

Cognome: _____

Nome: _____

N. Matr.:

Ho seguito il corso con

Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

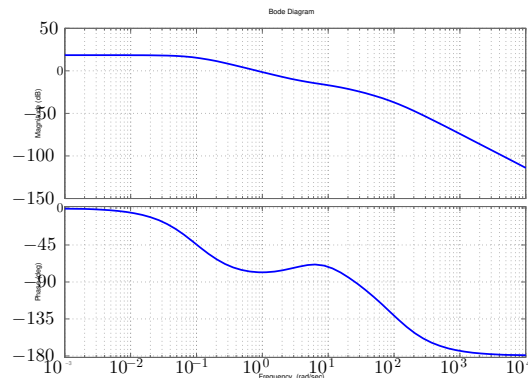
Compito del 20 febbraio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema dinamico descritto mediante i diagrammi di Bode di figura:

- il margine di ampiezza è infinito
 il margine di ampiezza vale circa -75 db
 il margine di ampiezza vale circa -25 db
 non è possibile calcolare il valore del margine di ampiezza



2. Dato un impianto caratterizzato da un disturbo “d” sull’uscita non trascurabile nell’intervallo di frequenze $[0, 1]$ rad/sec, al fine di ottenerne un’attenuazione di almeno 100 volte il regolatore in retroazione dovrà garantire che la funzione di anello sia:

- $|L(j\omega)| > 100\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| > 40\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| > 20\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| < -40\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec

3. La funzione di sensitività $S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$ mette in relazione

- il disturbo sull’uscita “d” con l’uscita medesima
 il disturbo di misura “n” con l’uscita
 il riferimento (*set-point*) con l’errore di inseguimento
 le variazioni parametriche dell’impianto $\Delta G/G$ e quelle del sistema retroazionato $\Delta F/F$

4. Dato un sistema in retroazione affetto da un ritardo τ nella funzione di anello e caratterizzato da una pulsazione di incrocio ω_c e da un margine di fase M_f , la stabilità del sistema è garantita se:

- $\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$
 $\tau > \frac{M_f}{\omega_c}$
 $\tau < M_f \cdot \omega_c$
 $\tau > M_f \cdot \omega_c$

5. Il controllo ad azione diretta (*feedforward*) presenta i seguenti vantaggi:

- ottime performance in condizioni non nominali
 robustezza rispetto a rumore sull’uscita
 non necessità di una conoscenza precisa del plant
 ottenimento di tempi di assestamento molto inferiori a quelli ottenibili con il solo controllore in retroazione (*feedback*)

6. La progettazione di una rete correttiva per cancellazione:

- permette di imporre in maniera esatta sia il margine di ampiezza che la pulsazione di incrocio della funzione di anello
- è utile per evitare l'insorgere di code di assestamento
- può essere effettuata cancellando qualunque polo dell'impianto, anche instabile
- può essere infattibile nel caso non si riesca a ottenere il margine di fase desiderato alla pulsazione di incrocio scelta

7. In un regolatore PID, l'azione derivativa:

- introduce un anticipo di fase
- serve per ridurre lo sforzo di controllo
- può produrre un'azione di controllo molto grande a seguito dell'applicazione di un ingresso a gradino
- garantisce errore a regime nullo

8. Dato l'impianto $G(s) = G_1(s)G_2(s)$, con la dinamica $G_1(s)$ collocata a monte di $G_2(s)$, volendo progettare un sistema di controllo in cascata:

- il segnale tra $G_1(s)$ e $G_2(s)$ deve essere accessibile per la misura
- è necessario poter controllare il segnale in ingresso a $G_2(s)$
- la banda dell'anello interno che si vuole ottenere deve essere sensibilmente più larga di quella dell'anello esterno
- la velocità di risposta del sistema è determinata dall'ampiezza di banda dell'anello interno

9. Dato un sistema caratterizzato da un elevato rumore di misura alla frequenza $f_n = 1$ KHz, al fine di evitare un'amplificazione del rumore stesso dovuto al fenomeno dell'aliasing e in mancanza di filtro anti-aliasing opportuno, la pulsazione di campionamento ω_s del regolatore tempo-discreto utilizzato per controllarlo dovrà essere:

