Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ◯ la risposta libera di un sistema dinamico
   ◯ l'uscita a regime in un sistema dinamico con segnale di ingresso sinusoidale
   ◯ l'uscita a regime in un sistema dinamico con segnale di ingresso non periodico
   ◯ la risposta completa di un sistema dinamico

2. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

3. Il valore finale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{5s+1}{(s+2)(s^2+16)}$ vale:

   ◯ 5
   ◯ 1/32
   ◯ 0
   ◯ non esiste

4. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

   ◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s^2+4^2)^2}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s+4)^2}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)^2(s^2+4^2)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+4)^2}$

5. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

6. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino
   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   - ◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   - ◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

7. Se la funzione di trasferimento di un sistema dinamico è caratterizzata da un polo $p = 3 \pm j2$ di molteplicità 3, allora la risposta di tale sistema conterrà sicuramente un modo temporale

   - ◯ $e^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   - ◯ $te^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   - ◯ $t^2e^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   - ◯ $t^3e^{3t}\cos(2t+\varphi)$

8. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2+s+3}{5s^3+2s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   - ◯ $5\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   - ◯ $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 5\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t)$
   - ◯ $5\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   - ◯ nessuna delle precedenti

9. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   - ◯ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   - ◯ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R
   - ◯ tempo di assestamento T_a e picco di risonanza M_R

10. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   - ◯ vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   - ◯ vale 1
   - ◯ vale 1/2
   - ◯ vale $\simeq -3$ dB

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2019 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 + \frac{\sin(2t)}{4e^t}, \qquad x_2(t) = 3[t^3 e^{-4t} + 2\delta(t)]$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

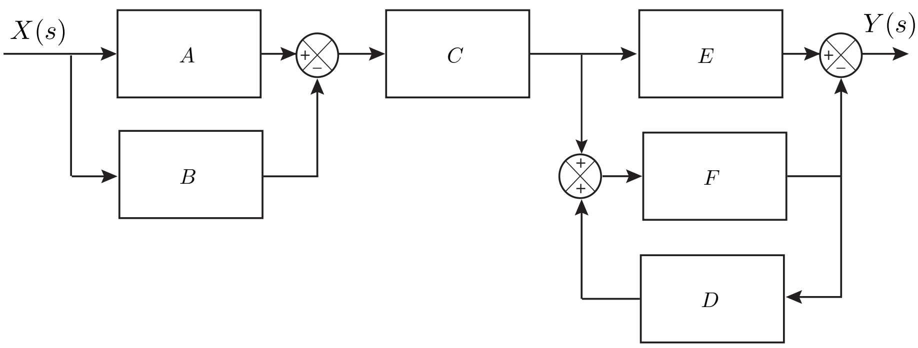
b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{5s^2 - 20s + 212}{s^2 - 4s + 40}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2 + 26s + 50}{(s+4)^2(s+1)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

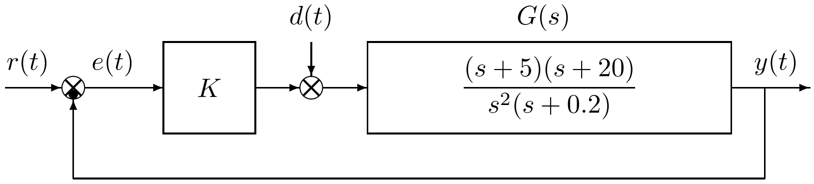


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{208(s+6)}{(s^2 + 4s + 104)(1 + 0.025s)(s+20)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

