Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 8 gennaio 2020 - Quiz A

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3+s}{9s-s^2}$ è pari a:

   ◯ -1
   ◯ 0
   ◯ ∞
   ◯ $1/3$

2. Linerizzando il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_1(t) + x_2(t) + u(t) + 1 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$ considerando l'ingresso costante $\bar{u} = -1$ e lo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, si ottiene un sistema lineare caratterizzato dalla matrice di stato:

   ◯ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   ◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   ◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino

4. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   ◯ vale $\simeq -6$ dB
   ◯ vale $\simeq -3$ dB
   ◯ vale 1
   ◯ vale 1/2

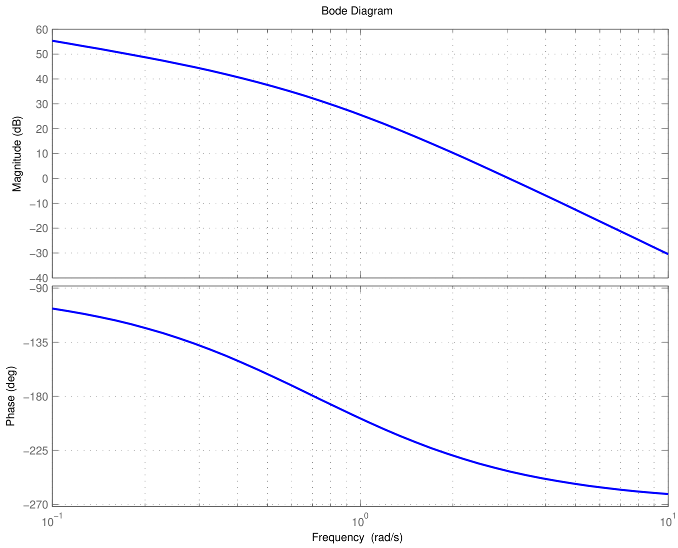
5. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ◯ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

6. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

◯ $G(s) = \dfrac{s-7}{(s+7)(s^2+16)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-7}{s(s+4)^2}$

◯ $G(s) = \dfrac{s-7}{s^2(s+4)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+3}{(s^2-16)}$



7. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:

   ◯ $M_a \simeq 32$ dB e $M_f \simeq -62°$
   ◯ $M_a \simeq -32$ dB e $M_f \simeq 62°$
   ◯ $M_a \simeq -32$ dB e $M_f \simeq -62°$
   ◯ $M_a \simeq 32$ dB e $M_f \simeq 62°$

8. Se la risposta all'impulso di un sistema dinamico LTI presenta, tra gli altri, il modo temporale $te^{5t}\cos(3t)$ allora la funzione di trasferimento che modella tale sistema sarà certamente caratterizzata dal polo reale o dalla coppia di poli complessi coniugati:

   ◯ 5 di molteplicità 2
   ◯ $5 \pm j3$ di molteplicità 2
   ◯ $-5 \pm j3$ di molteplicità 1
   ◯ $3 \pm j5$ di molteplicità 2

9. Il sistema dinamico $\dot{x}(t) = \sin(t)x(t) + u(t)$ risulta

   ◯ lineare, tempo-invariante
   ◯ nonlineare, tempo-invariante
   ◯ nonlineare, tempo-variante
   ◯ lineare, tempo-variante

10. Quali di queste caratteristiche di un sistema dinamico del secondo ordine dipendono soltanto dal coefficiente di smorzamento δ?

   ◯ Picco di risonanza M_R
   ◯ Sorpasso percentuale $S\%$
   ◯ Pulsazione di risonanza ω_R
   ◯ Tempo di assestamento T_a

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 8 gennaio 2020 - Esercizi A

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

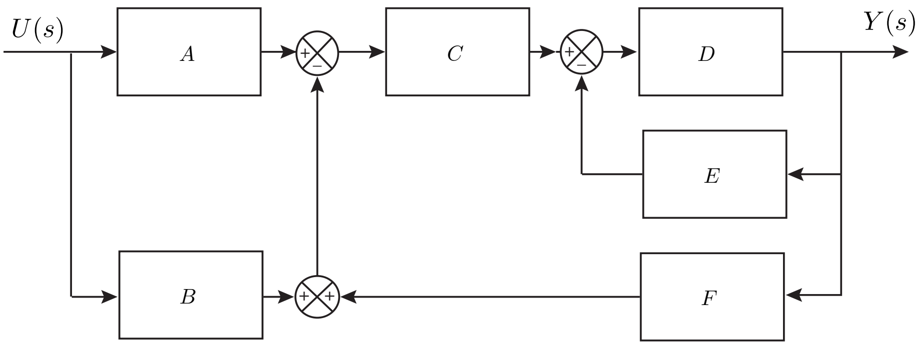
$$x_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-2\,t}\sin(5t)\right), \qquad x_2(t) = (1-t)e^{-3\,t+3},$$

dove $\frac{d}{dt}$ indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{6s^2+56s+76}{(s+9)(s^2+8s+20)}, \qquad G_2(s) = e^{-3s} + 2e^{-6s}$$

