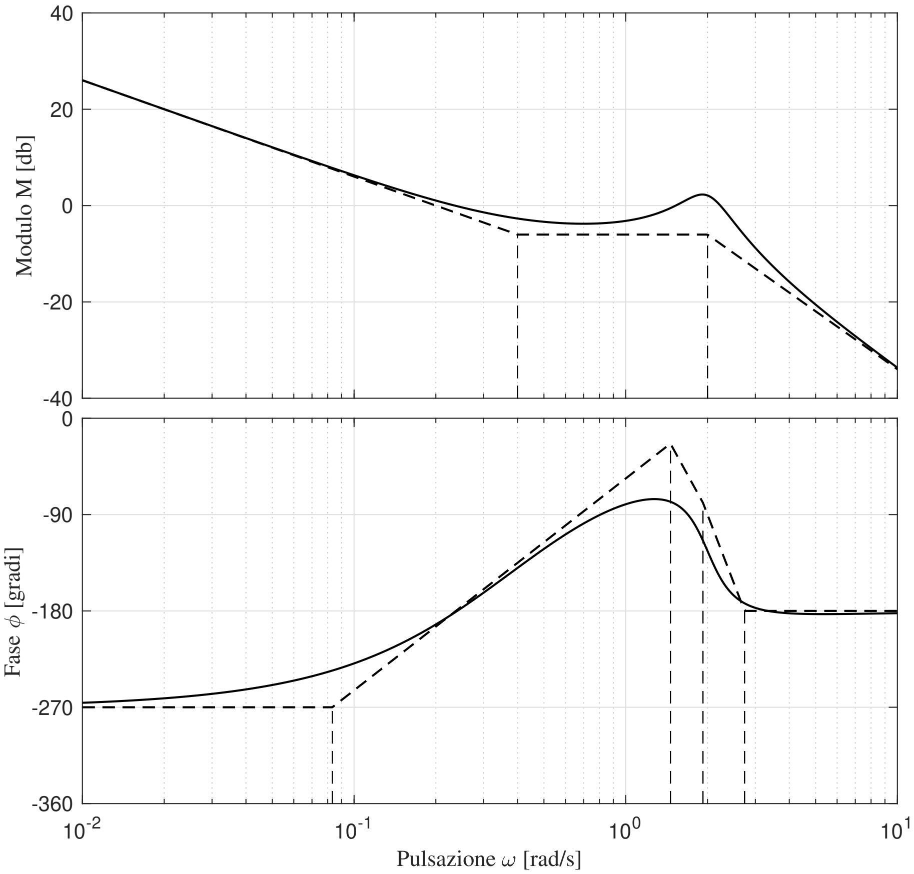
e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 3 + 10 \sin t$.

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto.

