Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Il sistema dinamico caratterizzato dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2\,x_1 + 4t\,x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= \sin(t)x_2 \\ y &= x_2 \end{cases}$$

è:

◯ lineare, tempo-invariante ◯ non lineare, tempo-invariante
◯ non lineare, tempo-variante ◯ lineare, tempo-variante

2. Se al sistema $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2+9)(s+5)}$ viene fornito in ingresso il segnale $u(t) = 2\sin(3t)$ a regime l'uscita sarà:

◯ nulla
◯ limitata
◯ sinusoidale (con pulsazione $\omega = 3$)
◯ illimitata

3. Quali dei seguenti sistemi sono BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabili, cioè a fronte di ingressi limitati rispondono, asintoticamente, con uscite limitate?

◯ $G(s) = \dfrac{s+4}{s(s+2)(3s+1)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-1}{(2s+1)(s+3)}$
◯ $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)^2(s+4)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+1}{(4s+1)(s^2+9)}$

4. Il valore finale della risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+4}$ vale:

◯ 0
◯ 3
◯ 1/2
◯ $\nexists$

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+7s} = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ corrisponde all'equazione differenziale:

◯ $\dddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 2 = 3\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 4$
◯ $\dddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + 3\,\dot{u}(t) + 2\,u(t)$
◯ $3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4\,y(t) = \dddot{u}(t) + 7\dot{u}(t) + 2\,u(t)$
◯ $3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4\,y(t) = \ddot{u}(t) + 7\dot{u}(t) + 2\,u(t)$

6. Se un sistema ha due poli complessi coniugati $p = 2 \pm j1$ di molteplicità 3, allora la sua risposta temporale (libera o forzata che sia) sarà sicuramente caratterizzata da un termine

- ◯ $y(t) \propto e^{2\,t}\cos(t)$
- ◯ $y(t) \propto t\,e^{2\,t}\cos(t)$
- ◯ $y(t) \propto t^2\,e^{2\,t}\cos(t)$
- ◯ $y(t) \propto t^3\,e^{2\,t}\cos(t)$

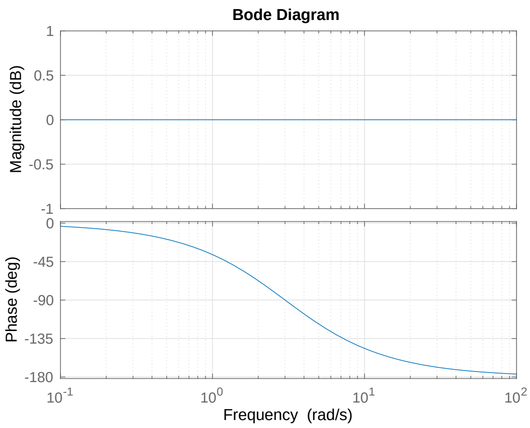
7. Considerando l'ingresso $\bar{u} = 1$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x^3(t) - x(t)u(t) \\ y &= \cos(x(t)) + 2u^2(t) \end{cases}$$

- ◯ $\bar{x} = -0.5$
- ◯ $\bar{x} = 0$
- ◯ $\bar{x} = 1$
- ◯ $\bar{x} = -1$

8. I diagrammi di Bode di figura si riferiscono al sistema:

- ◯ $G(s) = \dfrac{3-s}{3+s}$
- ◯ $G(s) = \dfrac{3+s}{3-s}$
- ◯ $G(s) = e^{-3s}$
- ◯ $G(s) = e^{3s}$



9. Dato un sistema meccanico massa-molla-smorzatore descritto dalla funzione di trasferimento $\dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{Ms^2 + Bs + K}$, con $M = 0.2$ kg, $B = 2$ Ns/m, $K = 300$N/m, quanto vale il tempo di assestamento nella risposta al gradino:

- ◯ $T_a = 3$ s
- ◯ $T_a = 0.3$ s
- ◯ $T_a = 1.2$ s
- ◯ $T_a = 0.6$ s

10. Considerando la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il massimo sorpasso percentuale rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ◯ su due rette parallele all'asse reale
- ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine
- ◯ su due semirette uscenti dall'origine
- ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\delta(t) + \frac{e^{-t}}{3}\sin(5t), \qquad x_2(t) = (3t^3 + 2t + 3)\, e^{-3t}$$

Giarré - b) Dato un sistema LTI tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &=& x_2(t) + u(t) \\ y(t) &=& x_3(t) \end{cases}$$

b.1) Studiare la stabilità del sistema.

b.2) Determinare la risposta impulsiva del sistema.