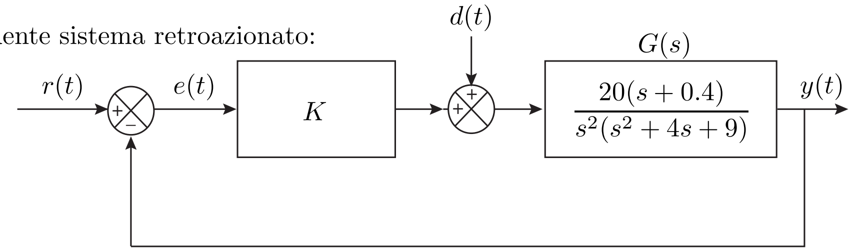
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $U(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{50(0.1s+1)}{(0.1s^2+6s+150)(3+s)(0.04s+2)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 8, $u(t) = 8$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

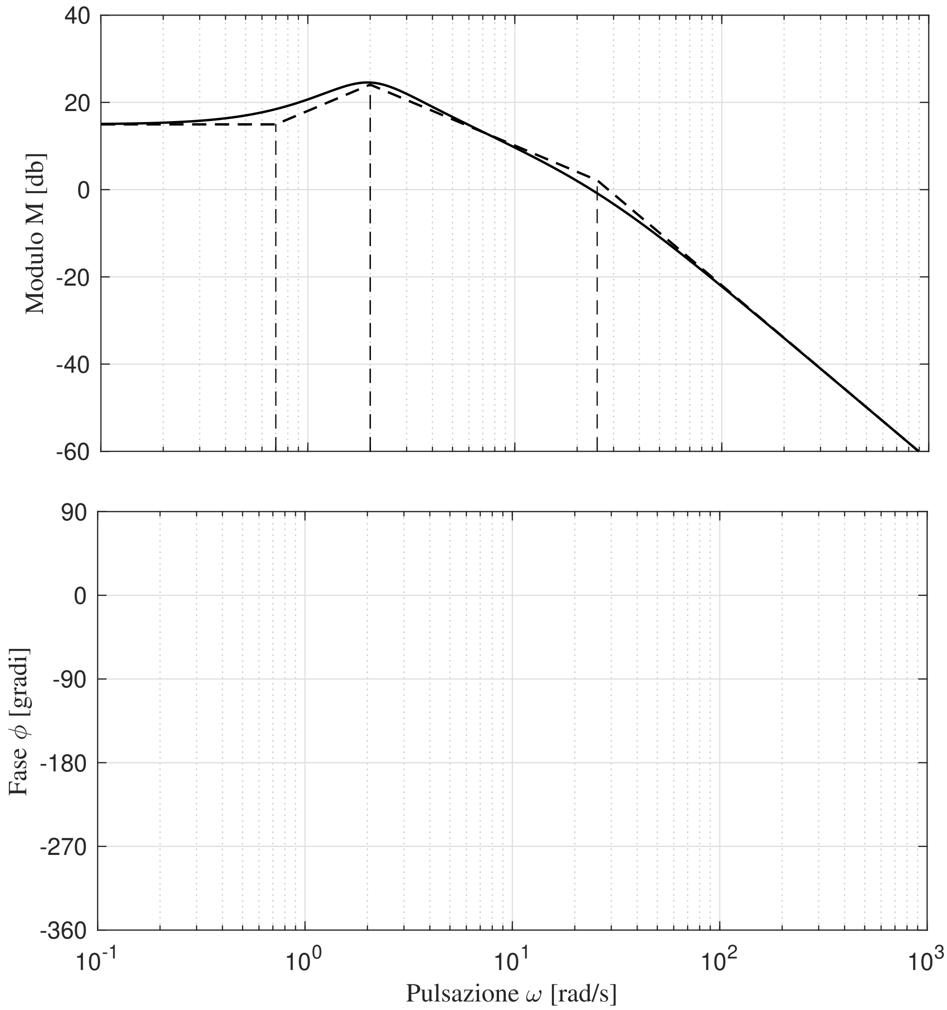
e.2) Posto $K = 1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4 + 2t$ e $d(t) = 3 + 2\sin(0.1t + \pi/2\text{rad})$.

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\pm j\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto.

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$, supposta a fase minima, mostrato in figura.