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

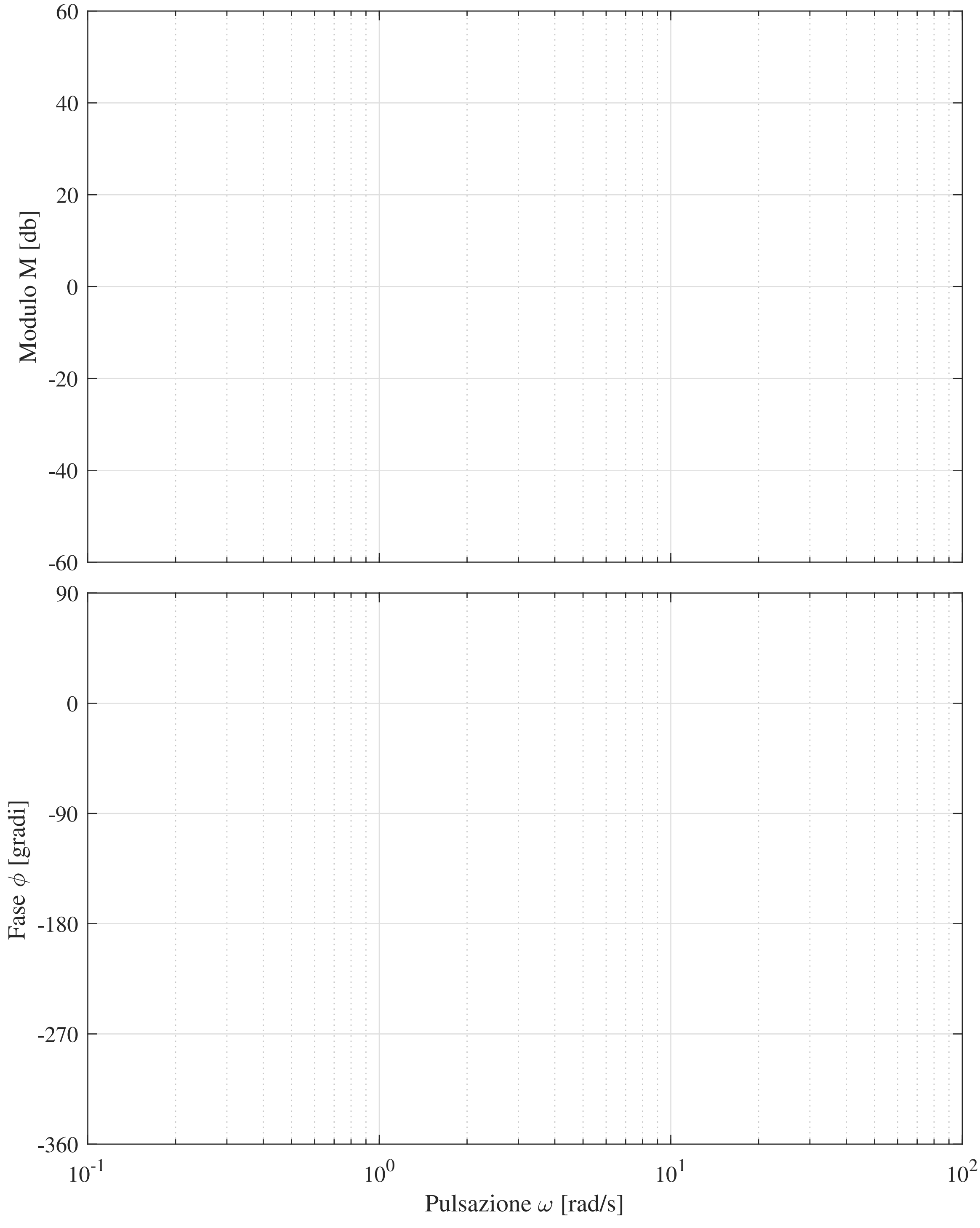


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$u(t) = 6 + 3 \sin(0.2\, t)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 febbraio 2020 - Quiz A

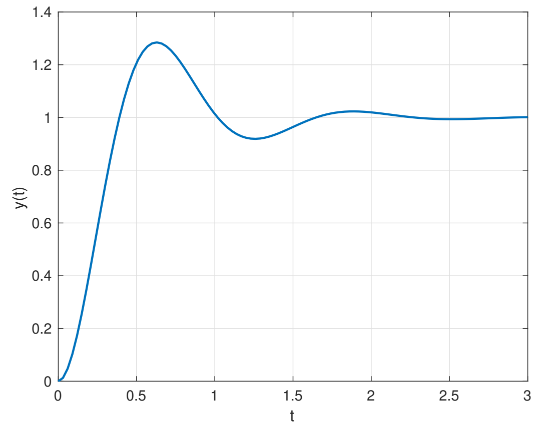
Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La massima sovraelongazione del sistema $G(s) = \dfrac{100}{s^2+4s+4}$ in risposta al gradino unitario è:

   ◯ $S = 100\%$
   ◯ $S = 10\%$
   ◯ $S = 5\%$
   ⊗ $S = 0\%$

2. Se un sistema dinamico LTI dà luogo alla risposta al gradino unitario di figura esso sarà caratterizzato dalla coppia di poli complessi coniugati:

   ⊗ $p_{1,2} = -2 \pm j5$
   ◯ $p_{1,2} = -0.2 \pm j5$
   ◯ $p_{1,2} = -0.2 \pm j0.5$
   ◯ $p_{1,2} = -2 \pm j25$



3. Se si considera l'ingresso costante $\bar{u} = 1$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sin(x_1(t)) - x_2(t) + u^2(t) \end{cases}$

   ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \end{bmatrix}$ ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -\pi \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Quali dei seguenti sistemi sono asintoticamente stabili?

