Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 13 febbraio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Il sistema dinamico caratterizzato dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2t\,x_1 + 4x_2 + 2t^2 u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= \cos(t) x_2 \end{cases}$$

è:

◯ lineare, tempo-invariante ◯ non lineare, tempo-invariante

◯ non lineare, tempo-variante ◯ lineare, tempo-variante

2. Quali dei seguenti sistemi sono asintoticamente stabili?

◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s^2+4^2)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+3}{(s-3)(s+4)^2}$

◯ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s+4)^2}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+4)^2}$

3. (**Giarré**) Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:

◯ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto

◯ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile

◯ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva

◯ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

4. (**Biagiotti**) Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino

◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa

◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola

◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

5. Se la tabella di Routh di un'equazione caratteristica $a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$, con $a_i < 0$, $i = 0, \ldots, n$, ha tutti gli elementi della prima colonna negativi, allora segue che l'equazione caratteristica

◯ ha tutte le radici a parte reale negativa

◯ ha tutte le radici a parte reale positiva

◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

◯ ha tutte le radici simmetriche rispetto all'asse reale

6. Sia $y(t) = Y(\omega)\, \cos(\omega t + \varphi(\omega) + \alpha_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = X\, \cos(\omega t + \alpha_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   - ◯ $F(\omega) = \frac{X}{Y(\omega)}\, e^{j\varphi(\omega)}$
   - ◯ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}\, e^{j\varphi(\omega)}$
   - ◯ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}\, e^{-j\varphi(\omega)}$
   - ◯ $F(\omega) = Y(\omega)\, X\, e^{j\varphi(\omega)}$

7. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

   - ◯ su due semirette uscenti dall'origine
   - ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine
   - ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine
   - ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario

8. Se un sistemadinamico ha un polo reale $p = 5$ di molteplicità 3, allora la sua risposta temporale (libera o forzata che sia) sarà sicuramente caratterizzata da un termine

   - ◯ $y(t) \propto t\, e^{5\,t}$
   - ◯ $y(t) \propto t^2\, e^{5\,t}$
   - ◯ $y(t) \propto t\, e^{-5\,t}$
   - ◯ $y(t) \propto t^2\, e^{-5\,t}$

9. Applicando l' ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2\, y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^o)$
   - ◯ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^o)$

10. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2 + s + 3}{5s^3 + s^2 + 3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

    - ◯ $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\dddot{x}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$
    - ◯ $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
    - ◯ $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\dddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$
    - ◯ nessuna delle precedenti

11. Se si considera l'ingresso costante $\bar{u} = 0$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{array} \right.$

    ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 13 febbraio 2019 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2\cos(3\,t) - 4t]\,e^{2t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{4} \\ 3\cos(2t - \frac{\pi}{2}) & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 12x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 8x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) + 0.5x_2(t) \end{aligned}$$

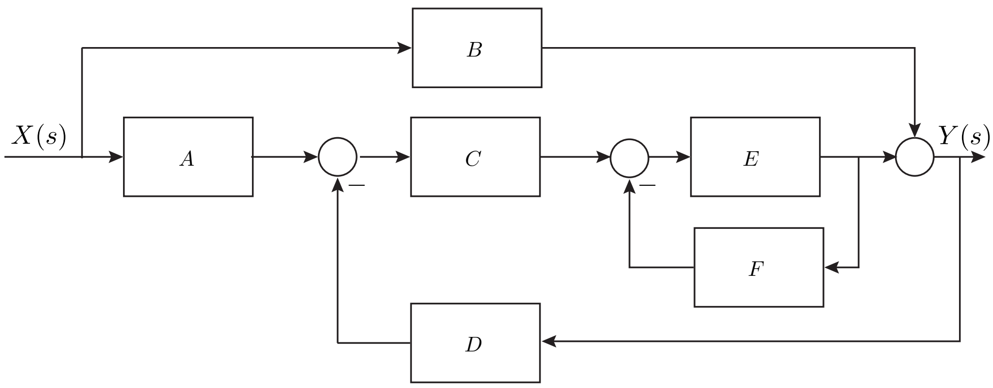
b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = 2e^{-4s}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2 + 14s + 21}{s^2 + 4s + 4}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

