

Cognome:

Nome:

N. Matr.:  Sistemi di Controllo Controlli Automatici Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_ Intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

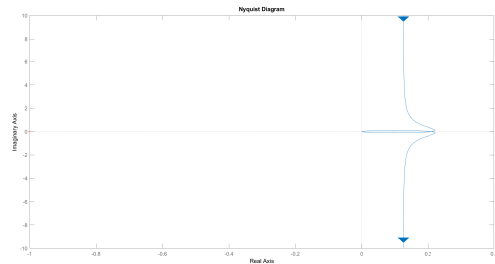
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 16 gennaio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. (**Giarré**) dato il diagramma di Nyquist in figura, di un sistema  $L(s)$  che presenta ad anello aperto un polo stabile, un polo nell'origine e un polo instabile, si dica se il sistema ad anello chiuso della funzione di anello  $KL(s)$  è stabile o instabile al variare di  $K$ .



- stabile per ogni  $K > 0$
- instabile per ogni  $K > 0$
- stabile per ogni  $K < 0$
- instabile per ogni  $K < 0$ .

2. (**Biagiotti**) Qual è il minimo ordine di continuità di una traiettoria che garantisca un'azione di controllo in avanti limitata per un impianto avente 4 poli e 2 zeri:

- 1
- 2
- 3
- 4

3. Dato un sistema di controllo in retroazione che garantisce un margine di fase della funzione di anello  $M_f = 90^\circ$ , i poli dominanti (o il polo dominante) della funzione di sensitività complementare saranno caratterizzati da un coefficiente di smorzamento che, approssimativamente, vale:

- $\delta \approx 0.1$
- $\delta \approx 0.45$
- $\delta \approx 0.9$
- $\delta \approx 1$

4. In un sistema in retroazione unitaria, per avere errore a regime nullo a fronte di un riferimento sinusoidale  $\sin(\bar{\omega}t)$  è necessario che:

- la funzione d'anello abbia un polo reale singolo in  $-\bar{\omega}$
- la funzione di sensitività abbia modulo nullo alla pulsazione  $\bar{\omega}$  ( $|S(j\bar{\omega})| = 0$ )
- la funzione d'anello abbia un polo reale doppio in  $-\bar{\omega}$
- la funzione di sensitività complementare abbia modulo nullo alla pulsazione  $\bar{\omega}$  ( $|F(j\bar{\omega})| = 0$ )

5. Dato un sistema di controllo in retroazione, un disturbo di tipo "n" sovrapposto alla variabile retroazionata:

- se costante può essere cancellato completamente mediante l'inserimento nella funzione di anello di un polo nell'origine
- può essere attenuato alzando sufficientemente il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo
- se costituito da un'unica sinusoide a frequenza  $\bar{\omega}_n$  può essere cancellato perfettamente introducendo nella funzione di anello una coppia di poli puramente immaginari  $\pm j\bar{\omega}_n$
- può essere attenuato riducendo sufficientemente il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo

6. La compensazione in avanti di un disturbo misurabile può servire per:
- compensare un disturbo di misura ad alta frequenza
  - cancellare un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita senza la necessità di un controllo in retroazione
  - ridurre un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita qualora i vincoli di progetto sul controllo in retroazione non consentano di ridurlo a sufficienza
  - allargare la banda del sistema in retroazione in cui è inserito
7. Il progetto per cancellazione di una rete anticipatrice:
- se fattibile, consente di eliminare il problema delle code di assestamento per impianti senza zeri
  - è possibile se fissata la posizione dello zero la frequenza di attraversamento è minore di quella desiderata
  - prevede la cancellazione di un polo del sistema a frequenza maggiore della frequenza di attraversamento
8. Dato un sistema di controllo in retroazione, l'intervallo di pulsazioni in cui far cadere la pulsazione di incrocio  $\omega_c$  del guadagno d'anello:
- è determinato dalla massima sovraelongazione ammissibile nella risposta del sistema a un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di disturbi di misura
  - è limitato inferiormente dal vincolo di errore a regime nullo a fronte di un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di ritardi temporali nell'anello di controllo
9. La desaturazione dell'azione integrale di un regolatore PI(D):
- richiede un modello della saturazione dell'attuatore
  - serve a evitare che l'azione di controllo diventi infinita quando si hanno discontinuità nell'ingresso di riferimento
  - richiede un modello preciso dell'impianto controllato
  - riduce la durata del transitorio, anche se la variabile controllata non raggiunge il livello della saturazione
10. Un sistema di controllo in retroazione tempo-continuo che garantisce la stabilità asintotica del sistema complessivo può diventare instabile quando viene discretizzato?
- sì, se il regolatore viene discretizzato con la tecnica delle differenze all'avanti
  - sì, se a causa del tempo di campionamento scelto il ricostruttore rende negativo il margine di fase del guadagno d'anello
  - sì, se il tempo di campionamento è troppo basso
  - no, mai
11. In un sistema di controllo digitale, il fenomeno dell'aliasing:
- consiste in una sovrapposizione frequenziale della componente primaria e di quelle secondarie che costituiscono lo spettro del segnale campionato
  - può essere ridotto abbassando la pulsazione di campionamento del regolatore
  - può essere ridotto abbassando il periodo di campionamento del regolatore
  - è più accentuato se vengono impiegati regolatori passa alto piuttosto che regolatori passa basso

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Sistemi di Controllo

Controlli Automatici

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_

Intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 16 gennaio 2019 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Illustrare l'utilità e i diversi scenari applicativi del prefiltraggio del segnale di riferimento in sistemi di controllo in retroazione.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{26}{(s + 0.2)(s^2 + 25s + 400)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di posizione (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a gradino) nullo;
- attenuazione di almeno 200 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione  $\omega_d = 0.05$  rad/s;

e dinamiche:

- massimo sorpasso percentuale  $S\% \leq 10\%$ ;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione  $\omega_n = 150$  rad/s;
- tempo di assestamento  $T_a \leq 0.1$ s;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- Progettare il regolatore  $R(s)$  di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto  $G(s)$  consenta di soddisfare (quasi) tutte le specifiche indicate in alto, tenendo presente che al punto c) è richiesta la progettazione di un prefiltro.
- Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- Progettare il prefiltro  $R_{pf}(s)$  che consenta il soddisfacimento di tutte le specifiche inizialmente richieste.
- Volendo discretizzare sia il regolatore  $R(s) = R_s(s)R_d(s)$  che prefiltro  $R_{pf}(s)$  scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione:
  - la banda del sistema in anello chiuso
  - la banda del sistema complessivo con il prefiltro
  - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a  $5^\circ$

Discretizzare il regolatore con il metodo di Tustin.

e) Scrivere le equazioni alle differenze corrispondenti ai due sistemi discretizzati al punto precedente

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \text{ e } R_{pf}(z) = \frac{Y(z)}{Q(z)}.$$

**Biagiotti** - f) Scrivere l'espressione di una traiettoria trapezoidale tra  $q_0 = 10$  e  $q_1 = 50$  ( $t_0 = 0$ ) di durata complessiva  $T = 0.4$ s e con durata del periodo di accelerazione/decelerazione  $T_a = \frac{T}{2}$ . In particolare calcolare i valori massimi di velocità e accelerazione raggiunti.