   ⊗ $G(s) = \dfrac{s-5}{(s+20)(s+3)^2}$ ⊗ $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+20)(s+9)}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{s+5}{(s+20)(s^2+9)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{s(s+9)^2}$

5. La risposta a regime del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = x(t)$ al segnale di ingresso $x(t) = \sin\left(\frac{b}{M}t\right)$ vale:

   ◯ $y(t) = \frac{M}{\sqrt{2}b} \sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ◯ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}M} \sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$
   ⊗ $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b} \sin\left(\frac{b}{M}t - 45^o\right)$

6. Dato un sistema lineare, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, la banda passante è definita come l'intervallo di pulsazioni per cui:

   ◯ $|G(j\omega)| \approx K$ e $\arg G(j\omega) \approx -\pi$
   ◯ $|G(j\omega)| \approx 0$ e $\arg G(j\omega) \approx 0$
   ⊗ $|G(j\omega)| \approx K$ e $\arg G(j\omega) \approx 0$
   ◯ $|G(j\omega)| \approx 0$ e $\arg G(j\omega) \approx -\pi$

7. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3 + s^2 + 12}{4s^3 + 5s^2 + s + 1}$ è pari a:

   ⊗ 3/4
   ◯ 12
   ◯ ∞
   ◯ 0

8. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ◯ permette di calcolare solo la risposta forzata del sistema, ma non la risposta libera
   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

9. L'equazione differenziale $\ddot{y} = -2\,t\,\dot{y} - 3\,y + 2\,x$, dove x è l'ingresso, y l'uscita e t la variabile tempo, è

   ⊗ lineare
   ◯ non lineare
   ◯ stazionaria
   ⊗ non stazionaria

10. Ponendo la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{20000}{s(s+10)(s+50)^2}$ in retroazione unitaria negativa si ottiene un sistema stabile caratterizzato da un errore a regime per ingresso a rampa (di ampiezza 4) $X(s) = \dfrac{4}{s^2}$:

    ◯ nullo
    ⊗ costante e pari a 5
    ◯ costante e pari a 1.25
    ◯ costante e pari a 0.4

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 febbraio 2020 - Esercizi A

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2 - \cos(4\,t)]\, e^{-3t}, \qquad x_2(t) = 1 + t^2 e^{2-t}$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+3)} - \frac{(s+3)}{(s+3)^2+4^2}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{2e^2}{(s+1)^3}$$

---

b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -6 & -34 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -32 & -136 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

SOLUZIONE:
Calcolando $G(s) = C\,(sI_2 - A)^{-1}\,B + D$ si ottiene

$$G(s) = \frac{7s^2 + 10s + 102}{s^2 + 6s + 34}$$

---

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta al gradino unitario di $G(s)$, ovvero l' antitrasformata di Laplace di

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{7s^2 + 10s + 102}{s^3 + 6s^2 + 34s},$$

può essere ottenuta scomponendo $Y(s)$ in fratti semplici che nel caso diventano

$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{2+2j}{s+3-5j} + \frac{2-2j}{s+3+5j}$$

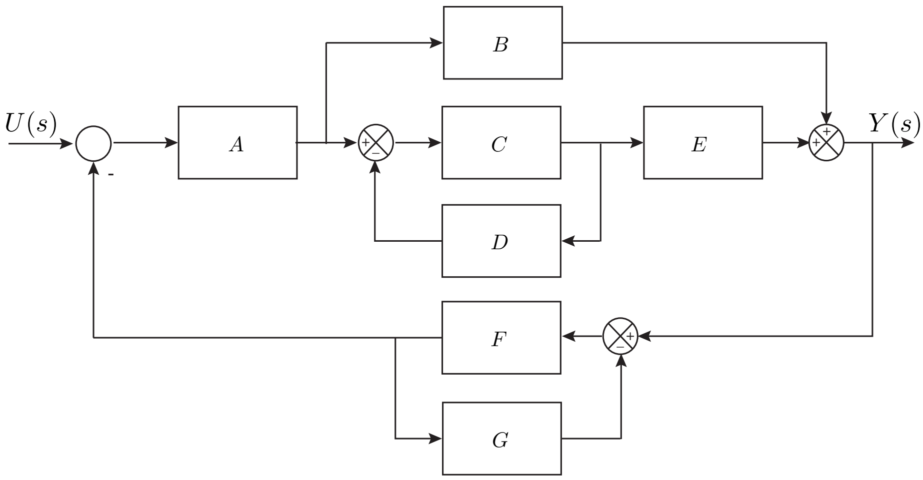
da cui

$$y(t) = 3 + 4\sqrt{2}e^{-3t}\cos(5t + \varphi)$$

con $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 0.7854$.