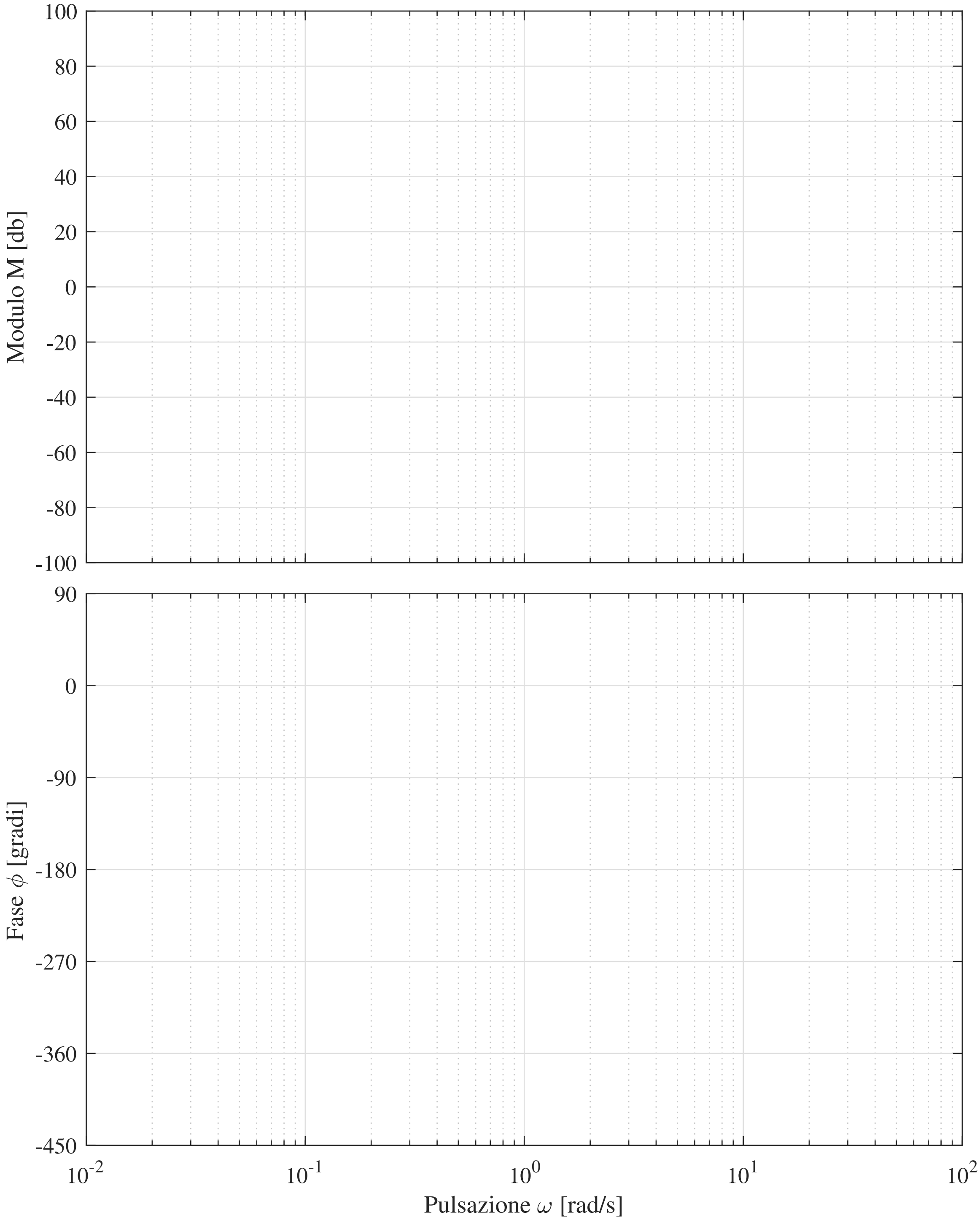


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Tracciare il diagramma delle fasi della funzione $G(s)$ e sulla base dei diagrammi di Bode (quindi senza fare calcoli analitici) valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema quando in ingresso è presente il segnale:

$$u(t) = 2 + 3\sin(6\,t)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 8 gennaio 2020 - Quiz A

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La derivata iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3+s}{9s-s^2}$ è pari a:

   ⊗ -1
   ○ 0
   ○ ∞
   ○ $1/3$

2. Linerizzando il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -x_1^3(t) + x_1(t) + x_2(t) + u(t) + 1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$ considerando l'ingresso costante $\bar{u} = -1$ e lo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, si ottiene un sistema lineare caratterizzato dalla matrice di stato:

   ○ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ⊗ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ○ $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ○ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ○ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino

4. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   ⊗ vale $\simeq -6$ dB
   ○ vale $\simeq -3$ dB
   ○ vale 1
   ⊗ vale 1/2

5. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

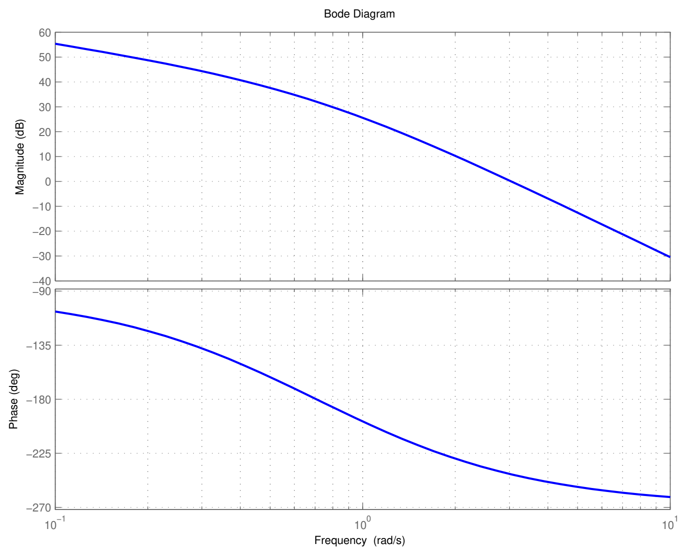
   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

6. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

$\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{s-7}{(s+7)(s^2+16)}$ $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{s-7}{s(s+4)^2}$

$\otimes$ $G(s) = \dfrac{s-7}{s^2(s+4)}$ $\otimes$ $G(s) = \dfrac{s+3}{(s^2-16)}$

7. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco relativi a un sistema $G(s)$ a fase minima. Il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ sono:



- $\bigcirc$ $M_a \simeq 32$ dB e $M_f \simeq -62°$
- $\bigcirc$ $M_a \simeq -32$ dB e $M_f \simeq 62°$
- $\otimes$ $M_a \simeq -32$ dB e $M_f \simeq -62°$
- $\bigcirc$ $M_a \simeq 32$ dB e $M_f \simeq 62°$

8. Se la risposta all'impulso di un sistema dinamico LTI presenta, tra gli altri, il modo temporale $te^{5t}\cos(3t)$ allora la funzione di trasferimento che modella tale sistema sarà certamente caratterizzata dal polo reale o dalla coppia di poli complessi coniugati:

- $\bigcirc$ 5 di molteplicità 2
- $\otimes$ $5 \pm j3$ di molteplicità 2
- $\bigcirc$ $-5 \pm j3$ di molteplicità 1
- $\bigcirc$ $3 \pm j5$ di molteplicità 2

9. Il sistema dinamico $\dot{x}(t) = \sin(t)x(t) + u(t)$ risulta

- $\bigcirc$ lineare, tempo-invariante
- $\bigcirc$ nonlineare, tempo-invariante
- $\bigcirc$ nonlineare, tempo-variante
- $\otimes$ lineare, tempo-variante

10. Quali di queste caratteristiche di un sistema dinamico del secondo ordine dipendono soltanto dal coefficiente di smorzamento δ?

- $\otimes$ Picco di risonanza M_R
- $\otimes$ Sorpasso percentuale $S\%$
- $\bigcirc$ Pulsazione di risonanza ω_R
- $\bigcirc$ Tempo di assestamento T_a

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 8 gennaio 2020 - Esercizi A

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-2\,t}\sin(5t)\right), \qquad x_2(t) = (1-t)e^{-3\,t+3},$$

dove $\frac{d}{dt}$ indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo

---

SOLUZIONE:

Detta $x_1'(t)$ la funzione $e^{-2\,t}\sin(5t)$ la cui trasformata vale $X_1'(s) = \frac{5}{(s+2)^2+25}$ si ha che la trasformata di Laplace di $x_1(t) = \frac{x_1'(t)}{dt}$ è

$$X_1(s) = sX_1'(s) - x_1'(0) = \frac{5s}{(s+2)^2+25}$$

essendo $x_1'(0) = 0$.

Non avendo specificato per quali valori di t la funzione $x_2(t)$ risulta nulla e assumendo come di default $x_2(t) = 0$ per $t < 0$, si può riscrivere la funzione come $x_2(t) = e^{-3\,t+3} - te^{-3\,t+3} = e^3\,e^{-3\,t} - e^3\,te^{-3\,t}$. Di conseguenza antitrasformando i singoli termini si ottiene

$$X_2(s) = \frac{e^3}{(s+3)} - \frac{e^3}{(s+3)^2}$$

Se invece si fosse assunto $x_2(t) = 0$ per $t < 1$ (ad esempio moltiplicando la funzione per un gradino unitario traslato nel tempo, cioè $x_2(t) = (1-t)e^{-3\,t+3}\,u_G(t-1)$), la $x_2(t)$ avrebbe dovuto essere riscritta come $x_2(t) = -(t-1)e^{-3(t-1)}\,u_G(t-1)$ la cui trasformata risulta

$$X_2(s) = -\frac{e^{-s}}{(s+3)^2}$$

---

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{6s^2+56s+76}{(s+9)(s^2+8s+20)}, \qquad G_2(s) = e^{-3s} + 2e^{-6s}$$

SOLUZIONE:

La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{2+3j}{s+4-2j} + \frac{2-3j}{s+4+2j} + \frac{2}{s+9}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 2Me^{-4t}\cos(2t+\varphi) + 2e^{9t} = 7.2111e^{-4t}\cos(2t+0.9828) + 2e^{-9t}$$