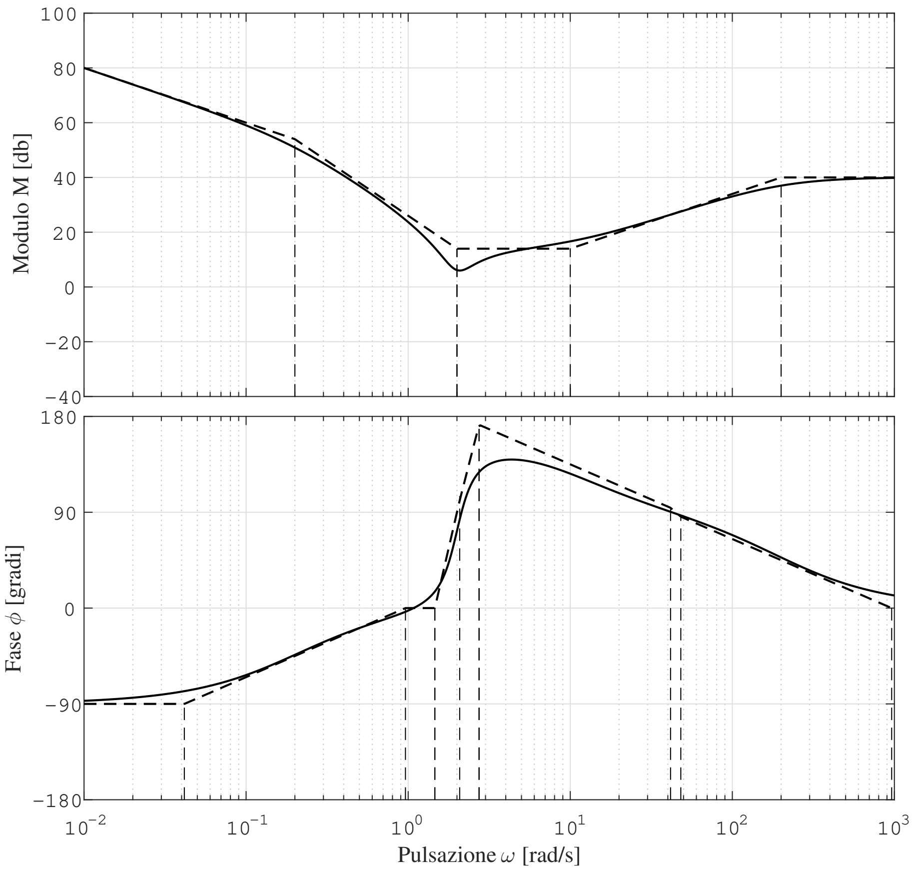
e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t^2$ e il disturbo $d(t) = 10 \sin t$.