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $U(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

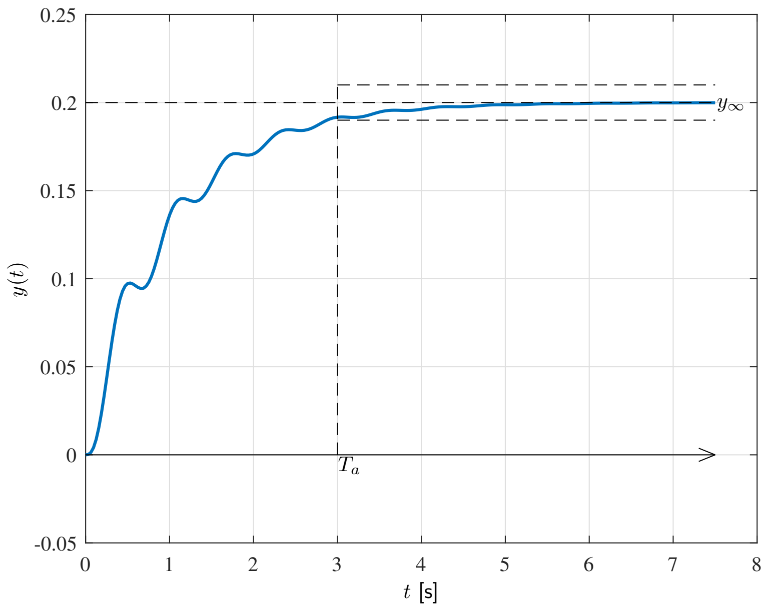
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ACE(1+FG) + AB(1+CD+FG+CDFG)}{1+ACEF+ABF+CD+ABFCD+FG+CDFG}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{100(0.1s+1)}{(1+s)(20+s)(s^2+2s+100)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 4, $u(t) = 4$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:

Il sistema presenta 3 poli dominanti: uno reale $p_1 = -1$ e una coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = -1 \pm j9.95$ i per cui la risposta al gradino avrà un andamento esponenziale sovrapposto a uno oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 4$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 4 \cdot 0.05 = 0.2$$

La parte reale dei poli dominanti è $\sigma = -1$ per cui il tempo di assestamento T_a è

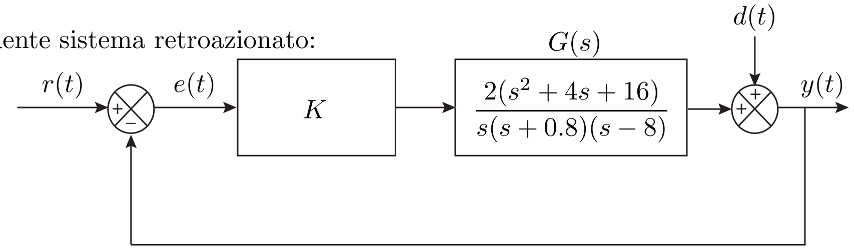
$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 3 \text{ s},$$

Il periodo dell'oscillazione è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9.95} = 0.6315 \text{ s}$$

---

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{2(s^2+4s+16)}{s(s+0.8)(s-8)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2K-7.2)s^2 + (8K-6.4)s + 32K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccl} 3 & 1 & 8K-6.4 & \\ 2 & 2K-7.2 & 32K & \rightarrow \;\; K > 3.6 \\ 1 & 16K^2 - 102.4K + 46.08 & & \rightarrow \;\; K < 0.4871 \vee K > 5.9129 \\ 0 & 32K & & \rightarrow \;\; K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 5.9129 = K^\star$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{32K^\star}{2K^\star - 7.2}} \approx 6.3956 \text{ rad/s}$$

---

e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 3 + 10\sin t$.