Cognome: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

N. Matr.:       Sistemi di Controllo Controlli Automatici Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_ Intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

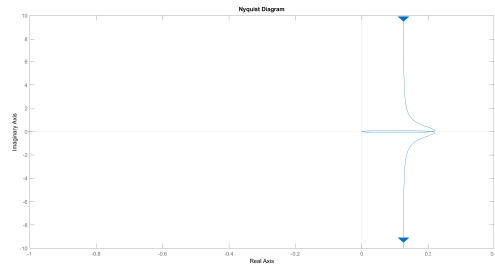
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 16 gennaio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. (**Giarré**) dato il diagramma di Nyquist in figura, di un sistema  $L(s)$  che presenta ad anello aperto un polo stabile, un polo nell'origine e un polo instabile, si dica se il sistema ad anello chiuso della funzione di anello  $KL(s)$  è stabile o instabile al variare di  $K$ .



- stabile per ogni  $K > 0$   
 instabile per ogni  $K > 0$   
 stabile per ogni  $K < 0$   
 instabile per ogni  $K < 0$ .

2. (**Biagiotti**) Qual è il minimo ordine di continuità di una traiettoria che garantisca un'azione di controllo in avanti limitata per un impianto avente 4 poli e 2 zeri:

- 1  
 2  
 3  
 4

3. Dato un sistema di controllo in retroazione che garantisce un margine di fase della funzione di anello  $M_f = 90^\circ$ , i poli dominanti (o il polo dominante) della funzione di sensibilità complementare saranno caratterizzati da un coefficiente di smorzamento che, approssimativamente, vale:

- $\delta \approx 0.1$   
  $\delta \approx 0.45$   
  $\delta \approx 0.9$   
  $\delta \approx 1$

4. In un sistema in retroazione unitaria, per avere errore a regime nullo a fronte di un riferimento sinusoidale  $\sin(\bar{\omega}t)$  è necessario che:

- la funzione d'anello abbia un polo reale singolo in  $-\bar{\omega}$   
 la funzione di sensibilità abbia modulo nullo alla pulsazione  $\bar{\omega}$  ( $|S(j\bar{\omega})| = 0$ )  
 la funzione d'anello abbia un polo reale doppio in  $-\bar{\omega}$   
 la funzione di sensibilità complementare abbia modulo nullo alla pulsazione  $\bar{\omega}$  ( $|F(j\bar{\omega})| = 0$ )

5. Dato un sistema di controllo in retroazione, un disturbo di tipo "n" sovrapposto alla variabile retroazionata:

- se costante può essere cancellato completamente mediante l'inserimento nella funzione di anello di un polo nell'origine  
 può essere attenuato alzando sufficientemente il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo  
 se costituito da un'unica sinusoide a frequenza  $\bar{\omega}_n$  può essere cancellato perfettamente introducendo nella funzione di anello una coppia di poli puramente immaginari  $\pm j\bar{\omega}_n$   
 può essere attenuato riducendo sufficientemente il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo

6. La compensazione in avanti di un disturbo misurabile può servire per:
- compensare un disturbo di misura ad alta frequenza
  - cancellare un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita senza la necessità di un controllo in retroazione
  - ridurre un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita qualora i vincoli di progetto sul controllo in retroazione non consentano di ridurlo a sufficienza
  - allargare la banda del sistema in retroazione in cui è inserito
7. Il progetto per cancellazione di una rete anticipatrice:
- se fattibile, consente di eliminare il problema delle code di assestamento per impianti senza zeri
  - è possibile se fissata la posizione dello zero la frequenza di attraversamento è minore di quella desiderata
  - prevede la cancellazione di un polo del sistema a frequenza maggiore della frequenza di attraversamento
8. Dato un sistema di controllo in retroazione, l'intervallo di pulsazioni in cui far cadere la pulsazione di incrocio  $\omega_c$  del guadagno d'anello:
- è determinato dalla massima sovraelongazione ammissibile nella risposta del sistema a un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di disturbi di misura
  - è limitato inferiormente dal vincolo di errore a regime nullo a fronte di un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di ritardi temporali nell'anello di controllo
9. La desaturazione dell'azione integrale di un regolatore PI(D):
- richiede un modello della saturazione dell'attuatore
  - serve a evitare che l'azione di controllo diventi infinita quando si hanno discontinuità nell'ingresso di riferimento
  - richiede un modello preciso dell'impianto controllato
  - riduce la durata del transitorio, anche se la variabile controllata non raggiunge il livello della saturazione
10. Un sistema di controllo in retroazione tempo-continuo che garantisce la stabilità asintotica del sistema complessivo può diventare instabile quando viene discretizzato?
- sì, se il regolatore viene discretizzato con la tecnica delle differenze all'avanti
  - sì, se a causa del tempo di campionamento scelto il ricostruttore rende negativo il margine di fase del guadagno d'anello
  - sì, se il tempo di campionamento è troppo basso
  - no, mai
11. In un sistema di controllo digitale, il fenomeno dell'aliasing:
- consiste in una sovrapposizione frequenziale della componente primaria e di quelle secondarie che costituiscono lo spettro del segnale campionato
  - può essere ridotto abbassando la pulsazione di campionamento del regolatore
  - può essere ridotto abbassando il periodo di campionamento del regolatore
  - è più accentuato se vengono impiegati regolatori passa alto piuttosto che regolatori passa basso