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

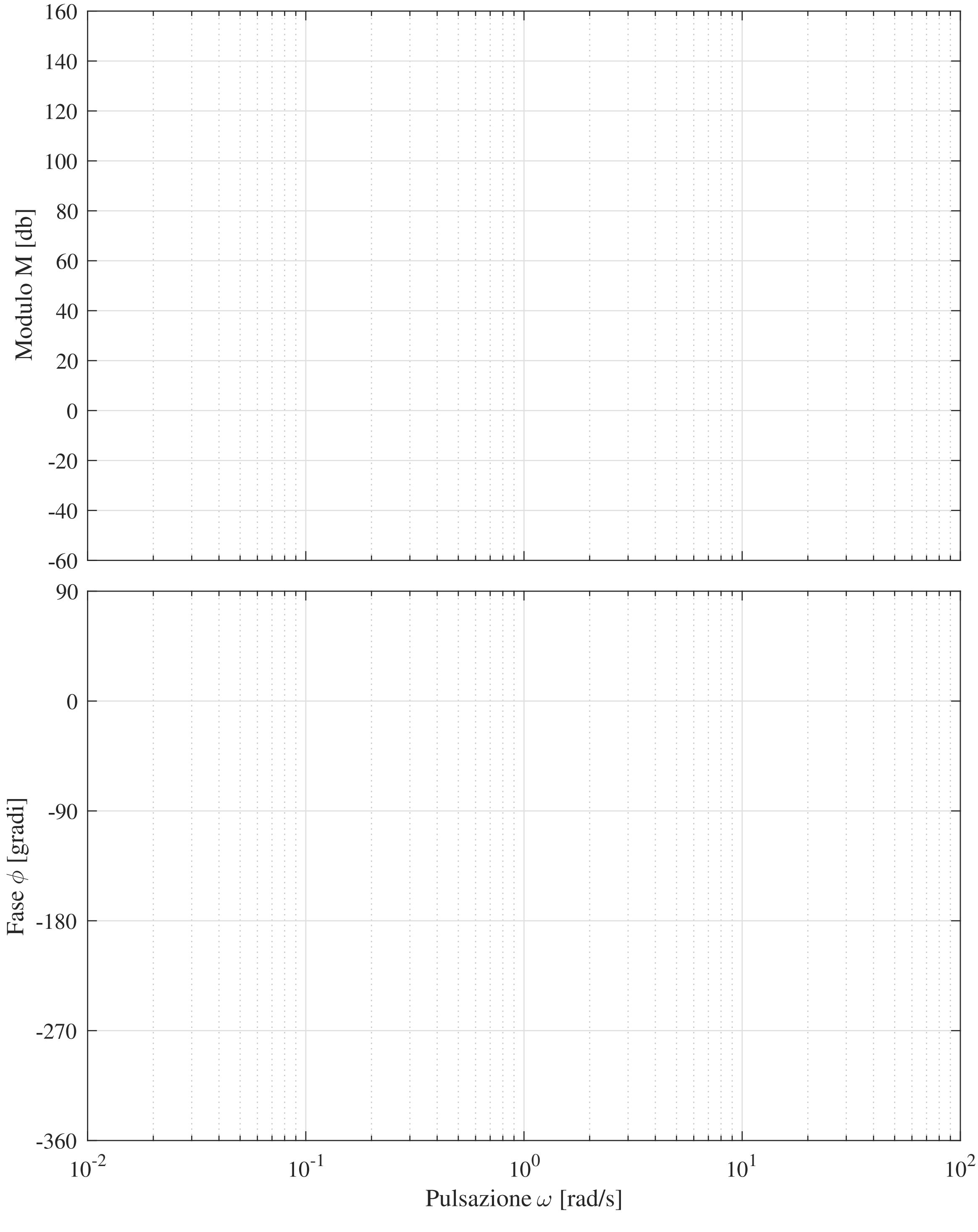


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2 \sin (10\, t)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ○ la risposta libera di un sistema dinamico
   ⊗ l'uscita a regime in un sistema dinamico con segnale di ingresso sinusoidale
   ⊗ l'uscita a regime in un sistema dinamico con segnale di ingresso non periodico
   ○ la risposta completa di un sistema dinamico

2. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ○ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ○ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ○ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ⊗ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

3. Il valore finale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{5s+1}{(s+2)(s^2+16)}$ vale:

   ○ 5
   ○ 1/32
   ○ 0
   ⊗ non esiste

4. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

   ⊗ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s^2+4^2)^2}$
   ○ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s+4)^2}$
   ○ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)^2(s^2+4^2)}$
   ○ $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+4)^2}$

5. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

6. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino
   ⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
   ○ errore a regime nullo per ingresso a parabola
   ○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

7. Se la funzione di trasferimento di un sistema dinamico è caratterizzata da un polo $p = 3 \pm j2$ di molteplicità 3, allora la risposta di tale sistema conterrà sicuramente un modo temporale

   ○ $e^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   ○ $te^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   ⊗ $t^2e^{3t}\cos(2t+\varphi)$
   ○ $t^3e^{3t}\cos(2t+\varphi)$

8. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2+s+3}{5s^3+2s^2+3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

   ○ $5\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   ○ $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = 5\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t)$
   ⊗ $5\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = 2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t)$
   ○ nessuna delle precedenti

9. I due poli di un sistema del secondo ordine sono univocamente determinati se vengono assegnate le seguenti specifiche

   ⊗ coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ○ massima sovraelongazione S e picco di risonanza M_R
   ⊗ tempo di assestamento T_a e picco di risonanza M_R

10. Per $\omega = 1/a$ il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\,a\,\omega)^2}$ (con $a > 0$)

   ○ vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   ○ vale 1
   ⊗ vale 1/2
   ○ vale $\simeq -3$ dB

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2019 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5 + \frac{\sin(2t)}{4e^t}, \qquad x_2(t) = 3[t^3 e^{-4t} + 2\delta(t)]$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{(s+1)^2+4}, \qquad X_2(s) = 3\left[\frac{6}{(s+4)^4} + 2\right]$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

SOLUZIONE:
Calcolando $G(s) = C\,(sI_2 - A)^{-1}\,B + D$ si ottiene

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 - s - 2}$$

---

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta all'impulso di $G(s)$ ovvero la sua antitrasformata di Laplace puó essere ottenuta dopo aver effettuato la cancellazione polo/zero:

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

come

$$g(t) = e^{2t}$$

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{5s^2 - 20s + 212}{s^2 - 4s + 40}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2 + 26s + 50}{(s+4)^2(s+1)}$$