SOLUZIONE:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà costante e diverso da zero, essendo il sistema considerato di tipo 1 con ingresso di riferimento a rampa: $e_r(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = -0.04$ dove $R_0 = 2$ e $K_v = \lim_{s\to 0} sKG(s) = -50$.
L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = \frac{-1}{1+KG(s)} = \frac{-s^3 + 7.2s^2 + 6.4s}{s^3 + 12.8s^2 + 73.6s + 320}.$$

Essendo $d(t)$ dato dalla somma di un termine costante e di un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il teorema del valore finale per valutare la risposta al gradino

$$e_{d1,\infty}(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{-s^3 + 7.2s^2 + 6.4s}{s^3 + 12.8s^2 + 73.6s + 320}\frac{3}{s} = 0$$

essendo $F_d(0) = 0$. Si sarebbe potuti giungere alla stessa conclusione, poiche il disturbo $d(t)$ agisce sull'uscita dell'impianto che è di tipo 1, e pertanto dà luogo a errore a regime nullo per ingresso costante. Per quanto riguarda il calcolo dell'errore dovuto al contributo sinusoidale di $d(t)$, sfruttando il il concetto di funzione di risposta armonica si ottiene $e_{d2,\infty}(t) = 10|F_d(j1)|\sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.0327$ e $\arg\{F_d(j1)\} = -4.1728\text{rad} = -239.0815^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_{r,\infty}(t) + e_{d,\infty}(t) = -0.04 + 0.327\sin(t - 4.1728)$$

---

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

Vedi figura in fondo.

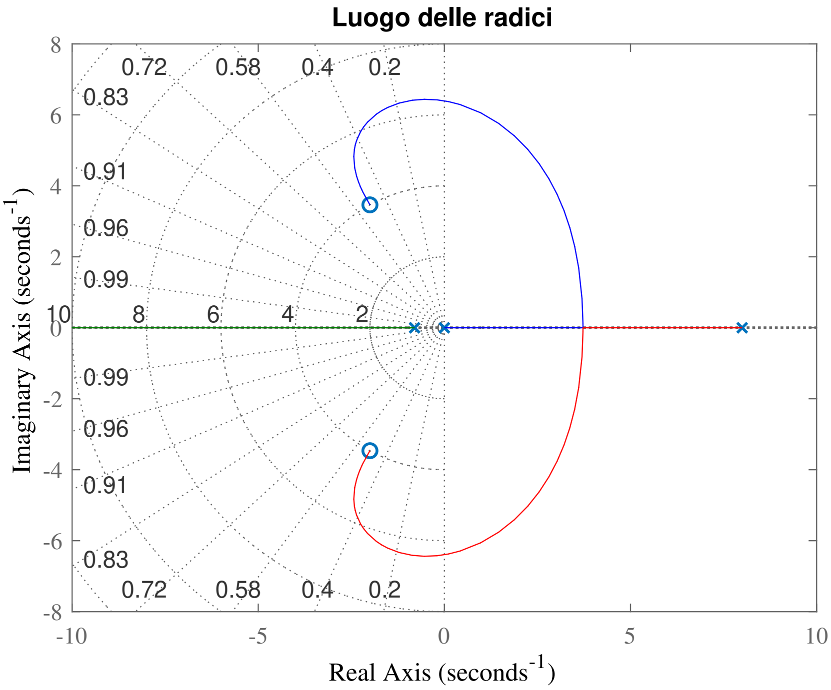
Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:

Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(-0.8 + 8 + 4) = 11.2$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente.

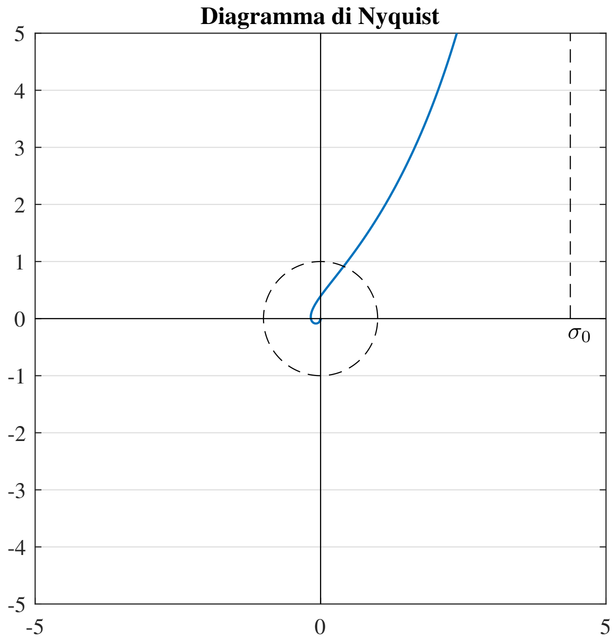


Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^\star = \pm j6.3956$ per $K = K^\star = 5.9129$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = -\frac{5}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{2}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{4} - \frac{1}{0.8} + \frac{1}{8} = -0.8750 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_0 = -5\Delta_\tau = 4.3750$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -4 + 0.8 - 8 = -11.2 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