Cognome:

Nome:

N. Matr.:  Sistemi di Controllo Controlli Automatici Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_ Intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 16 gennaio 2019 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Illustrare l'utilità e i diversi scenari applicativi del prefiltraggio del segnale di riferimento in sistemi di controllo in retroazione.

2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{26}{(s + 0.2)(s^2 + 25s + 400)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di posizione (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a gradino) nullo;
- attenuazione di almeno 200 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione  $\omega_d = 0.05$  rad/s;

e dinamiche:

- massimo sorpasso percentuale  $S\% \leq 10\%$ ;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione  $\omega_n = 150$  rad/s;
- tempo di assestamento  $T_a \leq 0.1$ s;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- a) Progettare il regolatore  $R(s)$  di complessità minima che posto in retroazione unitaria negativa con l'impianto  $G(s)$  consenta di soddisfare (quasi) tutte le specifiche indicate in alto, tenendo presente che al punto c) è richiesta la progettazione di un prefiltro.

#### SOLUZIONE:

Il soddisfacimento della specifica statica (errore nullo per ingresso a gradino) richiede almeno un polo nell'origine e pertanto il regolatore  $R(s)$  potrà avere la forma di un PI o un PID (bisognerà capirlo sulla base delle specifiche dinamiche). Dalle specifiche dinamiche discendono i seguenti vincoli frequenziali:

- $S \leq 10\% \rightarrow \delta \geq 0.6 \rightarrow M_f^* \geq 60^\circ$ ;
- tempo di assestamento  $T_a \leq 0.1$ s  $\rightarrow \frac{3}{\delta\omega_c} \leq 0.1 \rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{0.6 \cdot 0.1} = 50$  rad/s;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n"  $\rightarrow \omega_c \leq \omega_n/10 = 15$  rad/s;

Le specifiche sulla pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  sono chiaramente incompatibili per cui si procederà col controllo in retroazione a verificare la condizione sul disturbo di misura, allargando poi la banda del sistema con il prefiltro al fine di ottenere il tempo di assestamento richiesto. Perciò  $\omega_c^* = 15$  rad/s.

Alla pulsazione  $\omega_c^* = 15$ , la fase dell'impianto esteso  $G_e(s) = \frac{G(s)}{s}$  vale  $\arg\{G_e(j15)\} = -244.2192^\circ$ . Di conseguenza l'aggiunta dello zero di un semplice PI consentirebbe al più di ottenere un margine di fase  $25.7808^\circ$ . Pertanto sarà necessario un regolatore PID.