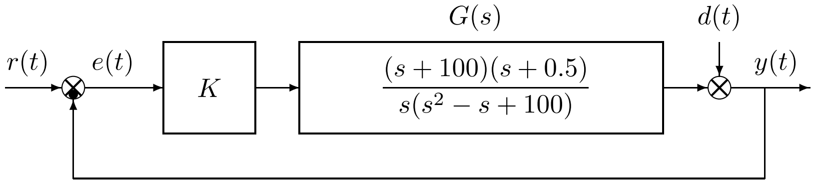


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2(s+4)}{(1+0.01s)(s+50)(s^2+6s+64)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 1000, $u(t) = 1000$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

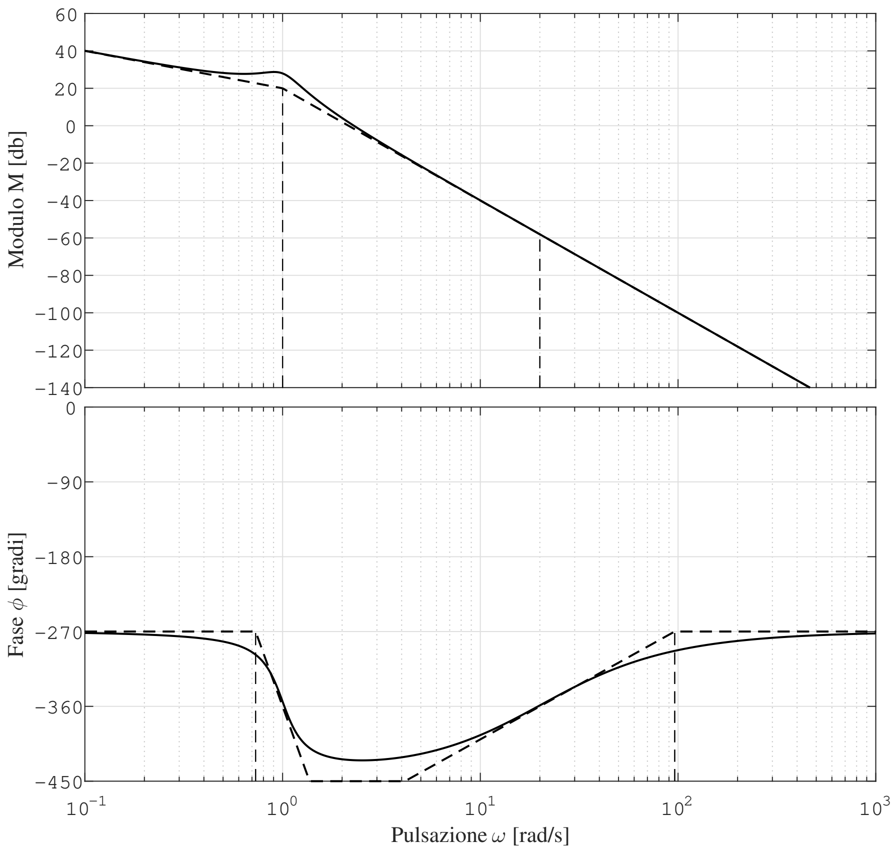
e.2) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 20 + 3\sin(5t)$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

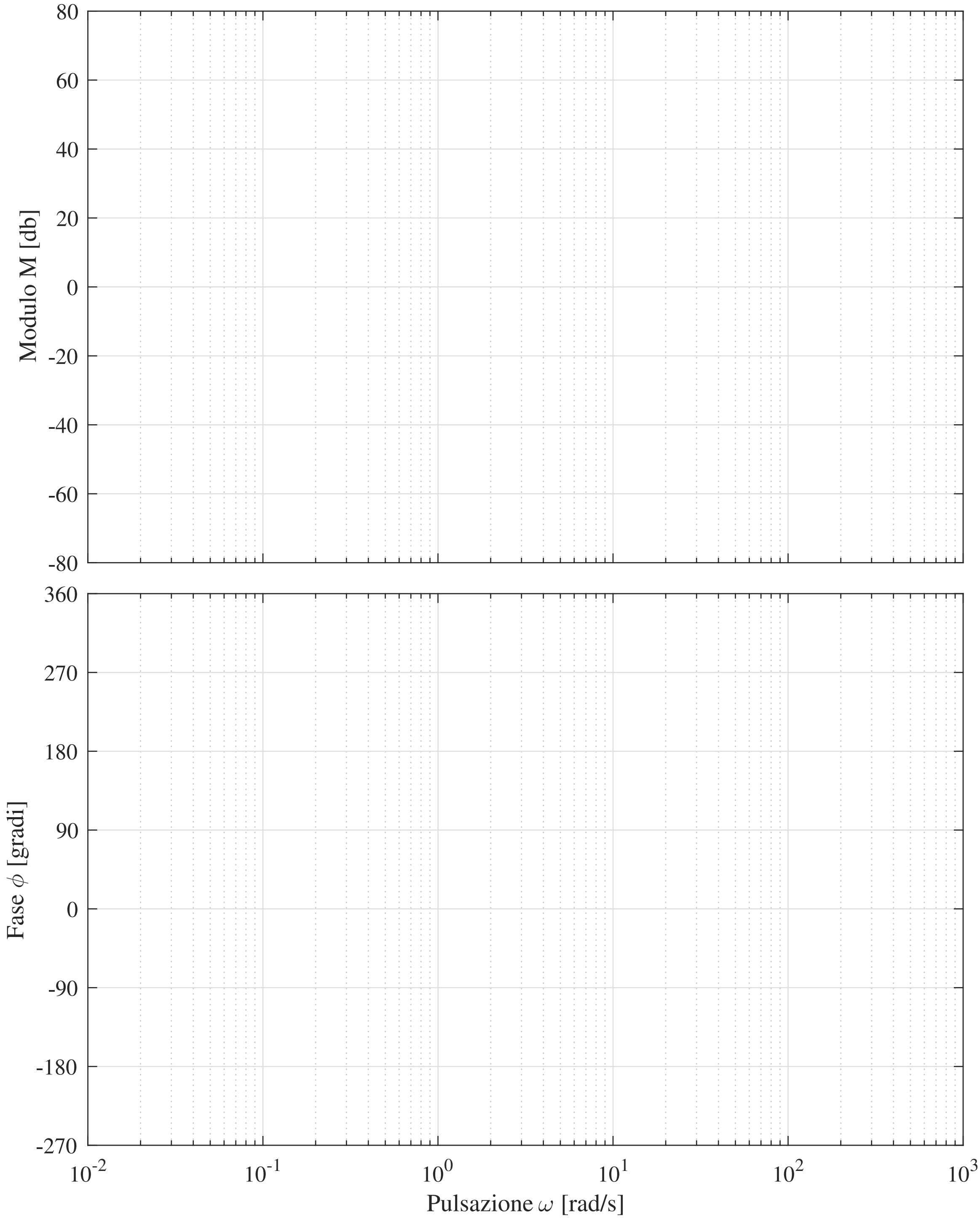


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\,\sin(0.7\,t)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 13 febbraio 2019 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Il sistema dinamico caratterizzato dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2t\,x_1 + 4x_2 + 2t^2 u \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ y = \cos(t) x_2 \end{cases}$$

è:
○ lineare, tempo-invariante ○ non lineare, tempo-invariante
○ non lineare, tempo-variante ⊗ lineare, tempo-variante

2. Quali dei seguenti sistemi sono asintoticamente stabili?
○ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s^2+4^2)}$ ○ $G(s) = \dfrac{s+3}{(s-3)(s+4)^2}$
⊗ $G(s) = \dfrac{s-3}{(s+3)(s+4)^2}$ ○ $G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+4)^2}$

3. (**Giarré**) Per l'applicazione del criterio di Nyquist a un sistema in retroazione:
○ non occorre alcuna informazione sulla stabilità ad anello aperto
○ occorre sapere se il sistema ad anello aperto è stabile o instabile
⊗ occorre conoscere il numero dei poli a parte reale nulla e positiva
○ occorre conoscere il numero degli zeri a parte reale nulla e positiva

4. (**Biagiotti**) Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta
⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino
⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
○ errore a regime nullo per ingresso a parabola
○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa

5. Se la tabella di Routh di un'equazione caratteristica $a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$, con $a_i < 0$, $i = 0, \ldots, n$, ha tutti gli elementi della prima colonna negativi, allora segue che l'equazione caratteristica
⊗ ha tutte le radici a parte reale negativa
○ ha tutte le radici a parte reale positiva
○ ha almeno una radice a parte reale positiva
⊗ ha tutte le radici simmetriche rispetto all'asse reale

6. Sia $y(t) = Y(\omega)\,\cos(\omega t + \varphi(\omega) + \alpha_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso $x(t) = X\,\cos(\omega t + \alpha_0)$. Utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$ la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

   ○ $F(\omega) = \frac{X}{Y(\omega)}\,e^{j\varphi(\omega)}$

   ⊗ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}\,e^{j\varphi(\omega)}$

   ○ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}\,e^{-j\varphi(\omega)}$

   ○ $F(\omega) = Y(\omega)\,X\,e^{j\varphi(\omega)}$

7. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ⊗ su due semirette uscenti dall'origine

   ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine

   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine

   ○ su di una retta parallela all'asse immaginario

8. Se un sistemadinamico ha un polo reale $p = 5$ di molteplicità 3, allora la sua risposta temporale (libera o forzata che sia) sarà sicuramente caratterizzata da un termine

   ○ $y(t) \propto t\,e^{5\,t}$

   ⊗ $y(t) \propto t^2\,e^{5\,t}$

   ○ $y(t) \propto t\,e^{-5\,t}$

   ○ $y(t) \propto t^2\,e^{-5\,t}$

9. Applicando l' ingresso $u(t) = \sin(2t)$ al sistema $\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 4u(t)$ si ottiene la seguente uscita a regime:

   ○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\sin(2t + 45^o)$

   ○ $y(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\sin(2t - 45^o)$

   ○ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(2t + 45^o)$

   ⊗ $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(2t - 45^o)$

10. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2s^2 + s + 3}{5s^3 + s^2 + 3s}$ corrisponde all'equazione differenziale:

    ○ $3\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) + 5\dddot{x}(t) = 3y(t) + \dot{y}(t) + 2\ddot{y}(t)$

    ○ $3y(t) + \dot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$

    ⊗ $3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 5\dddot{y}(t) = 3x(t) + \dot{x}(t) + 2\ddot{x}(t)$

    ○ nessuna delle precedenti

11. Se si considera l'ingresso costante $\bar{u} = 0$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{array} \right.$

    ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ○ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ○ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 13 febbraio 2019 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2\cos(3\,t) - 4t]\,e^{2t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{4} \\ 3\cos(2t - \frac{\pi}{2}) & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+9} - \frac{4}{(s-2)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{3s}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{4}s}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 12x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 8x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) + 0.5x_2(t) \end{aligned}$$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

SOLUZIONE:
La funzione di trasferimento risulta

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s-8)(s-4)}$$

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta all'impulso di $G(s)$, ovvero la sua antitrasformata di Laplace, vale

$$g(t) = 3e^{8t} - 2e^{4t}.$$

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = 2e^{-4s}, \qquad G_2(s) = \frac{3s^2+14s+21}{s^2+4s+4}$$

SOLUZIONE:
L'antitrasformata di Laplace della funzione $G_1(s)$ è

$$g_1(t) = 2\,\delta(t-4)$$

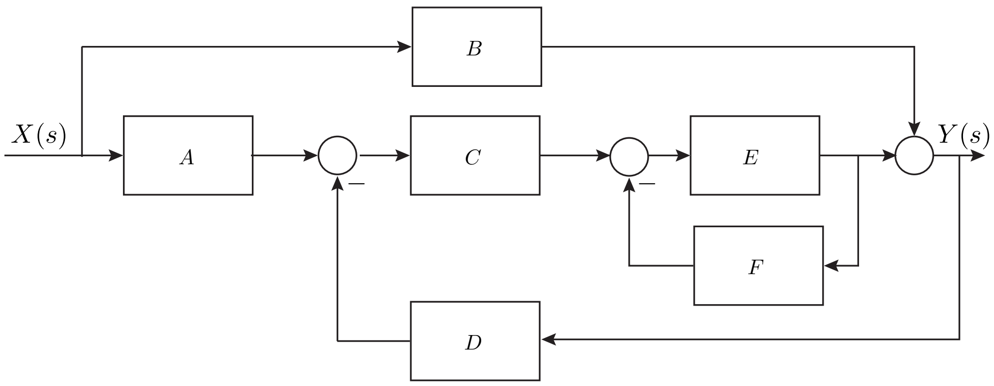
La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

$$G_2(s) = 3 + \frac{2}{(s+2)} + \frac{5}{(s+2)^2}$$

La risposta impulsiva della funzione $G_2(s)$ risulta

$$g_2(t) = 3\delta(t) + 2e^{-2t} + 5te^{-2t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ACE + B(1 + EF)}{1 + EF + CDE}$$

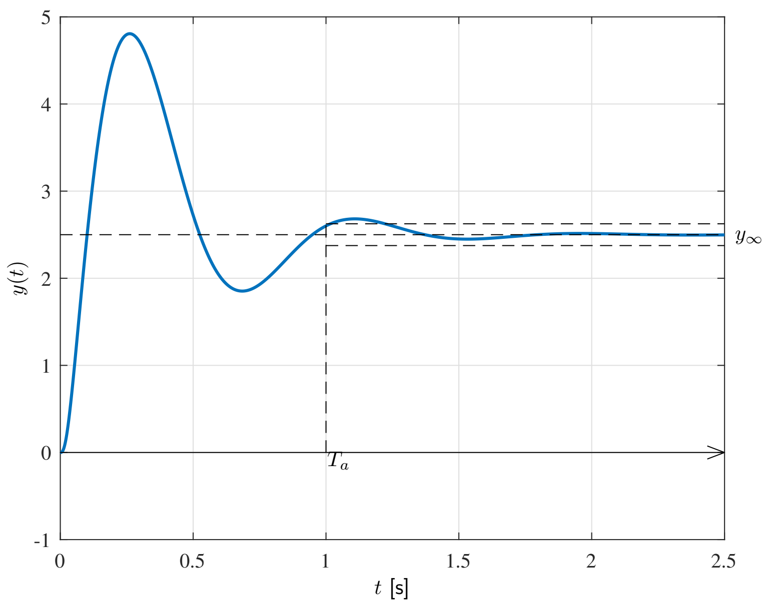
---

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2(s+4)}{(1+0.01s)(s+50)(s^2+6s+64)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 1000, $u(t) = 1000$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:

Il sistema ha due poli complessi coniugati dominanti $p = \sigma \pm j\omega = -3 \pm j7.4$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo oscillatorio smorzato, come mostrato in figura.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 1000$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 1000 \cdot (0.0025) = 2.5.$$

Il tempo di assestamento T_a è

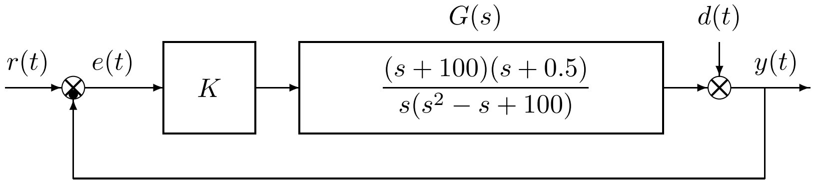
$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s},$$

e il periodo dell'oscillazioni è

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7.4} = 0.847 \text{ s}$$

---

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{(s+100)(s+0.5)}{s(s^2-s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-1)s^2 + (100+100.5K)s + 50K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccl}
3 & 1 & 100+100.5K & \\
2 & K-1 & 50K & \rightarrow \; K > 1 \\
1 & (K-1)(100+100.5K) - 50K & & \rightarrow \; K < -0.78 \vee K > 1.28 \\
0 & 50K & & \rightarrow \; K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 1.28 = K^\star$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{50K^\star}{1-K^\star}} = 15.12 \text{ rad/s}$$

---

e.2) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 2t$ e il disturbo $d(t) = 20 + 3\sin(5t)$

SOLUZIONE:
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento a rampa è costante, dal momento che l'impianto $G(s)$ presenta un polo nell'origine: $e_r(\infty) = \frac{2}{K_v} = 2$ dove $K_v = \lim_{s\to 0} sKG(s) = 1$.
Per quanto riguarda il calcolo dell'errore dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -F_r(s) = \frac{-1}{1+KG(s)} = \frac{-s^3+s^2-100s}{s^3+s^2+301s+100}$$

essendo $F_r(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso di riferimento $R(s)$ e $E_r(s)$. La componente costante del disturbo $d(t) = 20$, dà luogo a un errore a regime nullo, per la presenza del polo nell'origine in $G(s)$. L'errore dovuto alla componente sinusoidale di $d(t)$ può essre calcolato sfruttando il concetto di risposta armonica, da cui $e_{d\infty}(t) = 3\,|F_d(j5)|\sin(5t + \arg\{F_d(j5)\})$ con $|F_d(j5)| = 0.2719$ e $\arg\{F_d(j5)\} = 179.2968^o = 3.1293$ rad.
In conclusione,

$$e_\infty = e_{d\infty} = 2 + 0.8158\sin(5t + 3.1293).$$

---

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

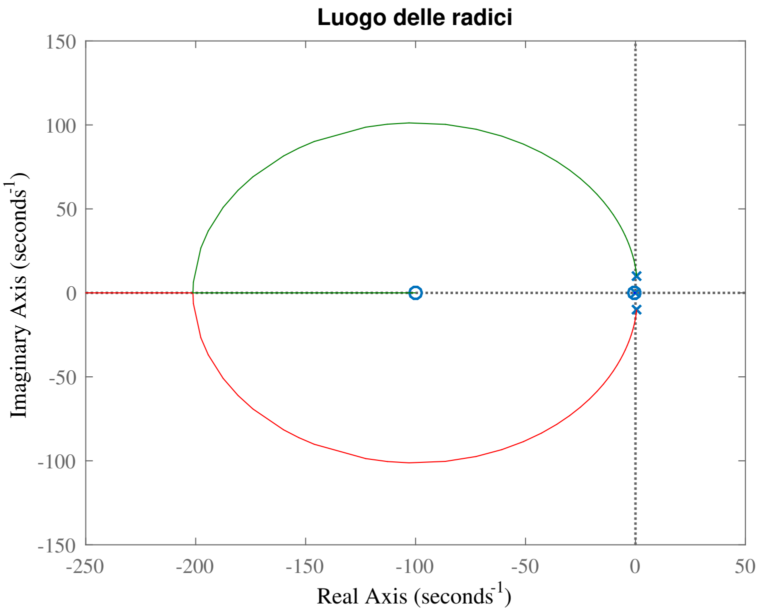
SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:
Essendo 1 il grado relativo del sistema, esiste 1 asintoto, appartenente all'asse reale, con centro di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{1}(100 + 0.5 + 1) = 101.5$$

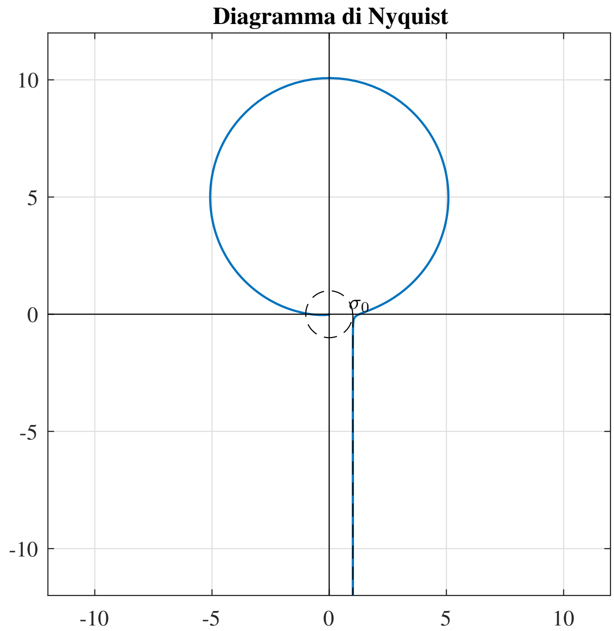
Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.



Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j\omega^\star = \pm j15.12$ per $K = K^\star = 1.28$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:
Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3}{2}\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 2.02 = 1.01$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = -100 - 0.5 - 1 = -101.5 < 0$$

pertanto il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

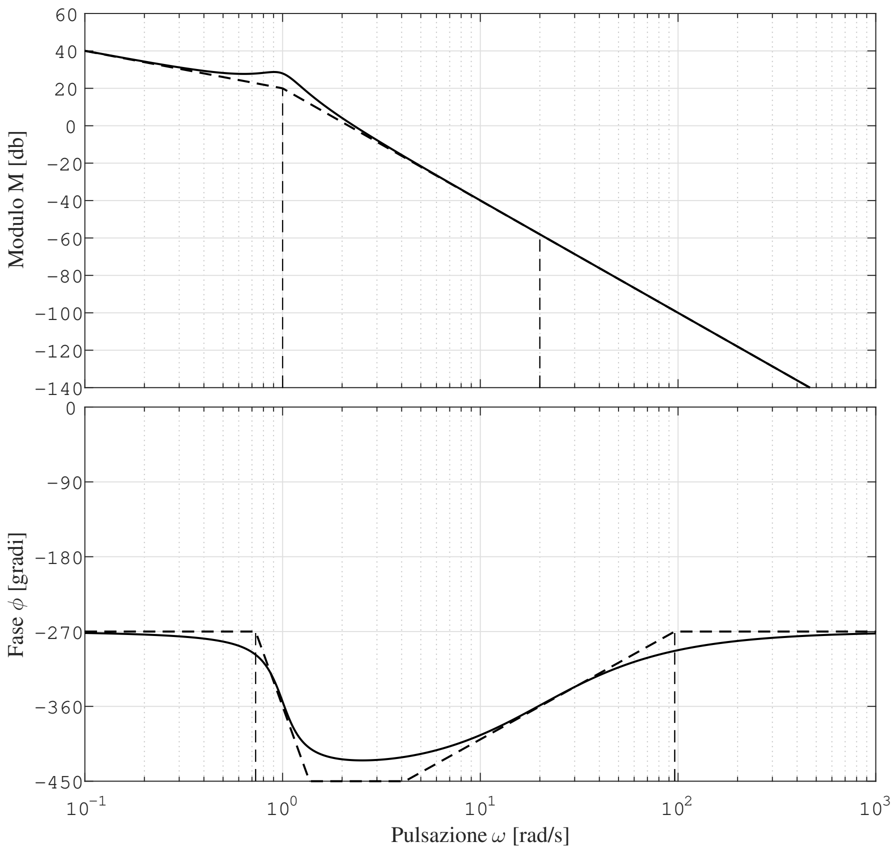
$$\Delta\varphi = +\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = +2\pi$$

Esistono due intersezioni con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risultano alle ascisse

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -0.781 \qquad\qquad \sigma_1^\star = -1/K_1^\star = -1/-0.78 = 1.28$$

---

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{10(s+20)}{s(s^2+0.4s+1)(s-20)} = \frac{-10(0.05s+1)}{s(s^2+0.4s+1)(-0.05s+1)}$$

Il sistema presenta un polo nell'origine avendo pendenza iniziale pari a -20 db/decade. In corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati stabili (essendo lo sfasamento -180^o) con $\omega_n = 1$ e $\delta = 0.2$. Infatti

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2 \cdot 2.5} = 0.2.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 8$ db $\simeq 2.5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

In corrispondenza di $\omega = 20$ rad/s sono presenti sia uno zero che un polo reale (sfasamento $+180^o$, pertanto il primo stabile e il secondo instabile)

Infine, il valore del guadagno μ si determina dalla funzione approssimante per basse frequenze $G_0(s) = \frac{\mu}{s}$ in corrispondenza del primo punto di rottura, il cui modulo vale

$$|G_0(j1)| = \left|\frac{\mu}{j1}\right| = 20 \text{ db} = 10$$

da cui

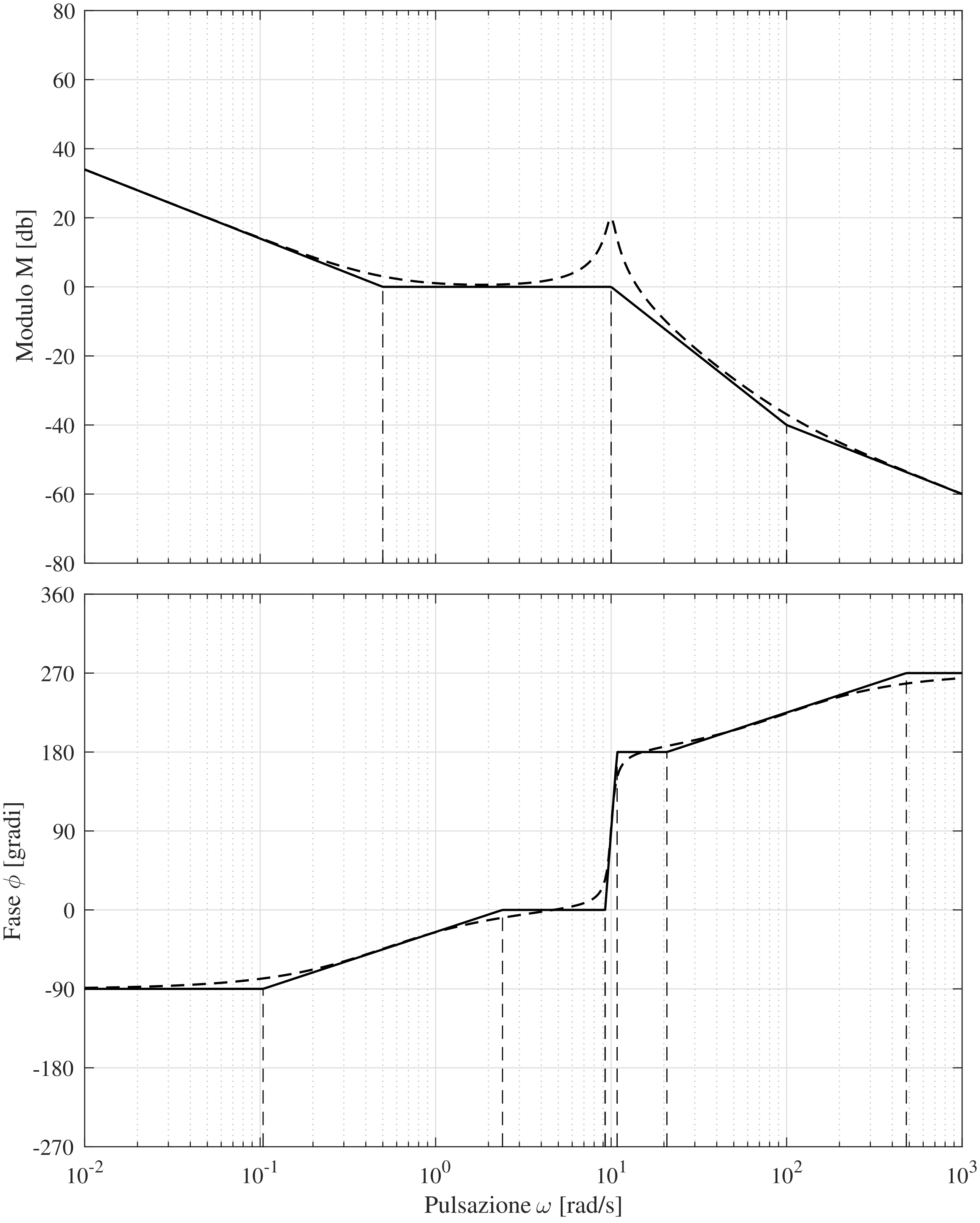
$$|\mu| = 10 \Rightarrow |\mu| = 10.$$

Il segno di μ sarà negativo poichè il sistema ha fase iniziale $-3\pi/2$ (dato dal contributo $-\pi/2$ del polo nell'origine e $-\pi$ del guadagno negativo).

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\,\sin(0.7\,t)\,.$$

SOLUZIONE:
Essendo il sistema instabile (dal momento che è presente un polo doppio nell'origine) la risposta a regime a un qualunque ingresso (anche limitato) diverge, per cui $y_\infty(t) = \infty$.


80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
Modulo M [db]
360
270
180
90
0
-90
-180
-270
Fase ϕ [gradi]
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3}
Pulsazione ω [rad/s]