SOLUZIONE:
La funzione $G_1(s)$ può essere riscritta come

$$G_1(s) = \frac{12}{(s-2)^2 + 6^2} + 5$$

pertanto la sua risposta impulsiva risulta

$$g_1(t) = 2\,e^{2t}\sin(6t) + 5\delta(t).$$

La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

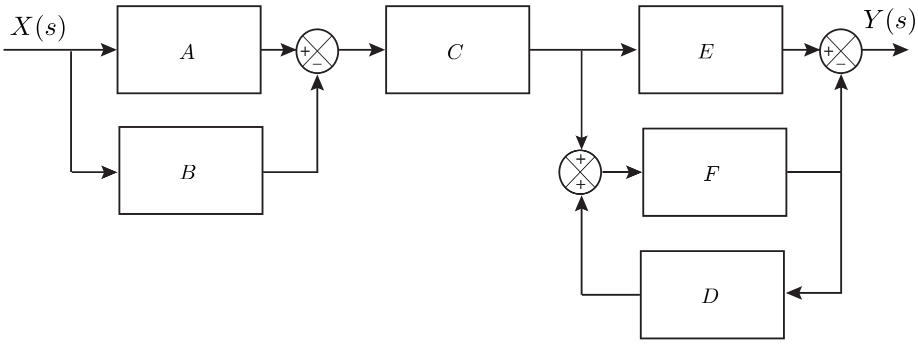
$$G_2(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+4)^2}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 3e^{-t} + 2te^{-4t}$$

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

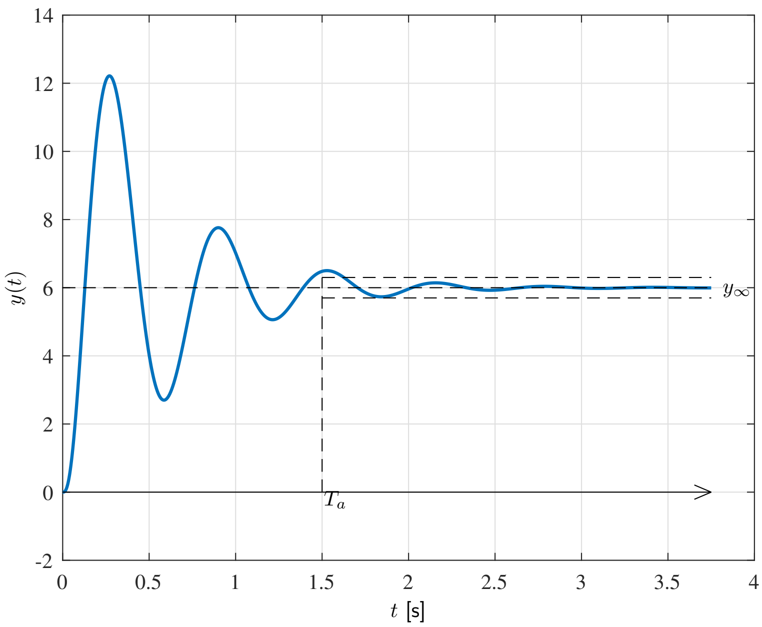
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ACE(1-FD) - BCE(1-FD) - ACF + BCF}{1-FD}$$

---

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{208(s+6)}{(s^2+4s+104)(1+0.025s)(s+20)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 10, $x(t) = 10$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:

Il sistema ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati $p_{1,2} = -2 \pm j10$ per cui la risposta al gradino avrà un andamento oscillatorio smorzato. In figura è riportata la risposta del sistema.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 10$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 10 \cdot 0.6 = 6$$

La parte reale dei poli dominanti è $\sigma = -2$ per cui il tempo di assestamento T_a è

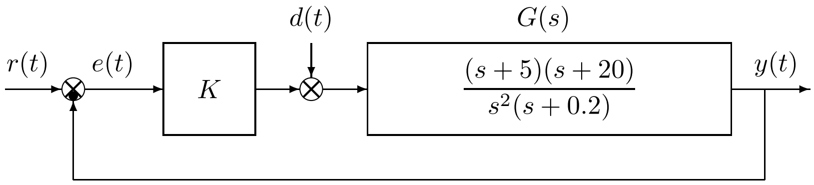
$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = 1.5 \text{ s},$$

Il periodo dell'oscillazione è dato da

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.628 \text{ s}$$

---

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{(s+5)(s+20)}{s^2(s+0.2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K+0.2)s^2 + 25Ks + 100K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc l}
3 & 1 & 25K & \\
2 & K+0.2 & 100K & \rightarrow \;\; K > -0.2 \\
1 & (25K-95)K & & \rightarrow \;\; K < 0 \vee K > 3.8 \\
0 & 100K & & \rightarrow \;\; K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 3.8 = K^\star$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{100K^\star}{K^\star + 0.2}} \approx 9.75 \text{ rad/s}$$

---

e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale $r(t) = 2t^2$ e il disturbo $d(t) = 10\sin t$.