Per la progettazione iniziale del PI  $R_{PI}(s) = \mu \frac{\tau_z s + 1}{s}$  si procede per cancellazione con il polo reale dell'impianto che precede  $\omega_c^*$ . Pertanto si assume  $\tau_z = 1/0.2 = 5$ . Il guadagno  $\mu$  viene selezionato imponendo il soddisfacimento della specifica statica sul disturbo  $d$  (essendo quella sul riferimento automaticamente garantita dalla presenza del polo nell'origine). Dalla suddetta condizione, che può essere riscritta come

$$|S(j\omega_d)| \leq \frac{1}{200} \text{ alla pulsazione } \omega_d = 0.05 \text{ rad/s}$$

considerando l'espressione approssimata di  $|S(j\omega)|$  per basse frequenze, si ricava

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} = \frac{1}{\left| \mu \frac{5j\omega_d + 1}{j\omega_d} G(j\omega_d) \right|} \leq 0.005.$$

Svolgendo i calcoli risulta

$$\left| \frac{0.25j + 1}{0.05j} G(j0.05) \right| = 6.5$$

da cui  $\mu \geq \frac{1}{6.5 \cdot 0.005} = 30.7692$ .

Per semplicità si assume  $\mu = 31$ .

L'espressione del regolatore PI risulta

$$R_{PI}(s) = 31 \frac{5s + 1}{s}$$

Una volta realizzato il regolatore PI, la progettazione della rete di anticipo che compone il PID deve essere svolta a partire dal sistema esteso (denominato  $G_{e1}(s)$ ) composto dall'impianto e dal regolatore  $R_{PI}(s)$

$$G_{e1}(s) = R_{PI}(s)G(s) = \frac{4030}{s(s^2 + 25s + 400)}$$

e imponendo la pulsazione di incrocio desiderata  $\omega_c^* = 15$  rad/s e il margine di fase  $M_f^* = 60^\circ$ . Occorre pertanto calcolare modulo e argomento per  $\omega = \omega_c^* = 15$  di  $G_{e1}(s)$ :

$$|G_{e1}(j15)| = 0.6492, \quad \arg\{G_{e1}(j15)\} = -154.9831^\circ$$

I parametri della rete anticipatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^* = \frac{1}{|G_{e1}(j40)|} = 1.5403 \geq 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{e1}(j15)) = 34.9831^\circ \leq 90^\circ$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^*) \geq \frac{1}{M^*} \Rightarrow 0.8193 > 0.6492,$$

dalle formule di inversione si ricava che  $\tau = 0.0838$  e  $\alpha = 0.2359$  per cui

$$R_a(s) = \frac{0.0838s + 1}{0.01978s + 1}$$

e alla fine il regolatore complessivo risulta

$$R_{PID}(s) = 31 \frac{(5s + 1)(0.0838s + 1)}{s(0.01978s + 1)}$$

- b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- c) Progettare il prefiltro  $R_{pf}(s)$  che consenta il soddisfacimento di tutte le specifiche inizialmente richieste.

#### SOLUZIONE:

Il prefiltro ha lo scopo di rendere il sistema retroazionato più veloce, allargandone la banda a partire dall'attuale di 15 rad/s fino a ottenere una pulsazione di taglio compatibile con  $T_a = 0.1s$  da cui era stata ottenuta una banda di 50 rad/s considerando  $\delta = 0.6$ . Considerando che il margine di fase imposto pari a  $60^\circ$  dà luogo a poli dominanti complessi coniugati sarà necessario un prefiltro del secondo ordine, la cui espressione analitica è

$$R_{pf}(s) = \frac{\frac{s^2}{225} + \frac{1.2s}{15} + 1}{\frac{s^2}{2500} + \frac{1.2s}{50} + 1}$$

- d) Volendo discretizzare sia il regolatore  $R(s) = R_s(s)R_d(s)$  che prefiltro  $R_{pf}(s)$  scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione:

- la banda del sistema in anello chiuso
- la banda del sistema complessivo con il prefiltro
- una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a  $5^\circ$

Discretizzare il regolatore con il metodo di Tustin.