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

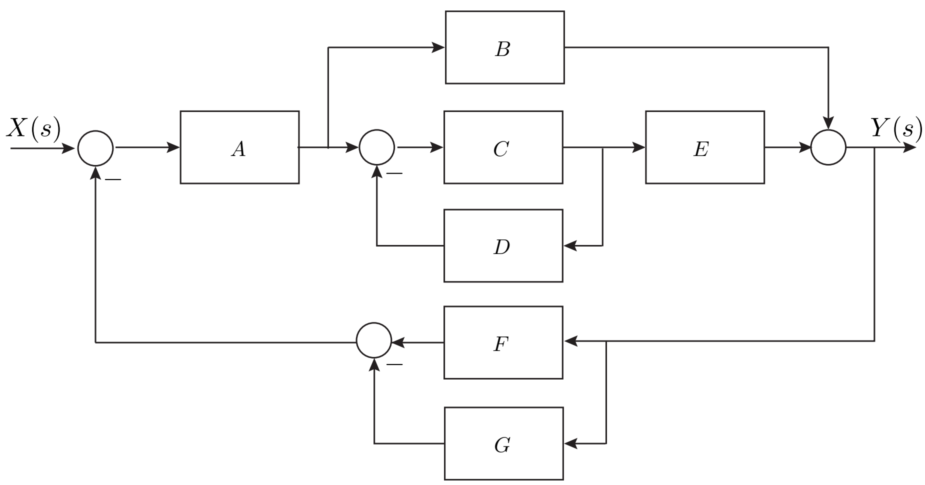
$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16y(t) = -11\dot{x}(t) - 32x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

c) Dato il seguente schema a blocchi:

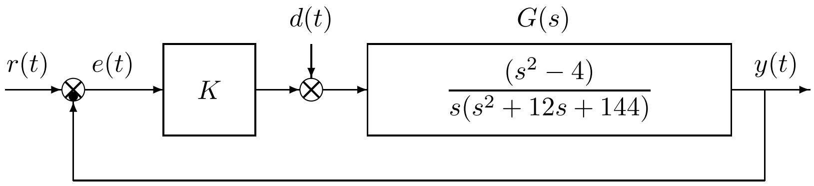


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10(s+40)(s-3)}{(s^2+2.4s+5.44)(s^2+30s+625)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 5, $u(t) = 5$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

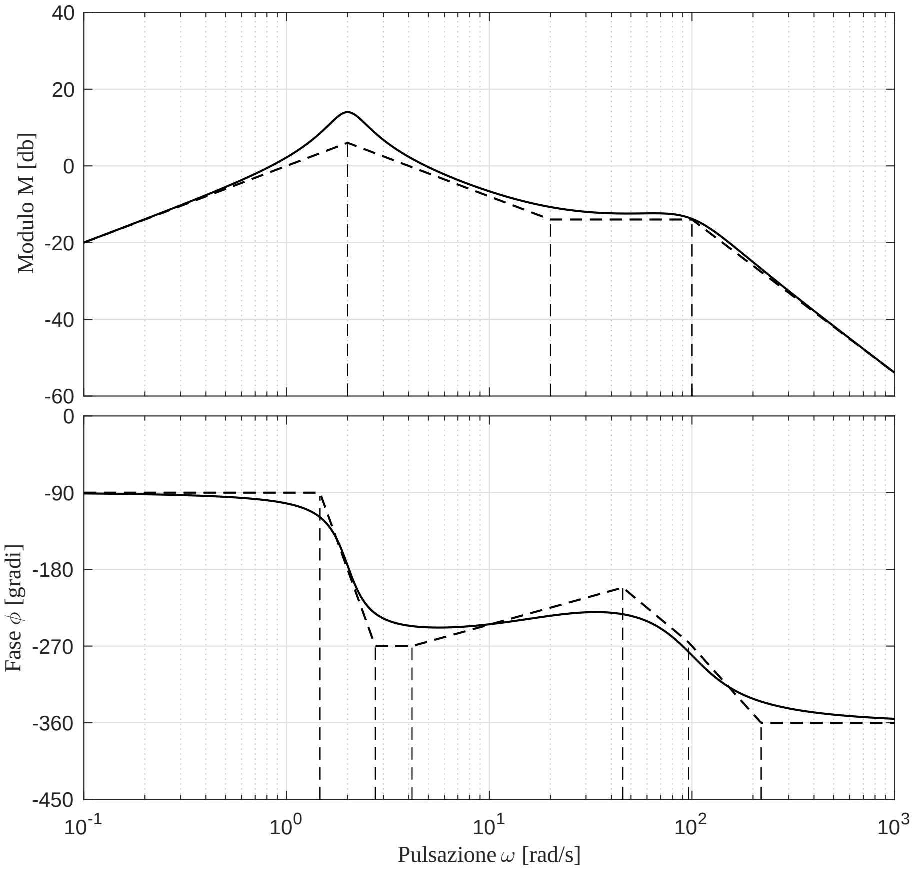
e.2) Posto $K = -10$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 6$ e il disturbo $d(t) = 3\sin(5t)$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