SOLUZIONE:
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento sarà costante e diverso da zero, essendo il sistema considerato di tipo 2 con ingresso di riferimento a parabola: $e_r(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = 8 \cdot 10^{-4}$ dove $R_0 = 4$ e $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 KG(s) = 5000$.
L'errore dovuto al disturbo $d(t)$ è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{-s^2 - 25s - 100}{s^3 + 10.2s^2 + 250s + 1000}.$$

Essendo $d(t)$ un segnale sinusoidale, per trovarne la risposta a regime si sfrutta il concetto di risposta armonica, per cui $e_d(t) = 10|F_d(j1)|\sin(t + \arg\{F_d(j1)\})$ con $|F_d(j1)| = 0.1$ e $\arg\{F_d(j1)\} \simeq 180^o$. In conclusione

$$e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = 8 \cdot 10^{-4} + \sin(t + 180^o)$$

---

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

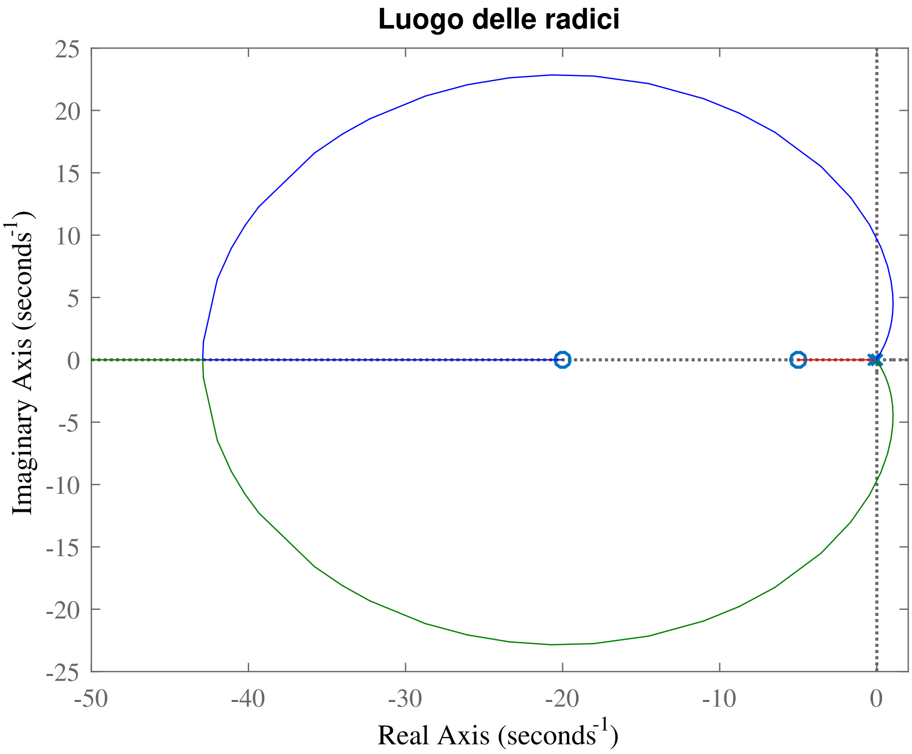
Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:

Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(-0.2 + 5 + 20) = 24.8$$

Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente.

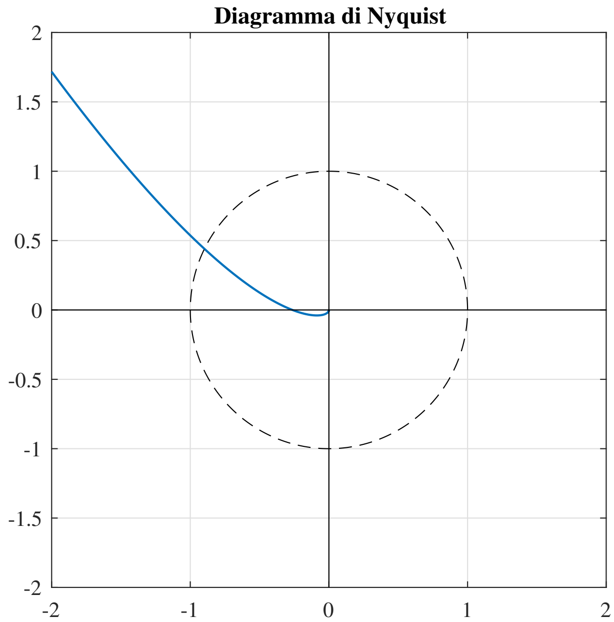


Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^\star = \pm j9.75$ per $K = K^\star = 3.8$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{500}{s^2}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{0.2} = -4.75 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 2 pertanto il diagramma polare non presenta asintoti. Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -5 - 20 + 0.2 = -24.8 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