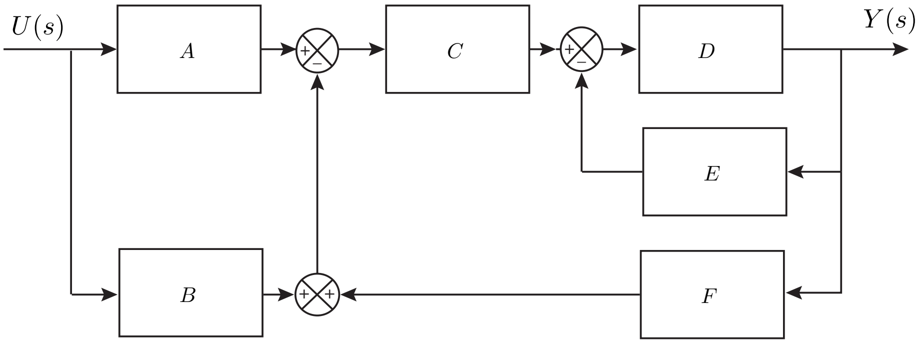
essendo $M = |2+3j| = 3.6056$ e $\varphi = \arg\{2+3j\} = 0.9828$ rad $= 56.3099^o$.

L'antitrasformata della funzione $G_2(s)$ è immediata (utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace e in particolare quella relativa ai ritardi temporali) e risulta

$$g_2(t) = \delta(t-3) + 2\delta(t-6)$$

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $U(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

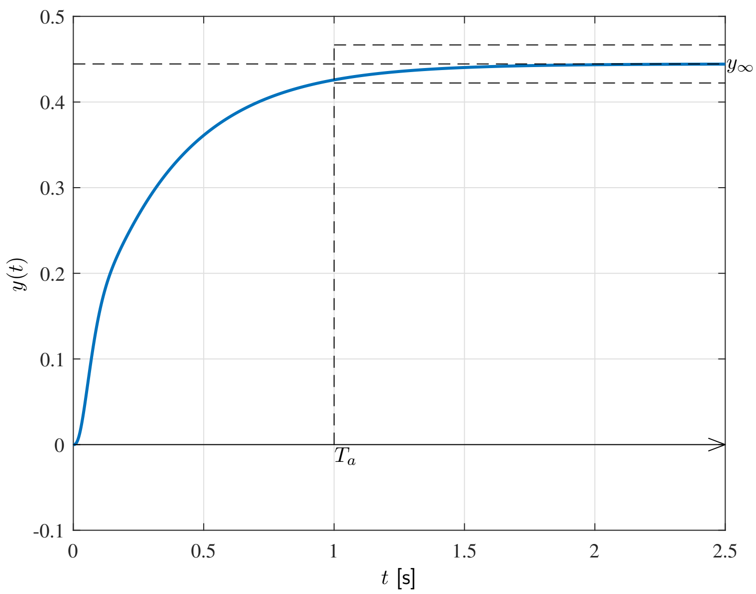
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ACD - BCD}{1 + CDF + DE}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{50(0.1s+1)}{(0.1s^2+6s+150)(3+s)(0.04s+2)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 8, $u(t) = 8$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:

Il sistema è caratterizzato da un polo dominante reale $p = -3$, per cui la risposta al gradino avrà un andamento aperiodico come quello mostrato in figura.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 8$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 8 \cdot 0.0556 = 0.4444$$

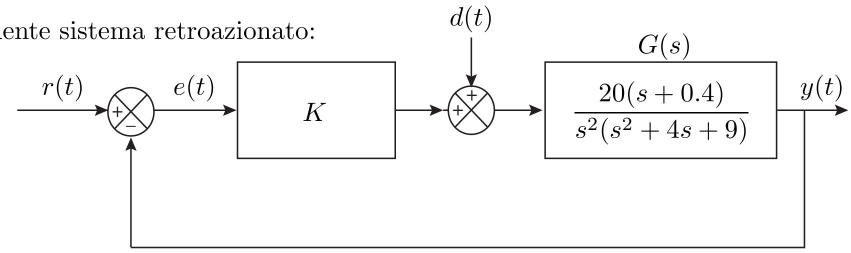
Essendo la costante di tempo associata al polo dominante pari a $\tau = \frac{1}{3}$ il tempo di assestamento risulterà

$$T_a = 3\tau = 1 \text{ s},$$

mentre non sono presenti oscillazioni nella risposta e pertanto

$$T_\omega = \nexists$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{20\,K(s+0.4)}{s^2(s^2+4s+9)} = 0 \qquad \to \qquad s^4 + 4\,s^3 + 9\,s^2 + 20Ks + 8K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc l}
4 & 1 & 9 & 8K & \\
3 & 4 & 20K & & \\
2 & 36-20K & 32K & & \to \;\; K < \frac{36}{20} = 1.8 \\
1 & (592-400K)K & & & \to \;\; 0 < K < \frac{592}{400} = 1.48 \\
0 & 32K & & & \to \;\; K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 1.48 = K^\star$$

e.2) Posto $K = 1$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato siano applicati contemporaneamente $r(t) = 4 + 2t$ e $d(t) = 3 + 2\sin(0.1t + \pi/2\text{rad})$.