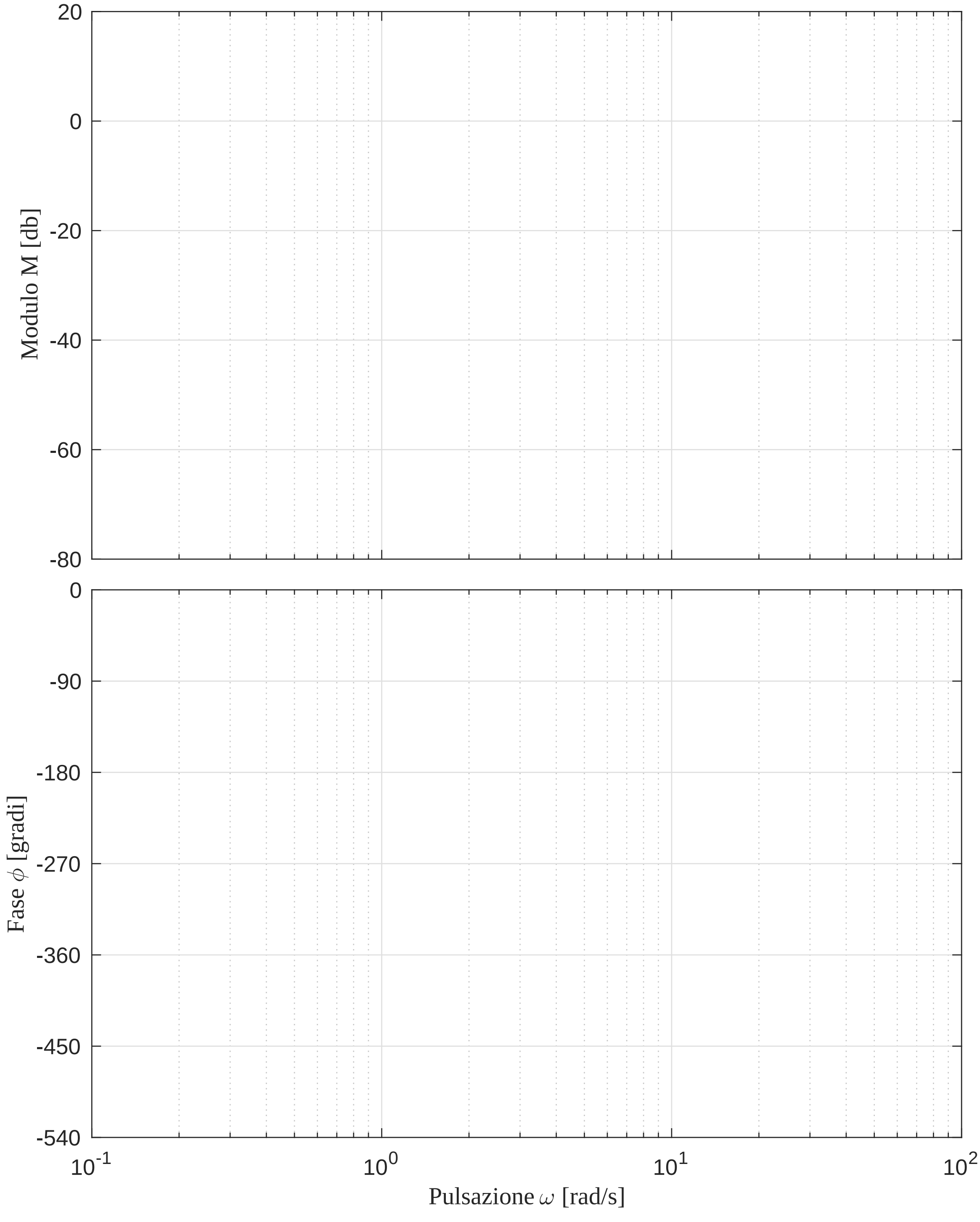


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\,\sin(10\,t + \pi/4)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.:☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Il sistema dinamico caratterizzato dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2\,x_1 + 4t\,x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= \sin(t)x_2 \\ y &= x_2 \end{cases}$$

è:

○ lineare, tempo-invariante   ○ non lineare, tempo-invariante
○ non lineare, tempo-variante   ⊗ lineare, tempo-variante

2. Se al sistema $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2+9)(s+5)}$ viene fornito in ingresso il segnale $u(t) = 2\sin(3t)$ a regime l'uscita sarà:

○ nulla
○ limitata
○ sinusoidale (con pulsazione $\omega = 3$)
⊗ illimitata

3. Quali dei seguenti sistemi sono BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabili, cioè a fronte di ingressi limitati rispondono, asintoticamente, con uscite limitate?

○ $G(s) = \dfrac{s+4}{s(s+2)(3s+1)}$ ⊗ $G(s) = \dfrac{s-1}{(2s+1)(s+3)}$
⊗ $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)^2(s+4)}$ ○ $G(s) = \dfrac{s+1}{(4s+1)(s^2+9)}$

4. Il valore finale della risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+4}$ vale:

○ 0
○ 3
○ 1/2
⊗ $\nexists$