- $\omega_s > 2f_n = 2000$ rad/sec
- $\omega_s > 4\pi f_n = 12566$ rad/sec
- $\omega_s < 1/2f_n = 500$ rad/sec
- $\omega_s < \pi f_n = 3141$ rad/sec

10. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:

- l'accelerazione massima si riduce di un fattore 2
- l'accelerazione massima si riduce di un fattore 4
- l'accelerazione massima aumenta di un fattore 4
- l'accelerazione massima aumenta di un fattore 2

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Ho seguito il corso con Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 20 febbraio 2019 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Dopo aver illustrato la definizione e il significato del margine di fase e del margine di ampiezza, enunciare il criterio di Bode per la stabilità dei sistemi retroazionati.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{4(s+2)}{(s+0.5)(s^2+5s+16)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche e dinamiche:

- errore di velocità (ovvero a regime per ingresso di riferimento a rampa) inferiore al 10%: $e_v \leq 10\%$;
- risposta aperiodica;
- tempo di assestamento $T_a \leq 0.15s$;
- azione di controllo più piccola possibile.

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

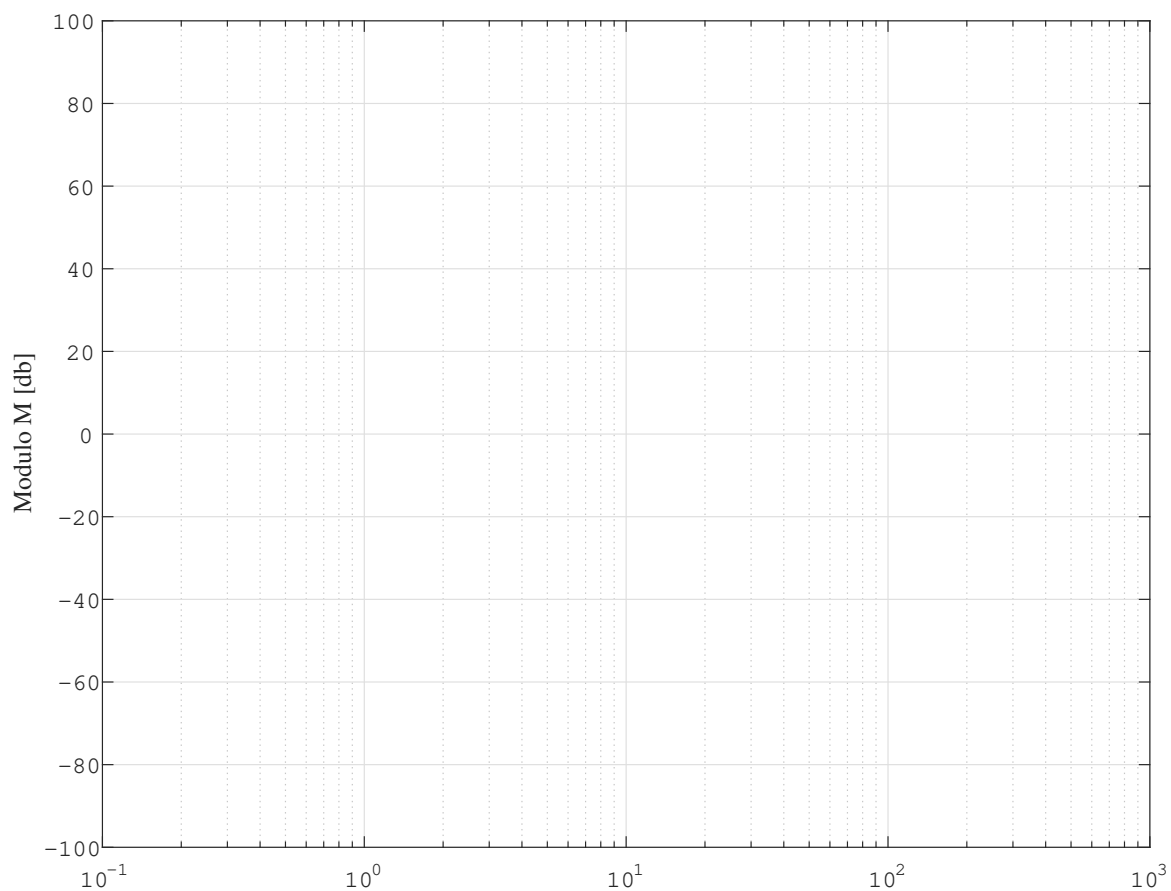
- a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.
- b) Tracciare il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$. Quindi sovrapporre a questo il diagramma della funzione di sensitività $S(s)$ e (a partire dal diagramma) valutare l'attenuazione a regime di un disturbo $d(t) = \sin(0.3t)$
- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.
- d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione la banda del sistema retroazionato e il fatto che si voglia inserire nella retroazione un filtro anti-aliasing di ordine 2, che senza alterare in maniera significativa la funzione d'anello (e in particolare il margine di fase), garantisca alla pulsazione di Nyquist un'attenuazione di 40 dB (si riporti l'espressione del filtro anti-aliasing). Discretizzare il regolatore con il metodo di Tustin.
- e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$.