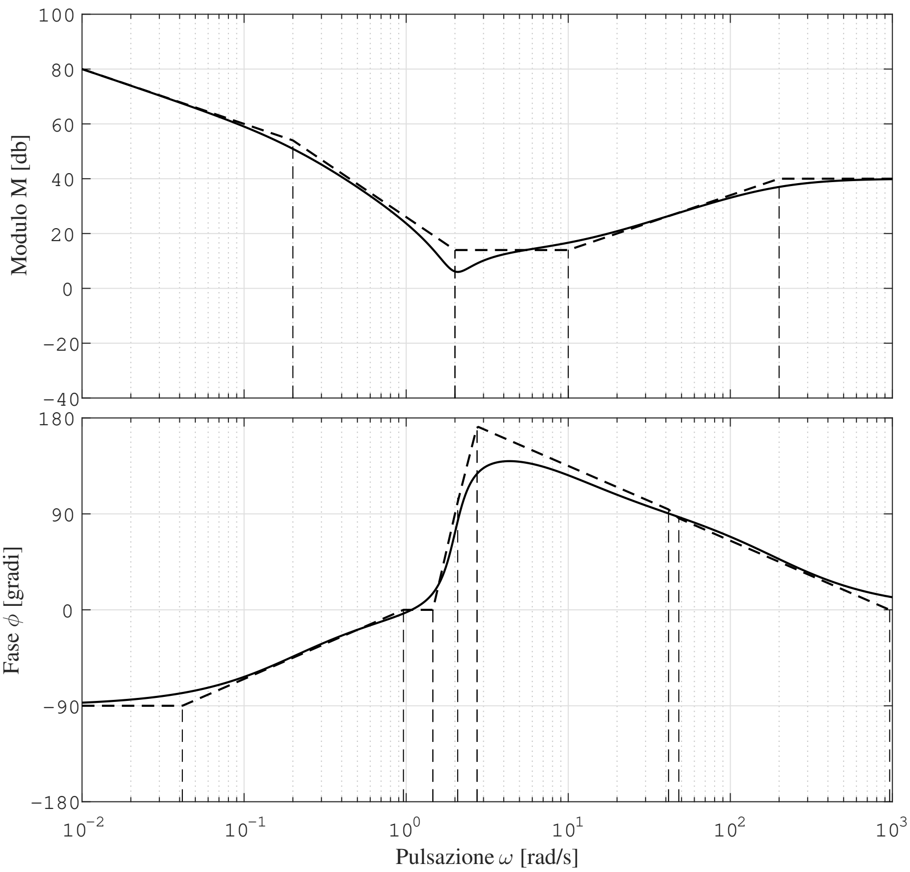
$$\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$$

Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -0.2632$$

---

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{100(s-10)(s^2+0.8s+4)}{s(s-0.2)(s+200)} = \frac{100(-0.1s+1)(0.25s^2+0.2s+1)}{s(-5s+1)(0.005s+1)}$$

dove il valore $\mu = 100$ si determina dall'approssimante per basse frequenze di $G(s)$, cioè $G_0(s) = \frac{\mu}{s}$ che in corrispondenza di $\omega = 0.01$ vale 80 db (si considera una pulsazione antecedente il primo punto di rottura proprio perchè il digramma delle ampiezze vale esattamente 80db). Pertanto

$$\left|\frac{\mu}{j\omega}\right|_{\omega=0.01} \approx 10^{80/20} \approx 10000 \to \frac{|\mu|}{0.01} = 10000 \to |\mu| = 100.$$

In particolare il guadagno μ sarà positivo in quanto il contributo di fase ad esso imputabile è nullo essendo la fase iniziale complessiva -90^o a causa della presenza del polo nell'origine. Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili (e pertanto positivo) vale in modulo:

$$|\delta| = \frac{M_{\omega_n}}{2} \simeq \frac{0.2}{2} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq -14$ db $\simeq 0.2$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