5. La funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+7s} = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ corrisponde all'equazione differenziale:

○ $\dddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 2 = 3\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 4$
⊗ $\dddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + 3\,\dot{u}(t) + 2\,u(t)$
○ $3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4\,y(t) = \dddot{u}(t) + 7\dot{u}(t) + 2\,u(t)$
○ $3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4\,y(t) = \ddot{u}(t) + 7\dot{u}(t) + 2\,u(t)$

6. Se un sistema ha due poli complessi coniugati $p = 2 \pm j1$ di molteplicità 3, allora la sua risposta temporale (libera o forzata che sia) sarà sicuramente caratterizzata da un termine

- ○ $y(t) \propto e^{2t} \cos(t)$
- ○ $y(t) \propto t\, e^{2t} \cos(t)$
- ⊗ $y(t) \propto t^2\, e^{2t} \cos(t)$
- ○ $y(t) \propto t^3\, e^{2t} \cos(t)$

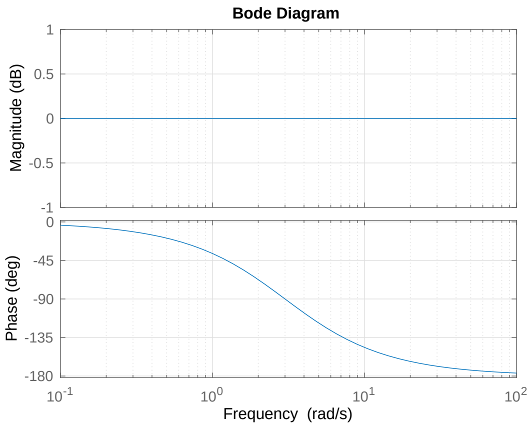
7. Considerando l'ingresso $\bar{u} = 1$, indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x^3(t) - x(t)u(t) \\ y &= \cos(x(t)) + 2u^2(t) \end{cases}$$

- ○ $\bar{x} = -0.5$
- ⊗ $\bar{x} = 0$
- ⊗ $\bar{x} = 1$
- ⊗ $\bar{x} = -1$

8. I diagrammi di Bode di figura si riferiscono al sistema:

- ⊗ $G(s) = \dfrac{3-s}{3+s}$
- ○ $G(s) = \dfrac{3+s}{3-s}$
- ○ $G(s) = e^{-3s}$
- ○ $G(s) = e^{3s}$