Biagiotti - f) Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 10$ e $q_1 = -10$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 20$ e $a_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda $[0, 2]$ rad/s. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -10$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 10$ ($t_1 = 2T$).

Cognome:

Nome:

N. Matr.:



Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Ho seguito il corso con Prof Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

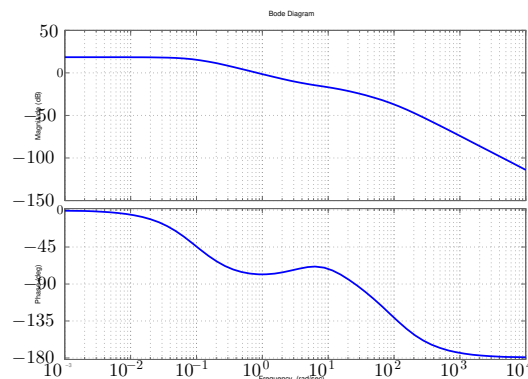
Compito del 20 febbraio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema dinamico descritto mediante i diagrammi di Bode di figura:

- il margine di ampiezza è infinito
 il margine di ampiezza vale circa -75 db
 il margine di ampiezza vale circa -25 db
 non è possibile calcolare il valore del margine di ampiezza



2. Dato un impianto caratterizzato da un disturbo “d” sull’uscita non trascurabile nell’intervallo di frequenze $[0, 1]$ rad/sec, al fine di ottenerne un’attenuazione di almeno 100 volte il regolatore in retroazione dovrà garantire che la funzione di anello sia:

- $|L(j\omega)| > 100\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| > 40\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| > 20\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec
 $|L(j\omega)| < -40\text{db}$, per $\omega \in [0, 1]$ rad/sec

3. La funzione di sensitività $S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$ mette in relazione

- il disturbo sull’uscita “d” con l’uscita medesima
 il disturbo di misura “n” con l’uscita
 il riferimento (*set-point*) con l’errore di inseguimento
 le variazioni parametriche dell’impianto $\Delta G/G$ e quelle del sistema retroazionato $\Delta F/F$

4. Dato un sistema in retroazione affetto da un ritardo τ nella funzione di anello e caratterizzato da una pulsazione di incrocio ω_c e da un margine di fase M_f , la stabilità del sistema è garantita se:

- $\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$
 $\tau > \frac{M_f}{\omega_c}$
 $\tau < M_f \cdot \omega_c$
 $\tau > M_f \cdot \omega_c$

5. Il controllo ad azione diretta (*feedforward*) presenta i seguenti vantaggi:

- ottime performance in condizioni non nominali
 robustezza rispetto a rumore sull’uscita
 non necessità di una conoscenza precisa del plant