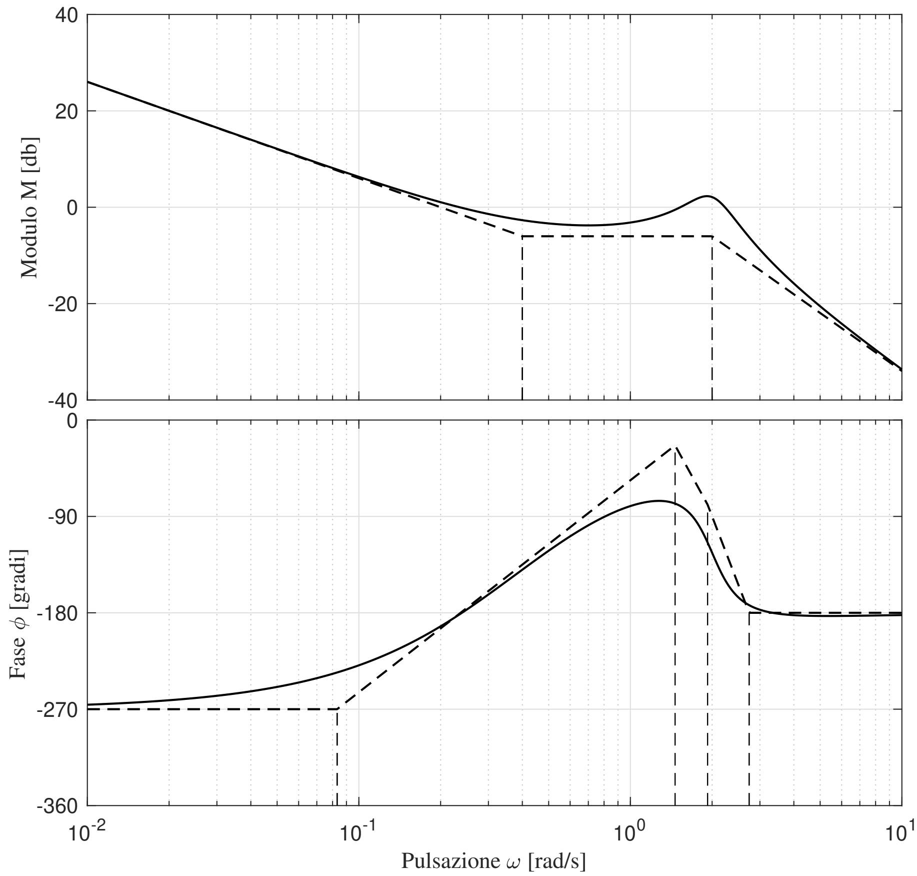
$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = \pi$$

Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -0.1691$$

---

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{20(s+0.4)^2}{s(s-0.4)(s^2+0.8s+4)} = \frac{-0.2(2.5s+1)^2}{s(-2.5s+1)(0.25s^2+0.2s+1)}$$

dove il valore $\mu = -0.2$ si determina dall'approssimante per basse frequenze di $G(s)$, cioè $G_0(s) = \frac{\mu}{s}$ che in corrispondenza di $\omega = 0.4$ vale circa -6 db . Pertanto

$$\left|\frac{\mu}{j\omega}\right|_{\omega=0.4} \approx 10^{-6/20} \approx 0.5 \rightarrow \frac{|\mu|}{0.4} = 0.5 \rightarrow |\mu| = 0.2.$$

In particolare il guadagno μ sarà negativo in quanto il contributo di fase ad esso imputabile è pari a -180^o essendo la fase iniziale complessiva -270^o ed essendo presente un polo nell'origine che contribuisce con -90^o. Il segno positivo deriva dal fatto che la fase iniziale è nulla.
Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili (e pertanto positivo) vale in modulo:

$$|\delta| = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2 \cdot 5} = 0.1.$$