9. Dato un sistema meccanico massa-molla-smorzatore descritto dalla funzione di trasferimento $\dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{Ms^2 + Bs + K}$, con $M = 0.2$ kg, $B = 2$ Ns/m, $K = 300$N/m, quanto vale il tempo di assestamento nella risposta al gradino:

- ○ $T_a = 3$ s
- ○ $T_a = 0.3$ s
- ○ $T_a = 1.2$ s
- ⊗ $T_a = 0.6$ s

10. Considerando la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il massimo sorpasso percentuale rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ○ su due rette parallele all'asse reale
- ○ su di una circonferenza con centro nell'origine
- ⊗ su due semirette uscenti dall'origine
- ○ su di una retta parallela all'asse immaginario

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\delta(t) + \frac{e^{-t}}{3}\sin(5t), \qquad x_2(t) = (3t^3 + 2t + 3)\, e^{-3t}$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = 2 + \frac{1}{3}\frac{5}{(s+1)^2 + 25}, \qquad X_2(s) = \frac{18}{(s+3)^4} + \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{3}{(s+3)},$$

Giarré - b) Dato un sistema LTI tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &=& x_2(t) + u(t) \\ y(t) &=& x_3(t) \end{cases}$$

b.1) Studiare la stabilità del sistema.

SOLUZIONE:

Si determinano le matrici nello spazio degli stati: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$.

Da cui si ricava che $G(s) = \frac{s(s-1)}{(s-1)(s^2-1)} = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$.

Gli autovalori sono $\{1, 1, -1\}$ e i poli sono $\{1, -1\}$. Il sistema è instabile internamente e esternamente.

---

b.2) Determinare la risposta impulsiva del sistema.

SOLUZIONE:

La risposta impulsiva é data da:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = ae^t + be^{-t}$, dove $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$ si ottengono con la formula del residui.

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16y(t) = -11\dot{x}(t) - 32x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{-11s - 32}{s^2 + 8s + 16}$$

---

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

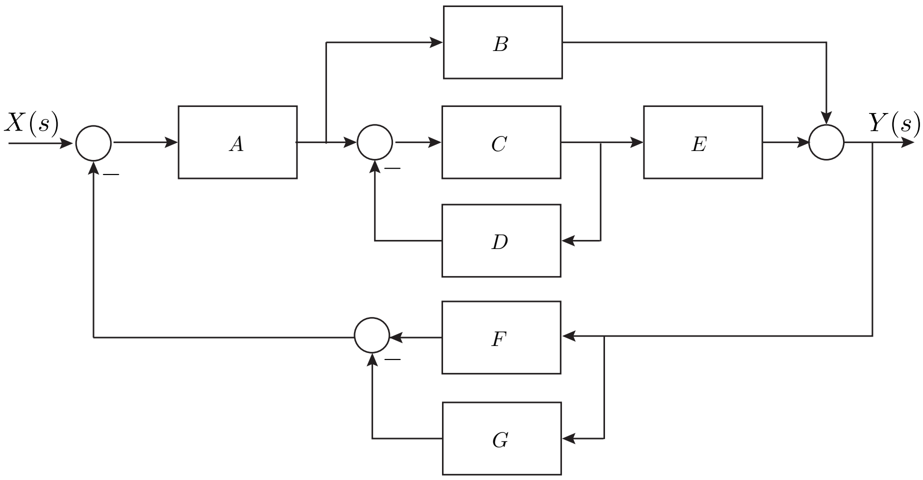
SOLUZIONE:
La risposta al gradino unitario di $G(s)$ può essere ottenuta calcolando l'antitrafromata di Laplace di $Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$. Scomponendo $Y(s)$ in fratti semplici si ottiene

$$Y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{3}{(s+4)^2}$$

da cui, antitrasformando, risulta

$$y(t) = -2 + 2e^{-4t} - 3te^{-4t}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