- ottenimento di tempi di assestamento molto inferiori a quelli ottenibili con il solo controllore in retroazione (*feedback*)
6. La progettazione di una rete correttiva per cancellazione:
- permette di imporre in maniera esatta sia il margine di ampiezza che la pulsazione di incrocio della funzione di anello
 - è utile per evitare l'insorgere di code di assestamento
 - può essere effettuata cancellando qualunque polo dell'impianto, anche instabile
 - può essere infattibile nel caso non si riesca a ottenere il margine di fase desiderato alla pulsazione di incrocio scelta
7. In un regolatore PID, l'azione derivativa:
- introduce un anticipo di fase
 - serve per ridurre lo sforzo di controllo
 - può produrre un'azione di controllo molto grande a seguito dell'applicazione di un ingresso a gradino
 - garantisce errore a regime nullo
8. Dato l'impianto $G(s) = G_1(s)G_2(s)$, con la dinamica $G_1(s)$ collocata a monte di $G_2(s)$, volendo progettare un sistema di controllo in cascata:
- il segnale tra $G_1(s)$ e $G_2(s)$ deve essere accessibile per la misura
 - è necessario poter controllare il segnale in ingresso a $G_2(s)$
 - la banda dell'anello interno che si vuole ottenere deve essere sensibilmente più larga di quella dell'anello esterno
 - la velocità di risposta del sistema è determinata dall'ampiezza di banda dell'anello interno
9. Dato un sistema caratterizzato da un elevato rumore di misura alla frequenza $f_n = 1$ KHz, al fine di evitare un'amplificazione del rumore stesso dovuto al fenomeno dell'aliasing e in mancanza di filtro anti-aliasing opportuno, la pulsazione di campionamento ω_s del regolatore tempo-discreto utilizzato per controllarlo dovrà essere:
- $\omega_s > 2f_n = 2000$ rad/sec
 - $\omega_s > 4\pi f_n = 12566$ rad/sec
 - $\omega_s < 1/2f_n = 500$ rad/sec
 - $\omega_s < \pi f_n = 3141$ rad/sec
10. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:
- l'accelerazione massima si riduce di un fattore 2
 - l'accelerazione massima si riduce di un fattore 4
 - l'accelerazione massima aumenta di un fattore 4
 - l'accelerazione massima aumenta di un fattore 2

Cognome: _____

Nome: _____

N. Matr.: Ho seguito il corso con Prof. Giarré Prof. Biagiotti

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 20 febbraio 2019 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Dopo aver illustrato la definizione e il significato del margine di fase e del margine di ampiezza, enunciare il criterio di Bode per la stabilità dei sistemi retroazionati.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{4(s+2)}{(s+0.5)(s^2+5s+16)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche e dinamiche:

- errore di velocità (ovvero a regime per ingresso di riferimento a rampa) inferiore al 10%: $e_v \leq 10\%$;
- risposta aperiodica;
- tempo di assestamento $T_a \leq 0.15s$;
- azione di controllo più piccola possibile.

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.

SOLUZIONE:

Il soddisfacimento della specifica statica (errore di velocità limitato) richiede almeno un polo nell'origine (essendo l'impianto di tipo 0) e pertanto il regolatore $R(s)$ potrà avere la forma di un PI o un PID. Inoltre il guadagno di tale regolatore non sarà vincolato dal soddisfacimento della specifica sull'errore di velocità:

$$e_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sL(s)} \leq 0.1. \quad (1)$$

Dalle altre specifiche discendono i seguenti vincoli frequenziali:

- risposta aperiodica $\rightarrow M_f^* \geq 80^\circ$;
- tempo di assestamento $T_a \leq 0.15s \rightarrow \frac{3}{\omega_c} \leq 0.15 \rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{0.15} = 20 \text{ rad/s}$;

Dal momento che viene richiesto di minimizzare l'azione di controllo, si assumerà la minima pulsazione di incrocio compatibile con le altre specifiche. Perciò $\omega_c^* = 20 \text{ rad/s}$.

Alla pulsazione $\omega_c^* = 20$, il valore dell'argomento dell'impianto esteso $G_e(s) = \frac{G(s)}{s}$ vale $\arg\{G_e(j20)\} = -259.6819^\circ$. Di conseguenza l'aggiunta dello zero di un semplice PI consentirebbe al più di ottenere un margine di fase 10.3181° . Pertanto sarà necessario un regolatore PID.