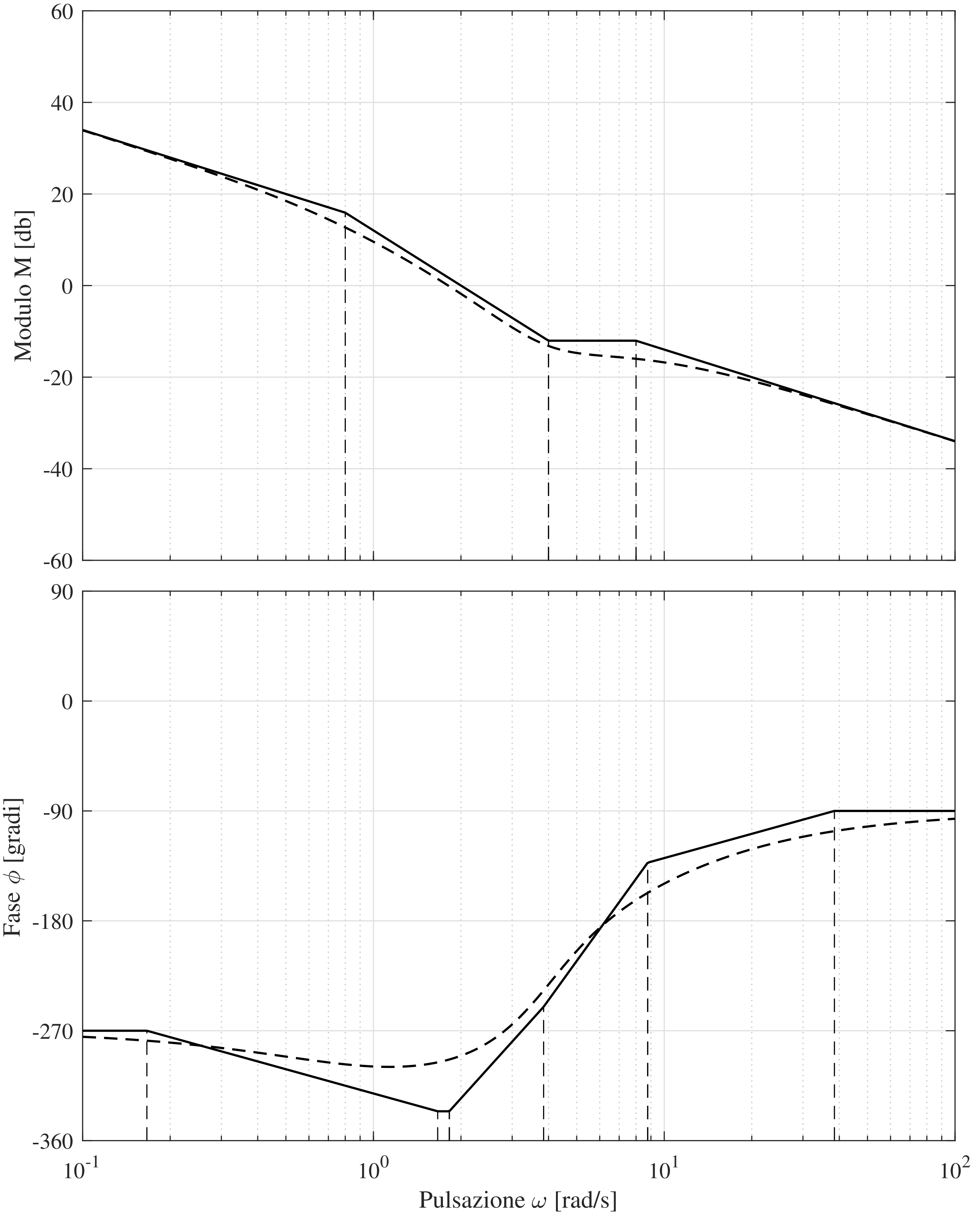
La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $\simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.
Si noti che in corrispondenza di $\omega = 0.4$ la pendenza del diagramma delle ampiezza aumenta di 20 db/decade, mentre lo sfasamento centrato in tale pulsazione è di $+270^o$. Questo è dovuto alla presenza contemporanea di due zeri (stabili) e di un polo (instabile).

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$u(t) = 6 + 3\sin(0.2\,t)\,.$$

SOLUZIONE:

La risposta del sistema al segnale di ingresso $u(t)$ risulta divergente a causa del polo instabile collocato in 0.4.



60
40
20
0
-20
-40
-60
Modulo M [db]
90
0
-90
-180
-270
-360
Fase ϕ [gradi]
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Pulsazione ω [rad/s]