**SOLUZIONE:**

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni suddette:

$$(a) \omega_c = 15 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c = 150 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0419 \text{ s}$$

$$(b) \omega_T = 50 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c = 500 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0126 \text{ s}$$

$$(c) \Delta M_f = \frac{T}{2} \omega_c \frac{180}{\pi} \leq 5^\circ \Rightarrow T \leq \frac{5 \cdot 2\pi}{15 \cdot 180} = 0.0116 \text{ s} \text{ essendo } \omega_c = 15 \text{ rad/s.}$$

Occorre pertanto assumere il valore di  $T$  più basso tra quelli trovati (ovvero 0.0126 s). Arrotondando si assume  $T = 0.01 \text{ s}$ .

Sostituendo  $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  i corrispondenti sistemi discretizzati risultano

$$R(s) = 31 \frac{(5s + 1)(0.0838s + 1)}{s(0.01978s + 1)} \Rightarrow R(z) = \frac{556.3 - 1049z^{-1} + 492.7z^{-2}}{1 - 1.596z^{-1} + 0.596z^{-2}} = \frac{556.3z^2 - 1049z + 492.7}{z^2 - 1.596z + 0.596}$$

$$R_{pf}(s) = \frac{\frac{s^2}{225} + \frac{1.2s}{15} + 1}{\frac{s^2}{2500} + \frac{1.2s}{50} + 1} \Rightarrow R_{pf}(z) = \frac{8.935 - 16.22z^{-1} + 7.467z^{-2}}{1 - 1.376z^{-1} + 0.5596z^{-2}} = \frac{8.935z^2 - 16.22z + 7.467}{z^2 - 1.376z + 0.5596}$$

e) Scrivere le equazioni alle differenze corrispondenti ai due sistemi discretizzati al punto precedente

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \text{ e } R_{pf}(z) = \frac{Y(z)}{Q(z)}$$

**SOLUZIONE:**

Interpretando  $z^{-1}$  come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che le equazioni alle differenze corrispondenti a  $R(z)$  e  $R_{pf}(z)$  sono:

$$R(z) = \frac{556.3 - 1049z^{-1} + 492.7z^{-2}}{1 - 1.596z^{-1} + 0.596z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)} \Rightarrow u_k = 1.596u_{k-1} - 0.596u_{k-2} + 14.69e_k - 14.56e_{k-1}$$

$$R_{pf}(z) = \frac{8.935 - 16.22z^{-1} + 7.467z^{-2}}{1 - 1.376z^{-1} + 0.5596z^{-2}} = \frac{Y(z)}{Q(z)}$$

↓

$$y_k = 1.376y_{k-1} - 0.5596y_{k-2} + 8.935q_k - 16.22q_{k-1} + 7.467q_{k-2}$$

**Biagiotti - f)** Scrivere l'espressione di una traiettoria trapezoidale tra  $q_0 = 10$  e  $q_1 = 50$  ( $t_0 = 0$ ) di durata complessiva  $T = 0.4\text{s}$  e con durata del periodo di accelerazione/decelerazione  $T_a = \frac{T}{2}$ . In particolare calcolare i valori massimi di velocità e accelerazione raggiunti.

**SOLUZIONE:**

La traiettoria trapezoidale in cui il tempo di accelerazione/decelerazione vale metà dell'intera durata della traiettoria è in realtà una traiettorie triangolare in velocità composta solo da due tratti (priva del segmento centrale a velocità costante). I valori massimi di velocità e accelerazione risultano

$$v_{max} = \frac{h}{T - T_a} = 200, a_{max} = \frac{h}{T_a(T - T_a)} = 1000$$



essendo  $h = q_1 - q_0 = 40$ . L'espressione finale della traiettoria risulta

$$q(t) = \begin{cases} 10 + 500t^2 & 0 \leq t \leq 0.2 \\ 50 - 500(0.4 - t)^2 & 0.2 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

---