SOLUZIONE:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. Senza fare alcun calcolo si può dire che a regime $e_r(\infty)$ sarà nullo, in quanto si considera un ingresso di riferimento composto da un gradino e da una rampa in un sistema di tipo 2(cioè con due poli nell'origine). Di conseguenza il calcolo dell'errore a regime si riduce a quello dovuto al segnale $d(t)$:

$$E(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{-20s-8}{s^4+4s^3+9s^2+20s+8}.$$

Essendo $d(t)$ costituito da una costante più un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si usa la sovrapposizione degli effetti e sfruttando il teorema del valore finale per l'ingresso costante e la funzione di risposta armonica per il termine sinusoidale, per cui

$$\begin{aligned}
e_d(t) &= \lim_{s\to 0} sF_d(s)\frac{3}{s} + 2|F_d(j0.1)|\sin(0.1\,t + \frac{\pi}{2} + \text{arg}\{F_d(j0.1)\}) \\
&= 3F_d(0) + 2|F_d(j0.1)|\sin(0.1\,t + \frac{\pi}{2} + \text{arg}\{F_d(j0.1)\}) \\
&= -3 + 2.0216\sin(0.1\,t + 4.7102\text{rad})
\end{aligned}$$

essendo $F_d(0) = -1$ e $|F_d(j0.1)| = 1.0108$, $\text{arg}\{F_d(j0.1)\} = -180.1259^o = -3.1438$ rad. In conclusione

$$e(\infty) = e_d(\infty) = -3 + 2.0216\sin(0.1\,t - 1.5730\text{rad}) = -3 + 2.0216\sin(0.1\,t - 90.1259^o)$$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

Vedi figura in fondo.

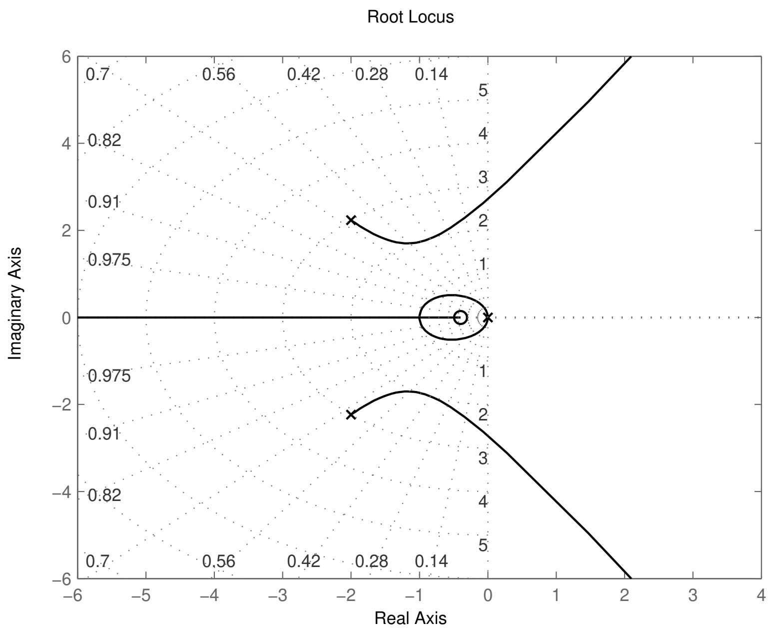
Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni $\pm j\omega^\star$ con l'asse immaginario e i corrispondenti valori $K^\star$ del guadagno.

SOLUZIONE:

Gli asintoti sono 3, essendo 3 il grado relativo, e sono centrati nel punto

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-4 + 0.4) = -1.2$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.

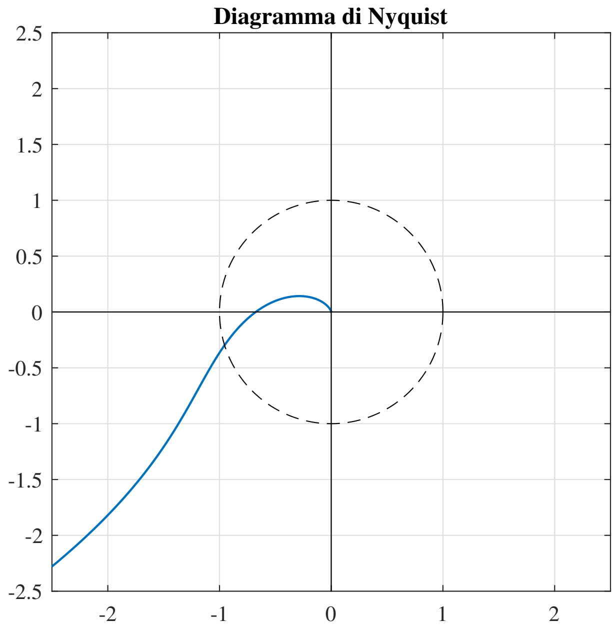


Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = j\omega^\star = j2.7203$ (poli ottenuti risolvendo l'equazione ausiliaria $6.4s^2 + 47.36 = 0$), per $K = K^\star = 1.48$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{8}{9s^2}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{20}{s^3}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{0.4} - \frac{4}{9} = 2.0556 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 2 pertanto non esiste alcun asintoto. Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -0.4 + 4 = 3.6 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