Per la progettazione iniziale del PI $R_{PI}(s) = \mu \frac{\tau_z s + 1}{s}$ si procede per cancellazione con il polo reale dell'impianto che precede ω_c^* . Pertanto si assume $\tau_z = 1/0.5 = 2$. Il guadagno μ viene selezionato imponendo il soddisfacimento della specifica statica sull'errore di velocità e_v . Dalla condizione (1) si ricava

$$\frac{1}{\mu G(0)} \leq 0.1 \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{0.1} = 10$$

essendo $G(0) = 1$. Ovviamente si assume il valore minimo $\mu = 10$.

L'espressione del regolatore PI risulta

$$R_{PI}(s) = 10 \frac{2s+1}{s}$$

Una volta realizzato il regolatore PI, la progettazione della rete di anticipo che compone il PID deve essere svolta a partire dal sistema esteso (denominato $G_{e1}(s)$) composto dall'impianto e dal regolatore $R_{PI}(s)$

$$G_{e1}(s) = R_{PI}(s)G(s) = \frac{80(s+2)}{s(s^2+5s+16)}$$

e imponendo la pulsazione di incrocio desiderata $\omega_c^* = 20 \text{ rad/s}$ e il margine di fase $M_f^* = 80^\circ$. Occorre pertanto calcolare modulo e argomento per $\omega = \omega_c^* = 20$ di $G_{e1}(s)$:

$$|G_{e1}(j20)| = 0.2026, \quad \arg\{G_{e1}(j20)\} = -171.1140^\circ.$$

I parametri della rete anticipatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^* = \frac{1}{|G_{e1}(j15)|} = 4.9355 \geq 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{e1}(j15)) = 71.1140^\circ \leq 90^\circ$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^*) \geq \frac{1}{M^*} \Rightarrow 0.3237 > 0.2026,$$

dalle formule di inversione si ricava che $\tau = 0.2437$ e $\alpha = 0.0263$ per cui

$$R_a(s) = \frac{0.2437 s + 1}{0.006398 s + 1}$$

e alla fine il regolatore complessivo risulta

$$R_{PID}(s) = 10 \frac{(2s + 1)(0.2437s + 1)}{s(0.006398s + 1)}$$

- b) Tracciare il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$. Quindi sovrapporre a questo il diagramma della funzione di sensitività $S(s)$ e (a partire dal diagramma) valutare l'attenuazione a regime di un disturbo $d(t) = \sin(0.3t)$

SOLUZIONE:

Vedere diagramma in fondo. Come si evince dal diagramma $|S(j\omega)|$, il cui valore alla pulsazione $\omega = 0.3 \text{ rad/s}$ vale circa -30db , l'attenuazione del disturbo è pari a $A = -30\text{db} = 0.0316$ (il valore analitico sarebbe $|S(j0.3)| = 0.0294$).

- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

SOLUZIONE:

Per trovare l'espressione analitica dell'azione in avanti occorre invertire la funzione di trasferimento dell'impianto

$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s^3 + 5.5s^2 + 18.5s + 8}{4s + 8}$$

dove la funzione di trasferimento ha grado relativo -2 , per cui non fisicamente realizzabile. Dal momento che l'espressione analitica di $y_{sp}(t)$ e delle sue derivate risulta nota, è possibile implementare $R_{ff}(s)$ dividendone il numeratore per il denominatore e ottenendo in questo modo

$$R_{ff} = 0.25 s^2 + 0.875 s + 2.875 + \frac{-15}{4s + 8}$$

da cui

$$U_{ff}(s) = 0.25 s^2 Y_{sp}(s) + 0.875 s Y_{sp}(s) + 2.875 Y_{sp}(s) + \frac{-15}{4s + 8} Y_{sp}(s)$$

↓

$$u_{ff}(t) = 0.25 y_{sp}^{(2)}(t) + 0.875 y_{sp}^{(1)}(t) + 2.875 y_{sp}(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-15}{4s + 8} Y_{sp}(s) \right\}$$

- d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione la banda del sistema retroazionato e il fatto che si voglia inserire nella retroazione un filtro anti-aliasing di ordine 2, che senza alterare in maniera significativa la funzione d'anello (e in particolare il margine di fase), garantisca alla pulsazione di Nyquist un'attenuazione di 40 dB (si riporti l'espressione del filtro anti-aliasing). Discretizzare il regolatore con il metodo di Tustin.