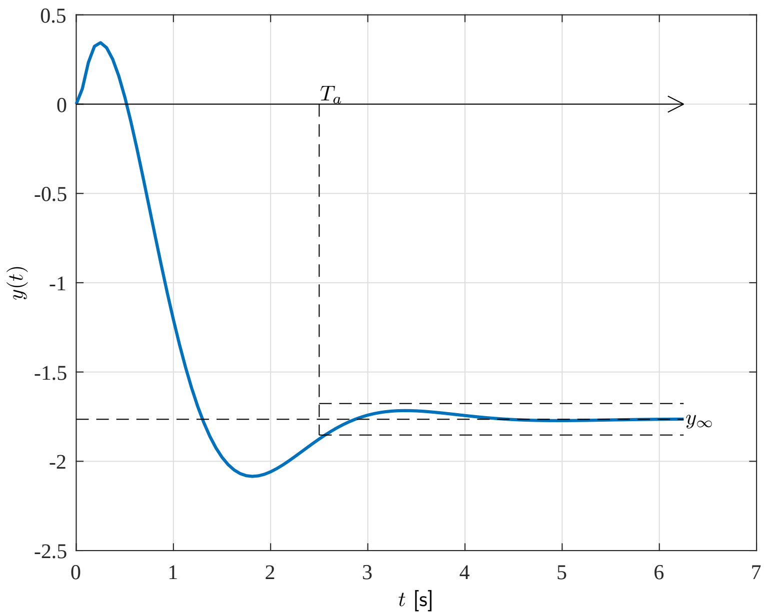
SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ACE + AB(1 + CD)}{1 + CD + ACEF - ACEG + ABF - ABG + ABFCD - ABGCD}$$

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10(s+40)(s-3)}{(s^2+2.4s+5.44)(s^2+30s+625)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 5, $u(t) = 5$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:
Il sistema ha due poli complessi coniugati domainanti $p = \sigma \pm j\omega = -1.2 \pm 2j$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo oscillatorio smorzato, come mostrato in figura.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 5$ risulta

$$y_\infty = A\,G(0) = 5 \cdot (-0.3529) = -1.7647.$$

Il tempo di assestamento T_a è

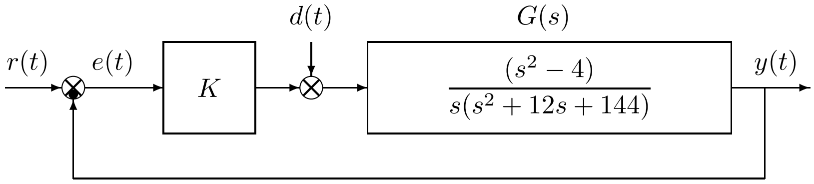
$$T_a = \frac{3}{|\sigma|} = \frac{3}{1.2} = 2.5 \text{ s},$$

e il periodo dell'oscillazioni è

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 3.1416 \text{ s}.$$

La presenza di uno zero reale positivo (con valore simile a $|\sigma|$) causa la sovraelongazione iniziale evidenziata in figura.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s^2-4)}{s(s^2+12s+144)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K+12)s^2 + 144s - 4K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 144 \\ 2 & K+12 & -4K \\ 1 & 148K+1728 & \\ 0 & -4K & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \rightarrow \;\; K > -12 \\ \rightarrow \;\; K > -\frac{1728}{148} = -11.6757 \\ \rightarrow \;\; K < 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-11.6757 = K^\star < K < 0$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{4K^\star}{K^\star+12}} = 12$$

---

e.2) Posto $K = -10$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 6$ e il disturbo $d(t) = 3\sin(5t)$

SOLUZIONE:
Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento costante è nullo, dal momento che l'impianto $G(s)$ presenta un polo nell'origine. Per quanto riguarda il calcolo dell'errore dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{-s^2+4}{s^3+2s^2+144s+40}.$$

Essendo $d(t)$ sinusoidale è possibile sfruttare il concetto di risposta armonica ottenendo $e_{d\infty}(t) = 3\,|F_d(j5)|\sin(5t + \arg\{F_d(j5)\})$ con $|F_d(j5)| = 0.0487$ e $\arg\{F_d(j5)\} = -269.0371^o = 4.6956$ rad.
In conclusione,