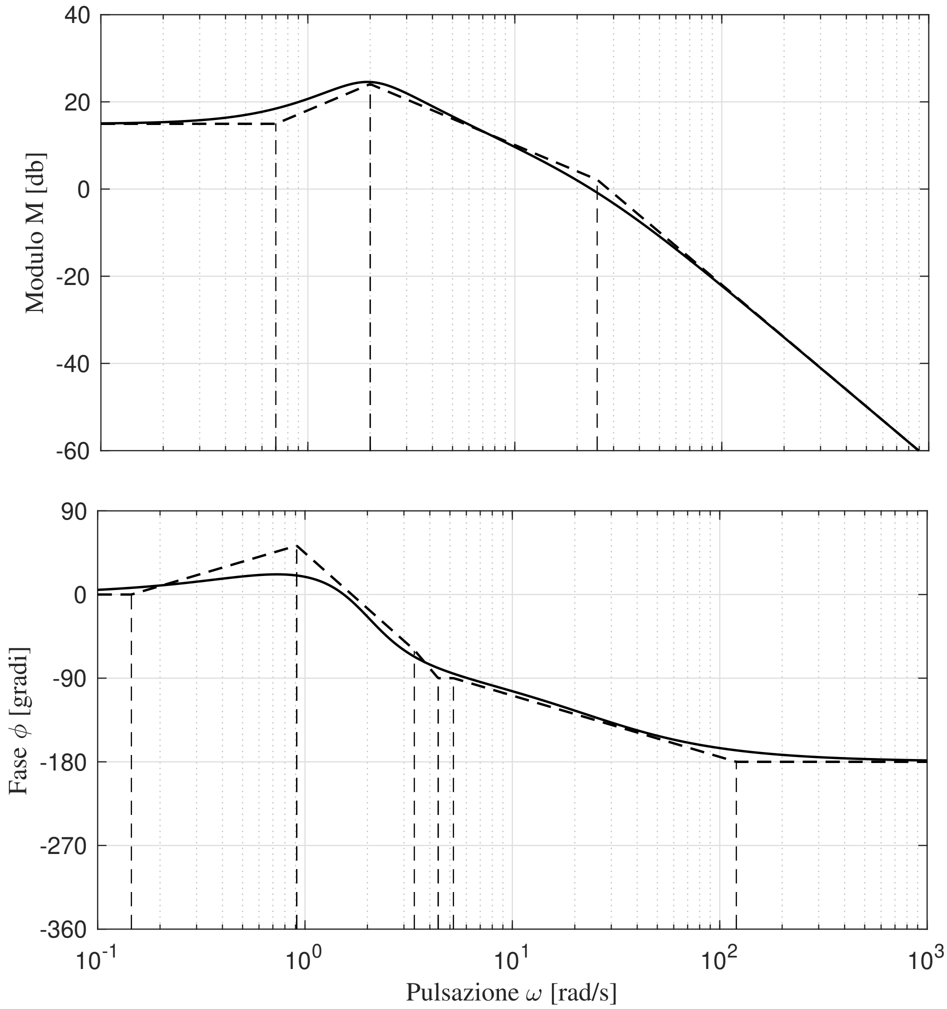
$$\Delta\varphi = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta in corrispondenza dell'ascissa

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -0.6757.$$

---

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$, supposta a fase minima, mostrato in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:
Dall'analisi del diagramma di Bode delle ampiezze si evince che il sistema la cui funzione di risposta armonica corrisponde al grafico di figura è

$$G(s) = 5.6234 \frac{(\frac{1}{0.7}s + 1)}{(\frac{s^2}{4} + \frac{1}{2}s + 1)(\frac{1}{25}s + 1)} \approx 800 \frac{(s + 0.7)}{(s^2 + 2s + 4)(s + 25)}.$$

Infatti il guadagno di bassa frequenza è $|G(0)| \approx 15$ db $= 5.6234$ e i due poli c.c. con $\omega_n = 2$rad/s sono caratterizati da $\delta = 0.5$ (il diagramma reale risulta praticamente coincidente con quello asintotico per $\omega = \omega_n$ per cui $M_{\omega_n} = 1$).

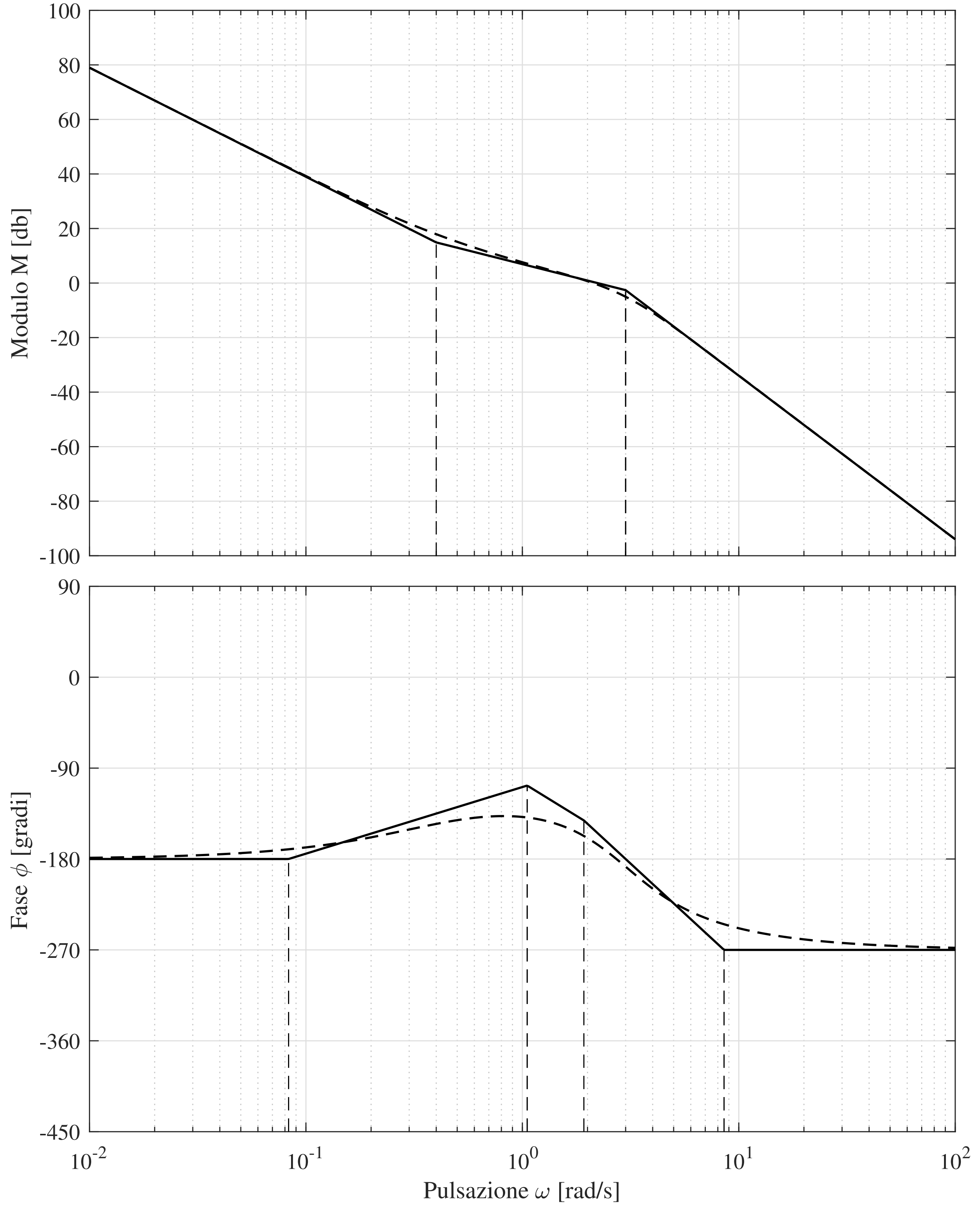
---

f.2) Tracciare il diagramma delle fasi della funzione $G(s)$ e sulla base dei diagrammi di Bode (quindi senza fare calcoli analitici) valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema quando in ingresso è presente il segnale:

$$u(t) = 2 + 3 \sin(6\,t).$$

SOLUZIONE:
Il diagramma delle fasi di $G(s)$ è riportato nello schema.
La risposta del sistema al segnale di ingresso $u(t)$ può essere valutata ricavando il guadagno statico di $G(s)$ e leggendo dai diagrammi di Bode modulo e argomento di $G(j\omega)$ in $\omega = 6$ rad/s .

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 2 \cdot G(j0) + 3 \cdot |G(j6)| \sin(6\,t + \arg\{G(j6)\}) \\ &\approx 11.2 + 16.5 \sin(6\,t - 1.5637) \\ &\approx 11.2 + 16.5 \sin(6\,t - 90^o). \end{aligned}$$


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Modulo M [db]
90
0
-90
-180
-270
-360
-450
Fase ϕ [gradi]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Pulsazione ω [rad/s]