SOLUZIONE:

La specifica sulla banda passante del sistema comporta che $\omega_s = 10\omega_c = 200$ da cui $T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0314$ s. La specifica sul filtro anti-aliasing richiede innanzitutto la definizione del filtro stesso, che non dovendo perturbare la fase della funzione di anello, dovrà avere una pulsazione di taglio ω_T (ovvero il punto di rottura del diagramma di Bode delle ampiezze) almeno una decade a destra rispetto alla $\omega_c (= 20 \text{ rad/s})$ di $L(s)$, quindi $\omega_T = 200 \text{ rad/s}$ e

$$H_{aa}(s) = \frac{200^2}{s^2 + 282.8s + 200^2}.$$

Essendo il filtro del secondo ordine, per garantire 40 db di attenuazione la pulsazione di Nyquist dovrà essere collocata un decade a destra rispetto a ω_{aa} per cui

$$\frac{\omega_s}{2} = 10\omega_{aa} = 2000 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 4000 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0016 \text{ s}.$$

Occorre pertanto assumere il valore di T più basso tra quelli trovati (ovvero 0.0016 s). Arrotondando si assume $T = 0.001$ s.

Sostituendo $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ la funzione di trasferimento del regolatore discretizzata risulta

$$R_{\text{PID}}(s) = 10 \frac{(2s + 1)(0.2437s + 1)}{s(0.006398s + 1)}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{708.2 - 1413z^{-1} + 705z^{-2}}{1 - 1.855z^{-1} + 0.855z^{-2}} = \frac{708.2z^2 - 1413z + 705}{z^2 - 1.855z + 0.855}$$

- e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$.

SOLUZIONE:

Interpretando z^{-1} come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che l'equazione alle differenze corrispondente a $R(z)$ è

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{708.2 - 1413z^{-1} + 705z^{-2}}{1 - 1.855z^{-1} + 0.855z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\Downarrow$$

$$u_k = 1.855 u_{k-1} - 0.855 u_{k-2} + 708.2e_k - 1413e_{k-1} + 705e_{k-2}$$

- Biagiotti - f)** Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 10$ e $q_1 = -10$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 20$ e $a_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda $[0, 2]$ rad/s. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -10$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 10$ ($t_1 = 2T$).

SOLUZIONE:

L'espressione della traiettoria cicloidale è

$$q(t) = hq_N(\tau) \Big|_{\tau = \frac{t-t_0}{T}} + q_0$$

dove $q_N(\tau)$ è la corrispondente espressione normalizzata

$$q_N(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau.$$

Nel caso in esame lo spostamento in modulo vale $|h| = q_1 - q_0 = 20$ mentre la durata T deve essere determinata sulla base dei vincoli. In particolare, dai limiti su velocità e accelerazione risulta

$$q_{max}^{(1)} = \frac{|h|}{T} q_{N\ max}^{(1)} \leq v_{max} \Rightarrow T \geq 20 \frac{2}{20} = 2 \text{ s}$$

$$q_{max}^{(2)} = \frac{|h|}{T^2} q_{N\ max}^{(2)} \leq a_{max} \Rightarrow T \geq \sqrt{20 \frac{2\pi}{40}} = 1.7725 \text{ s}$$

mentre la specifica di tipo frequenziale relativa al fatto di collocare lo spettro della traiettoria nella banda $[0, 2]$ rad/s si traduce in

$$\frac{2\pi}{T} \leq 2 \Rightarrow T \geq \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Si noti infatti che lo spettro dell'accelerazione della traiettoria cicloidale ($\sim \sin(\frac{2\pi}{T}t)$) è composto da una sola riga a pulsazione $\frac{2\pi}{T}$.

Il vincolo più stringente (che porta la periodo più lungo) è quello frequenziale, per cui si assumerà $T = \pi$ s. Sostituendo nell'espressione della traiettoria si ottiene

$$q(t) = 10 - 20 \left(\frac{t}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2t) \right)$$

mentre il ritorno risulta

$$q(t) = -10 + 20 \left(\frac{t - \pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2(t - \pi)) \right).$$

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