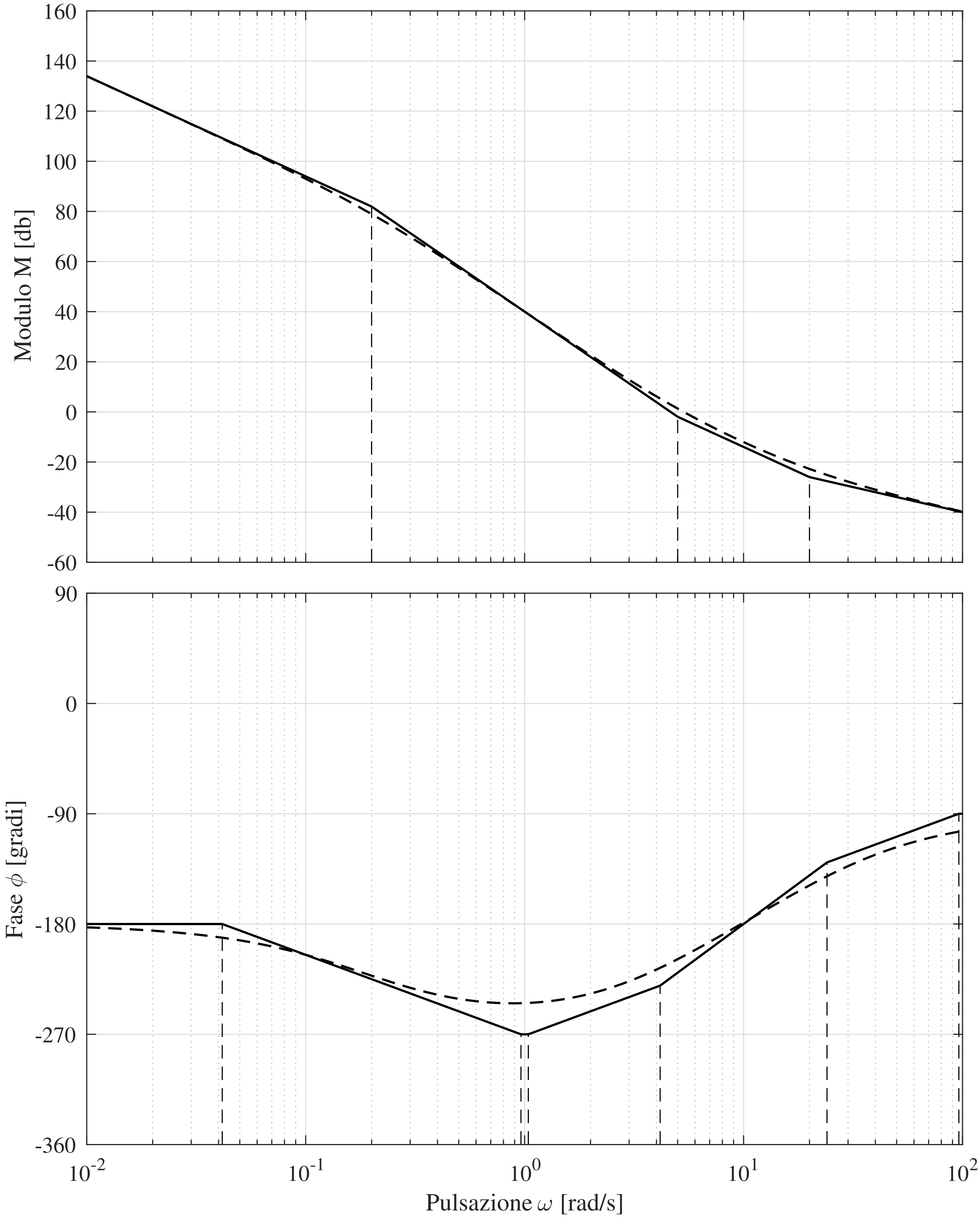
---

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2\sin(10\,t).$$

SOLUZIONE:

La risposta a regime del sistema all'ingresso $x(t)$ diverge in quanto la funzione di trasferimento $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva.


160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
Modulo M [db]
90
0
-90
-180
-270
-360
Fase ϕ [gradi]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Pulsazione ω [rad/s]