$$e_\infty = e_{d\infty} = 0.1462\sin(5t + 4.6956).$$

---

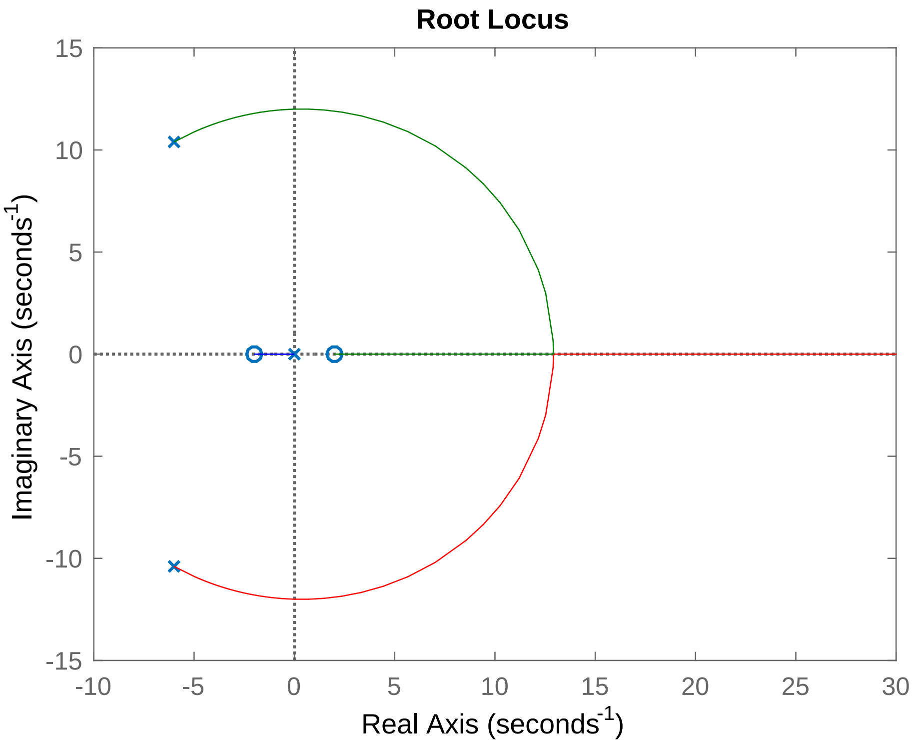
e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato valori negativi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:

Il guadagno della $G(s)$ nella forma poli-zeri è positivo, pertanto il luogo delle radici verrà tracciato con le usuali regole per $K < 0$. C'è un unico asintoto, essendo 1 il grado relativo, pertanto il calcolo del centro degli asintoti è di scarsa importanza. Il luogo delle radici finale è riportato nella seguente figura.

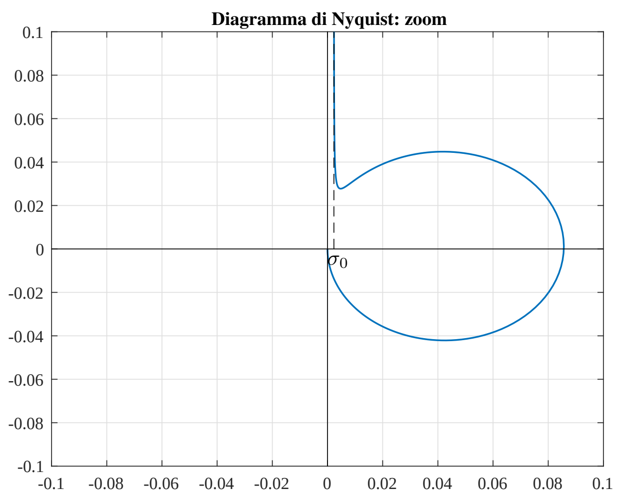


Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici (per $K > 0$) attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = \pm j\omega^\star = \pm j12$, per $K = K^\star = -11.6757$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è $G_0(s) = -\dfrac{1}{36s}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è $G_\infty(s) = \dfrac{1}{s}$ e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -0.0833 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 2 - 2 + 12 = 12 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = -\pi$.
Essendo il sistema di tipo 1, è presente un asintoto verticale che ha ascissa

$$\sigma_a = K\,\Delta_\tau = 0.0023$$

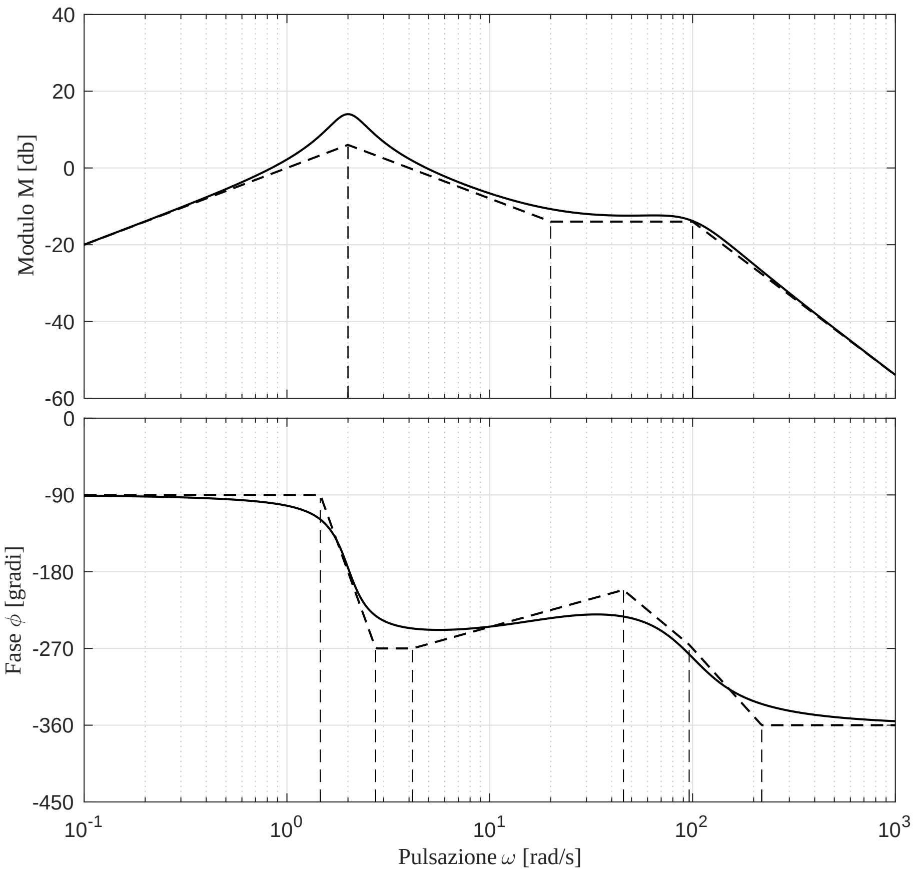
Dal diagramma risultano inoltre esistere un intersezione con l'asse reale , che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta essere

$$\sigma^\star = -1/K^\star = 1/11.6757 = 0.0856$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente a $K^\star$ è $\omega^\star = 12$ rad/s.

---

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{-\,s\,(\frac{1}{20}s+1)}{(0.25s^2+0.2s+1)(\frac{s^2}{100^2}+\frac{1}{100}s+1)} = \frac{-2000\,s\,(s+20)}{(s^2+0.8s+4)(s^2+100s+100^2)}$$

In corrispondenza di $\omega = 2$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati stabili (essendo lo sfasamento -180^o) con $\delta = 0.2$. Infatti

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2 \cdot 2.5} = 0.2.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 8$ db $\simeq 2.5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

In corrispondenza di $\omega = 20$ rad/s è presente uno zero reale stabile.
In corrispondenza di $\omega = 100$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati stabili (sfasamento -180^o) caratterizzati da $\delta = 0.5$ (come si evince dal fatto che diagramma asintotico e diagramma reale si intersecano proprio in corrispondenza del punto di rottura in 100).

Infine, il valore del guadagno μ si determina dalla funzione approssimante per basse frequenze $G_0(s) = \mu\, s$, il cui modulo in corrispondenza del primo punto di rottura vale

$$|G_0(j2)| \approx 6 \text{ db} = 2$$

da cui

$$|\mu(j2)| = 2 \Rightarrow |\mu| = 1.$$

Il segno di μ sarà negativo poichè il sistema ha fase iniziale $-\pi/2$ (dato dal contributo $\pi/2$ dello zero nell'origine e $-\pi$ del guadagno negativo).

---

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\, \sin(10\, t + \pi/4)\,.$$

SOLUZIONE:
A causa dello zero nell'origine l'ingresso costante viene completamente filtrato dalla $G(s)$ mentre la risposta al segnale sinusoidale si ottiene leggendo dai diagrammi di Bode modulo e argomento di $G(j\omega)$ in $\omega = 10$ rad/s .

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 3 \cdot |G(j10)| \sin(10\, t + \arg\{G(j10)\} + \pi/4) \\ &\approx 1.3997 \sin(10\, t - 4.2663 + \pi/4) \\ &\approx 1.3997 \sin(10\, t - 3.4809)\,. \end{aligned}$$

Cognome: Nome: N. Matr.: