CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

SISTEMI ELEMENTARI

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

Principi di modellistica

- **Problema: determinare il modello matematico che approssimi il comportamento di un sistema dinamico**

- **Indagine diretta**: Il sistema viene suddiviso in sottosistemi elementari il cui modello matematico è facilmente identificabile e il modello complessivo viene dedotto componendo i modelli dei sottosistemi elementari e applicando leggi base della fisica. Applicabile a casi semplici in cui, sotto certe ipotesi, l'introspezione fisica del sistema permette la modellazione.
- **Black box**: il sistema si considera come una "scatola nera" di cui occorre identificarne il comportamento mediante l'analisi dei segnali di ingresso (opportunamente variati) e delle rispettive uscite (analisi armonica). Utile in quei casi dove la fisica del sistema è così complessa da non permettere una introspezione
- **Graybox**: Approccio misto: Sistema complessivo scomposto in diversi sottosistemi interagenti, di cui alcuni modellati mediante introspezione fisica e altri mediante l'analisi ingresso/uscita

Derivazione del modello mediante indagine diretta

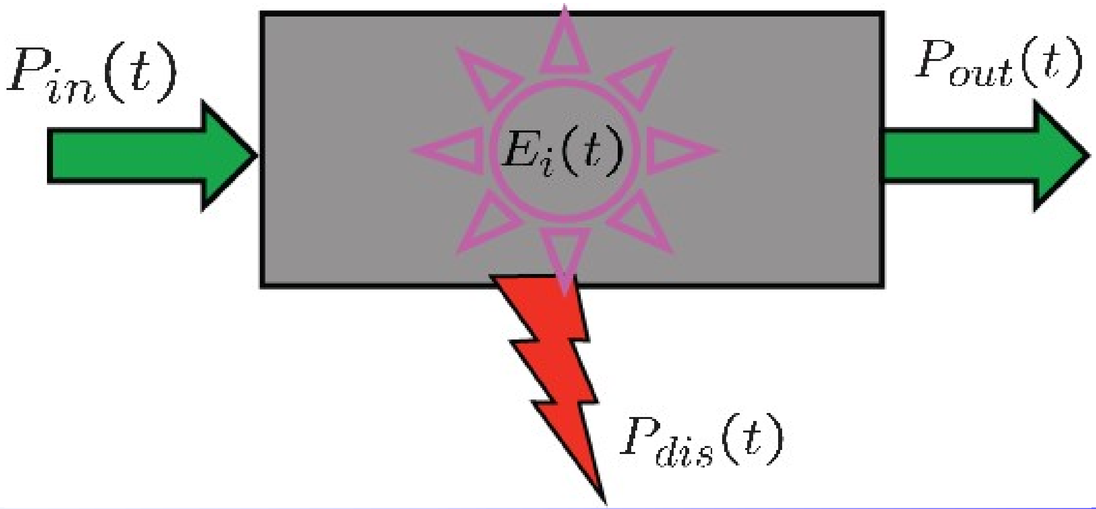
- L'analisi energetica del sistema risulta un utile strumento per la derivazione del modello matematico

Incremento/decremento infinitesimale di energia interna

$$\frac{dE(t)}{dt} = P(t)$$

Potenza istantanea

- La potenza (istantanea) fornita al sistema può:
  - essere dissipata nel sistema
  - variare il livello di energia accumulata nel sistema
  - essere trasferita all'esterno, magari in un altro sistema fisico



Derivazione del modello mediante indagine diretta

- Dalla definizione di stato (**grandezza che sintetizza la storia passata del sistema utile al fine di calcolare l'uscita corrente**) sembra ragionevole scegliere, come variabili di stato, grandezze che determinano quantità di energia accumulate nel sistema (Variabili Energetiche).

- In ogni dominio energetico (tranne quello termico) ci sono due variabili energetiche (dette genericamente *trans-variabile o variabile passante* e *per-variabile o variabile ai morsetti*) e due meccanismi di accumulo dell'energia che dipendono, ciascuno, da una sola delle due variabili energetiche. Il prodotto delle due variabili energetiche rappresenta la potenza in quel particolare dominio energetico.

- In ogni dominio energetico esiste un parametro che lega le due variabili energetiche e che caratterizza il meccanismo di dissipazione dell'energia in quel dominio.

Modellistica energetica

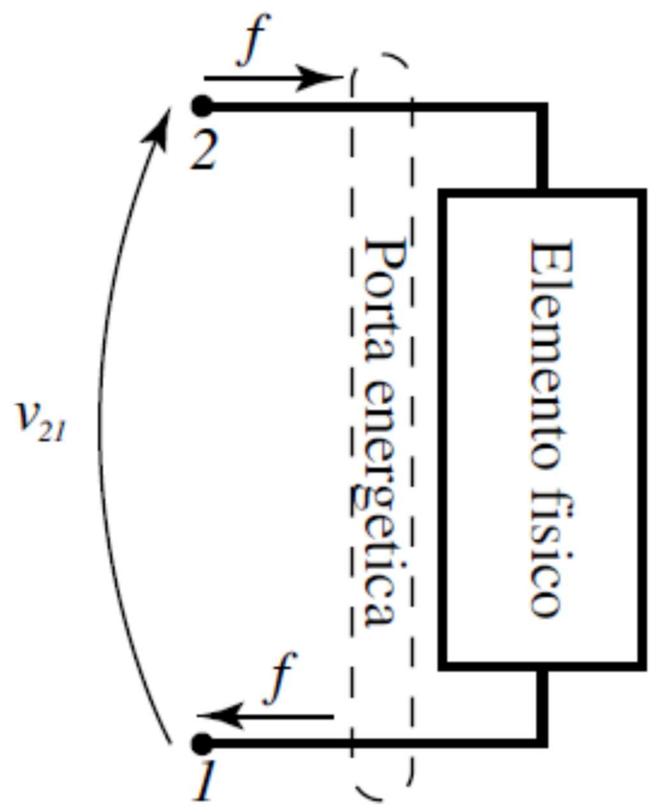
Ciascuno dei due elementi presenti in ogni dominio energetico è caratterizzato dalla medesima struttura, in cui si ha:

- una variabile interna $q(t)$ ottenuta integrando la variabile di ingresso che ne descrive l'accumulo.

$$q_f(t) = q_f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \;\leftrightarrow\; \frac{dq_f}{dt} = f(t)$$

- una relazione costitutiva che lega in maniera statica la variabile interna alla variabile di uscita

$$\Phi_v(v) = q_f \;\leftrightarrow\; v = \Phi_v^{-1}(q_f)$$



Si può notare come l'energia accumulata nell'elemento dinamico sia funzione solo della variabile energia q_f:

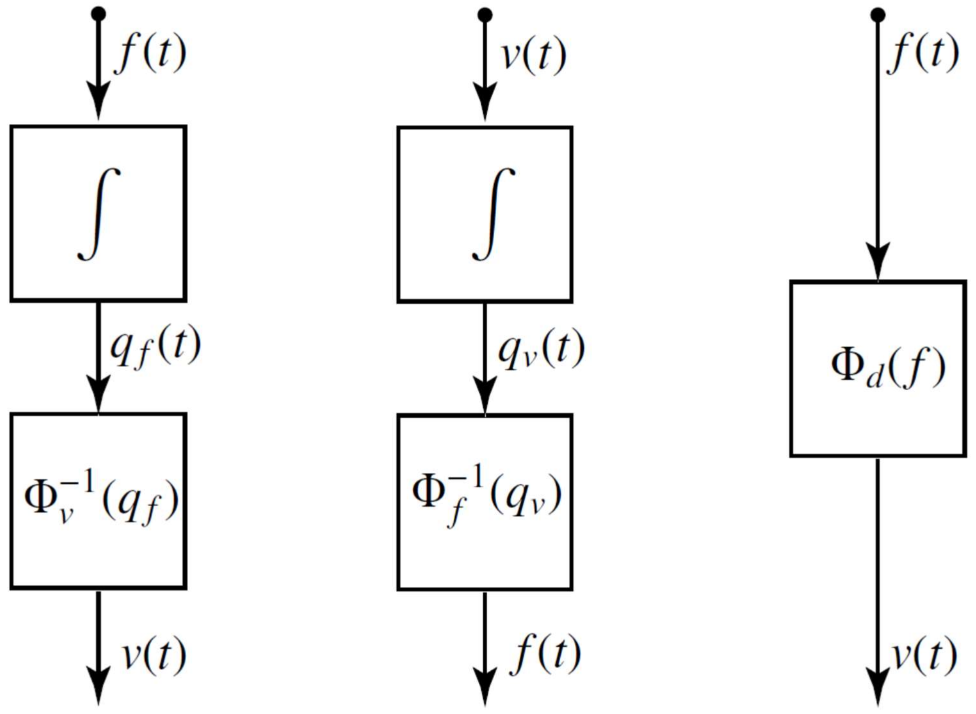
$$E_f = \int_{t_0}^{t} v(\tau)f(\tau)d\tau = \int_{q_f(t_0)}^{q_f(t)} \Phi_v^{-1}(q_f)dq_f = E_f(q_f)$$

Modellistica energetica

- Ai meccanismi di accumulo dell'energia si aggiunge un elemento statico, che collega la trans-variabile con la per-variabile

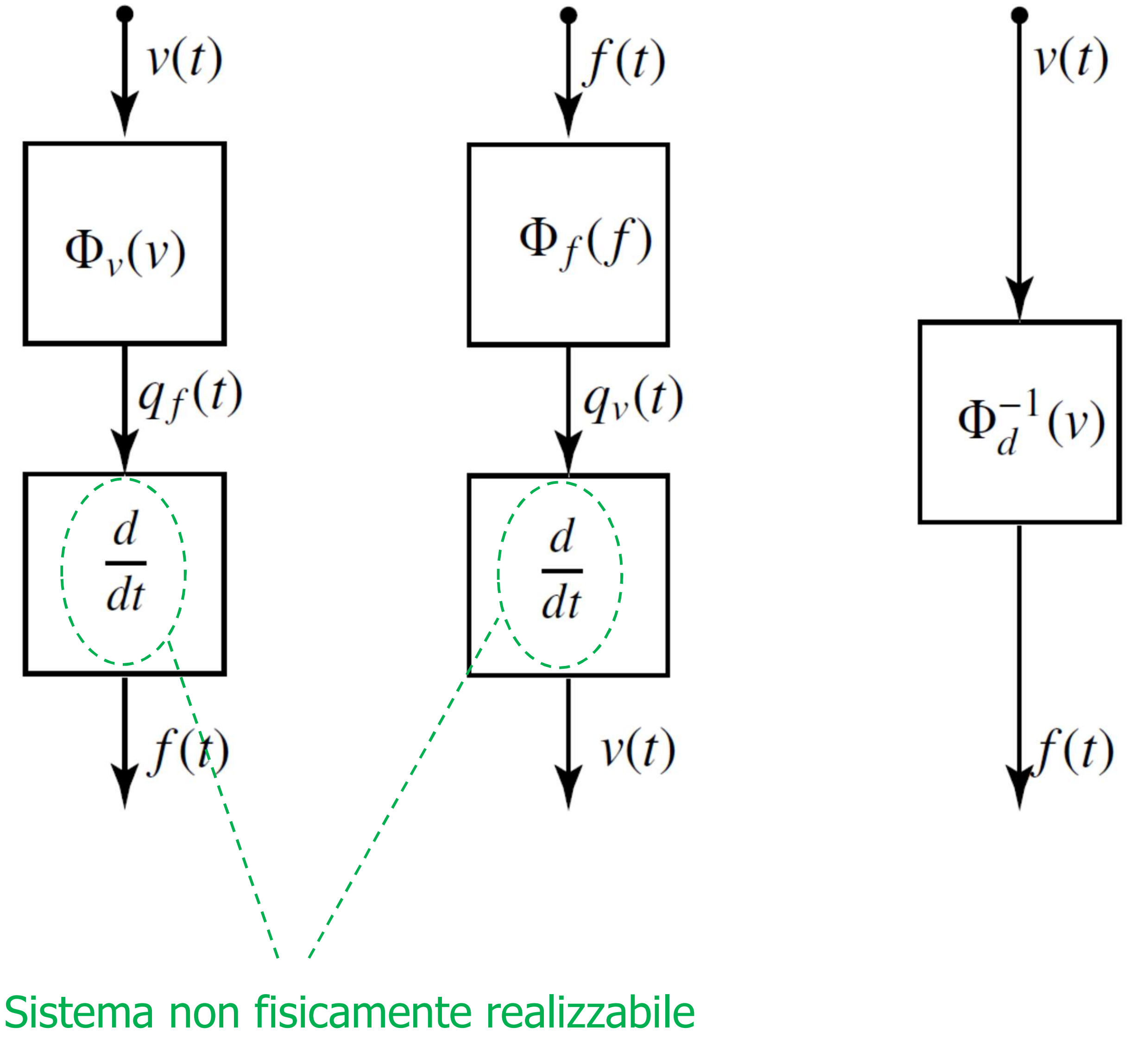
$$v = \Phi_d(f) \;\leftrightarrow\; f = \Phi_d^{-1}(v)$$

- In definitiva gli elementi dei vari domini energetici possono essere modellati come:



Modellistica energetica

- Modelli inversi



Considerazioni energetiche

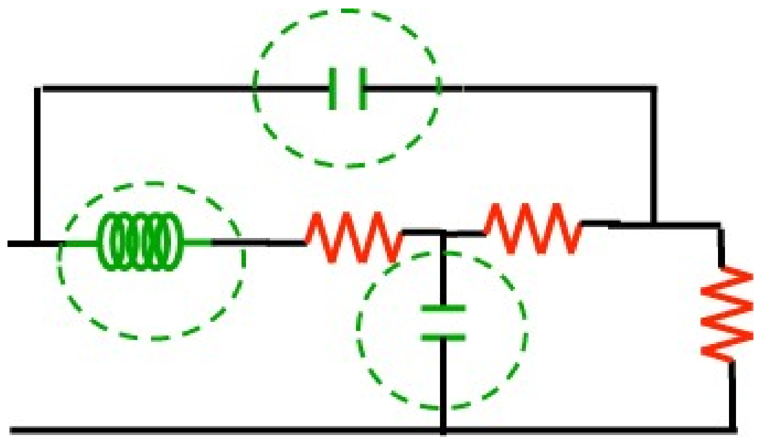
- Definizione delle variabili energetiche nei diversi domini fisici

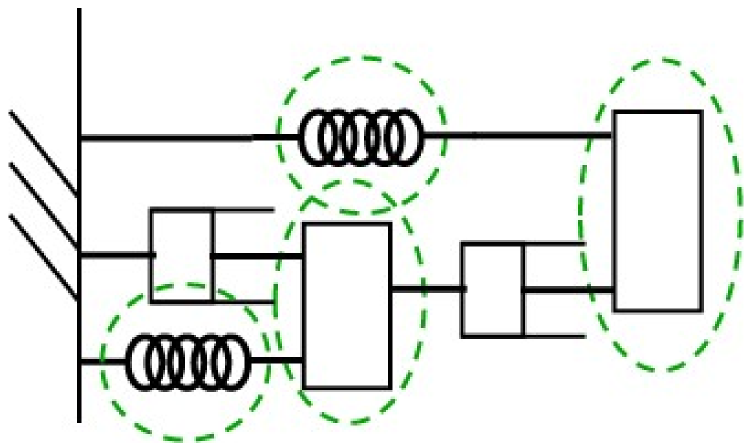
Dominio	Potenza	Per-variabile	Trans-variabile
Elettrico	$v(t) \cdot i(t)$	tensione ai capi di un conduttore	corrente attraverso un conduttore
Meccanico traslazionale	$v(t) \cdot f(t)$	velocità traslazionale di un corpo	forza applicata ad un corpo
Meccanico rotazionale	$\omega(t) \cdot c(t)$	velocità rotazionale di un corpo	coppia applicata ad un corpo
Fluidico	$p(t) \cdot q(t)$	pressione ai capi di una condotta	portata di una condotta
Termico	$w(t)$	flusso di calore	

Derivazione di modelli matematici di sistemi fisici

1. Scomposizione sistema complessivo in sottosistemi **elementari** il cui modello matematico sia facilmente derivabile

Sistema elementare ⟺ Elementi di accumulo dell'energia





➡ Problema: ricavare il modello di un sistema elementare (vedi dopo)

Derivazione di modelli matematici di sistemi fisici

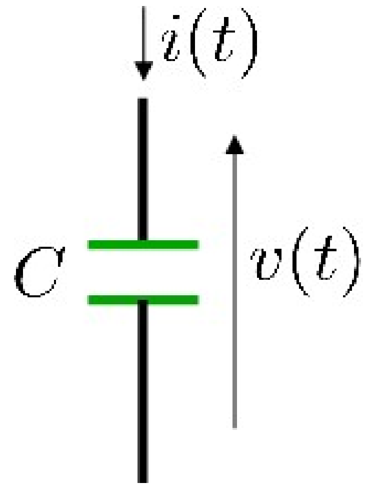
2. Composizione dei modelli matematici elementari mediante principi base della fisica (conservazione dell'energia) per derivare il modello complessivo:

- Sistemi elettrici: leggi di Kirchoff per le tensioni e per le correnti
- Sistemi meccanici: bilanciamento di forze e coppie
- Sistemi idraulici: equazioni di Bernoulli

La complessità dinamica di un sistema (numero di variabili di stato) è legata al numero di elementi di accumulo presenti

Modelli componenti elementari: accumulatori capacitivi

- **Condensatore**
  - Ipotesi: assenza di resistenza e induttanza



Variabili energetiche:

- i corrente (trans-variabile)
- v tensione (per-variabile)

Modello matematico:

Accumulo di carica: $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$

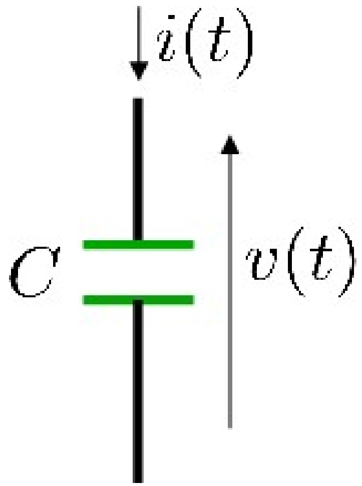
Relazione costitutiva: $q(t) = C\, v(t)$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\updownarrow$$

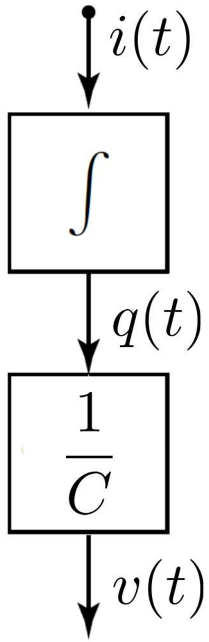
$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$$

- **Condensatore**
  - Ipotesi: assenza di resistenza e induttanza



Variabili energetiche:

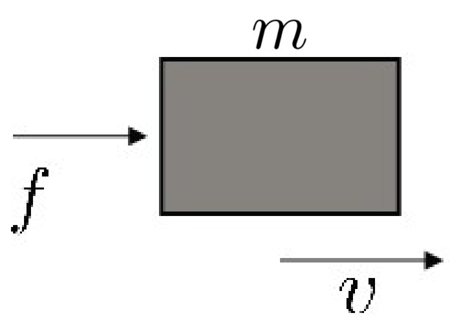
- i corrente (trans-variabile)
- v tensione (per-variabile)

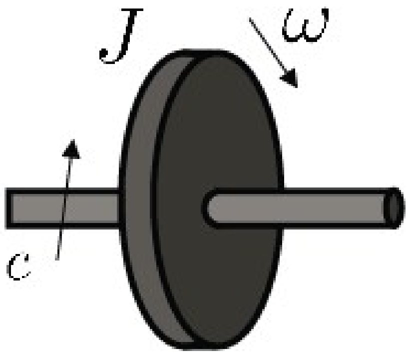


Accumulo di carica: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

Relazione costitutiva: $q(t) = C\,v(t)$

- **Massa/inerzia**
  - Ipotesi: assenza di attrito ed elasticità





Variabili energetiche:

- f, c forza/coppia (trans-v.)
- v, ω velocità tras./rot. (per-v.)

Caso traslazionale

Seconda legge della dinamica: $f(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}$

Relazione costitutiva: $p(t) = m\,v(t)$

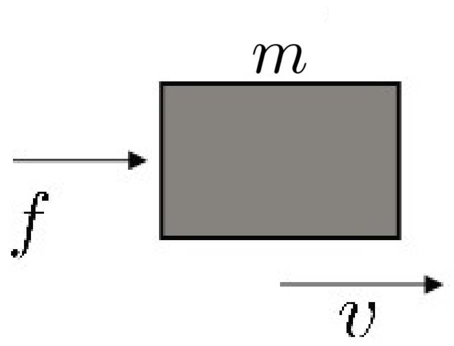
Modello matematico:

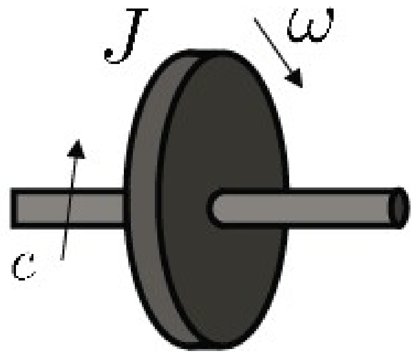
$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Updownarrow$$

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + v(t_0)$$

- **Massa/inerzia**
  - Ipotesi: assenza di attrito ed elasticità





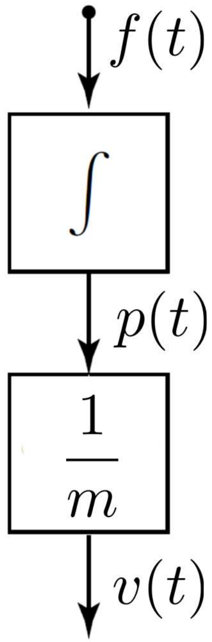
Variabili energetiche:

- $f, \; c$ forza/coppia (trans-v.)
- $v, \; \omega$ velocità tras./rot. (per-v.)

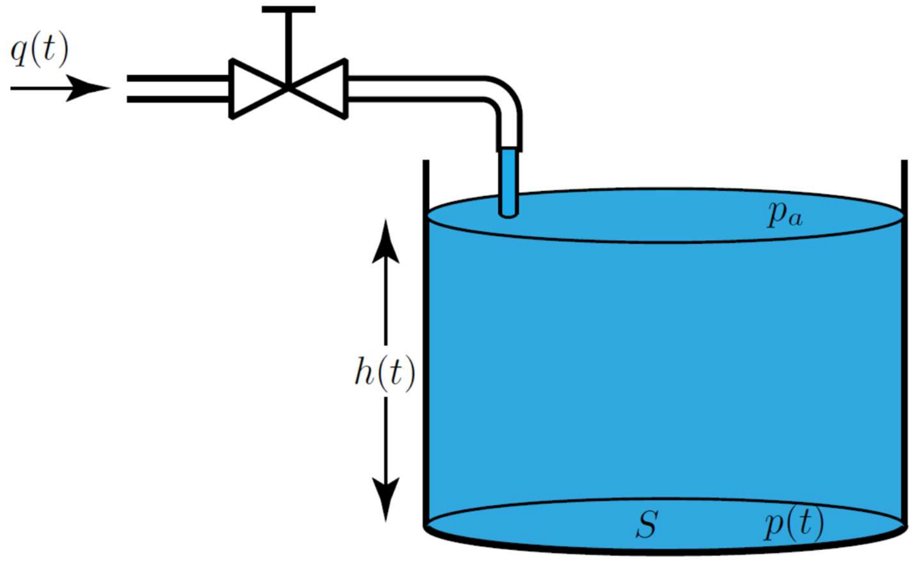
Caso traslazionale

Seconda legge della dinamica: $f(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}$

Relazione costitutiva: $p(t) = m\, v(t)$



- **Serbatoio**
  - Ipotesi: assenza di attrito ed inerzia nulla del fluido



Variabili energetiche:

- q portata (trans-variabile)
- p pressione (per-variabile)

Modello matematico:

Accumulo di liquido: $V(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau + V(t_0)$

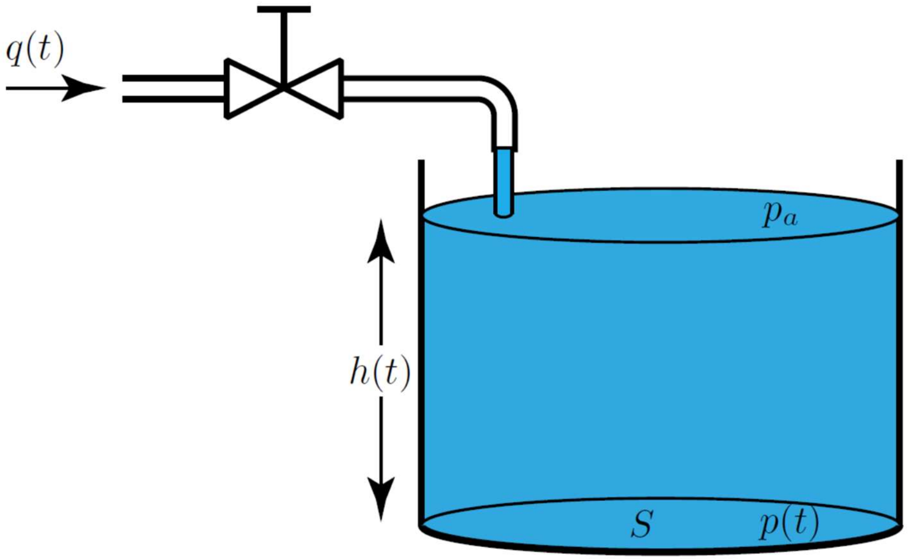
Relazione costitutiva: $V(t) = \frac{S}{\rho\, g}(p(t) - p_a)$
(legge di Bernoulli)

$$q(t) = C\frac{dp(t)}{dt} \qquad C = \frac{S}{\rho\, g}$$

$$\Updownarrow$$

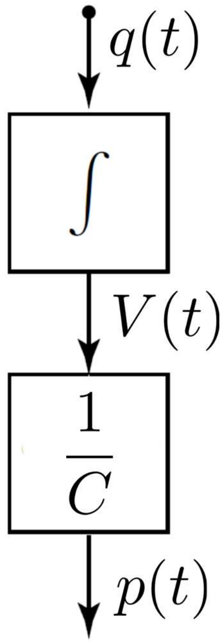
$$p(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau + p(t_0)$$

- **Serbatoio**
  - Ipotesi: assenza di attrito ed inerzia nulla del fluido



Variabili energetiche:

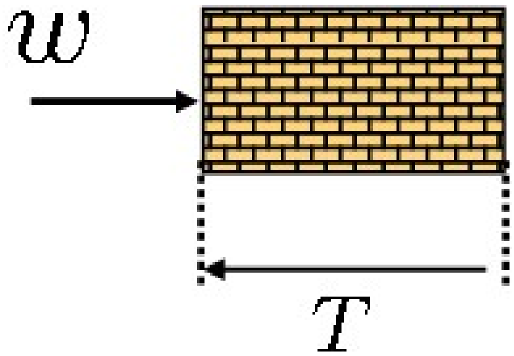
- q portata (trans-variabile)
- p pressione (per-variabile)



Accumulo di liquido: $V(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau + V(t_0)$

Relazione costitutiva: $V(t) = \dfrac{S}{\rho\, g}(p(t) - p_a)$
(legge di Bernoulli)

- **Parete**
  - Ipotesi: assenza di dissipazione

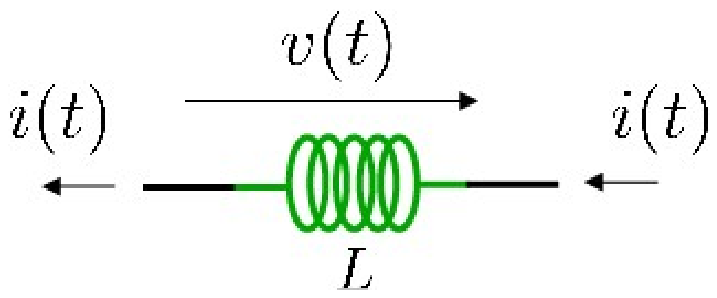


Variabile energetica:

- w flusso di calore (trans-variabile)

Modello matematico: $$w(t) = C_t \frac{dT(t)}{dt}$$

- **Induttanza**
  - Ipotesi: assenza di resistenza e capacità



Variabili energetiche:

- i corrente (trans-variabile)
- v tensione (per-variabile)

Modello matematico:

Flusso magnetico: (legge di Faraday) $\quad v(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$

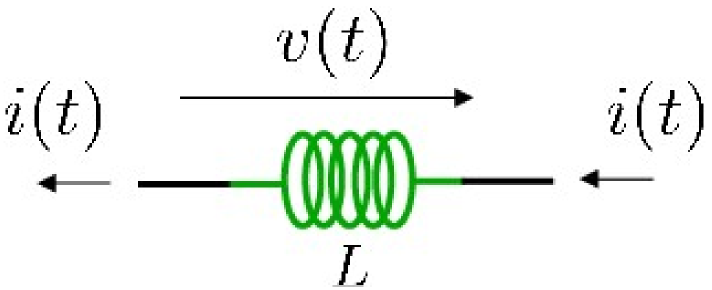
Relazione costitutiva: $\quad \phi(t) = Li(t)$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Updownarrow$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

- **Induttanza**
  - Ipotesi: assenza di resistenza e capacità

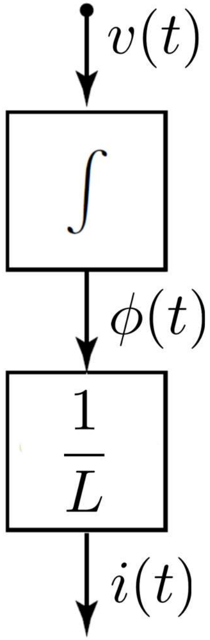


Variabili energetiche:

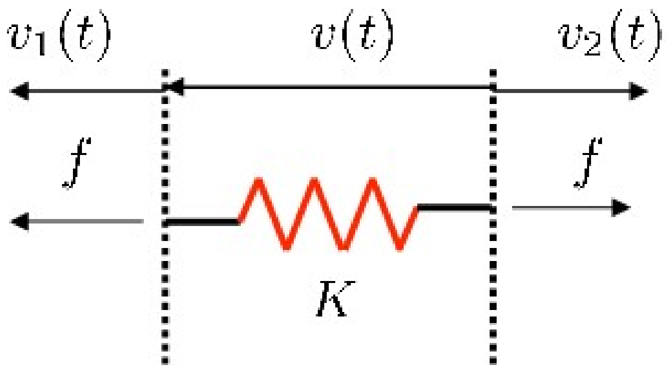
- i corrente (trans-variabile)
- v tensione (per-variabile)

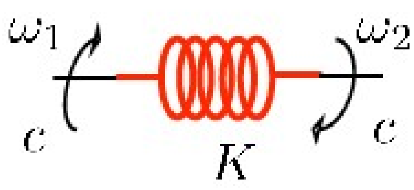
Flusso magnetico: $v(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$
(legge di Faraday)

Relazione costitutiva: $\phi(t) = Li(t)$



- **Molla lineare/torsionale**
  - Ipotesi: assenza di inerzia e attrito





Variabili energetiche:

- $f,\ c$ forza/coppia (trans-v.)
- $v,\ \omega$ velocità tras./rot. (per-v.)

Caso traslazionale

Modello matematico:

Deformazione della molla: $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

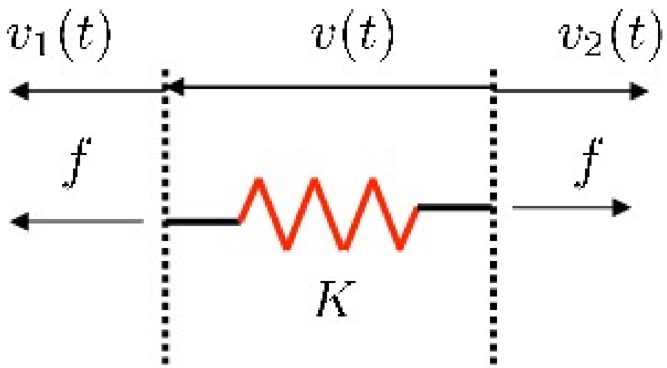
Relazione costitutiva: $x(t) = \dfrac{f(t)}{k}$
(legge di Hooke)

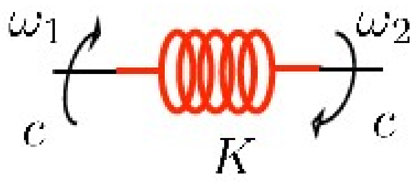
$$v(t) = \frac{1}{k}\frac{df(t)}{dt}$$

$$\Updownarrow$$

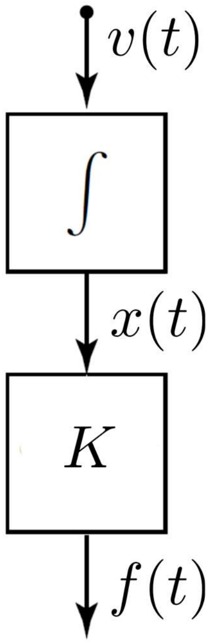
$$f(t) = k\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + f(t_0)$$

- **Molla lineare/torsionale**
  - Ipotesi: assenza di inerzia e attrito





Variabili energetiche:
- f, c forza/coppia (trans-v.)
- v, ω velocità tras./rot. (per-v.)

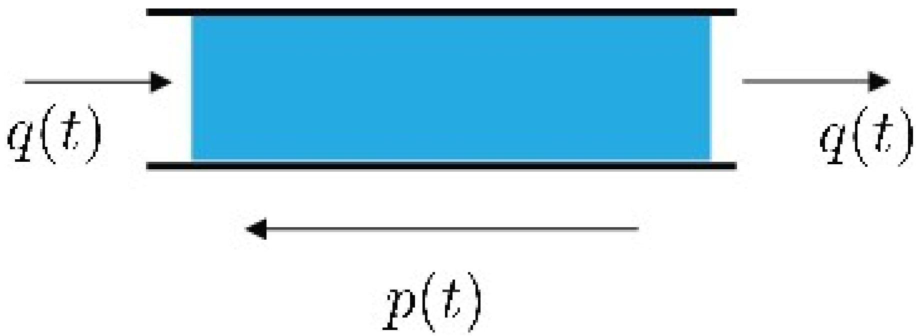


Caso traslazionale

Deformazione della molla: $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

Relazione costitutiva: (legge di Hooke) $x(t) = \dfrac{f(t)}{K}$

- **Condotta idraulica**
  - Ipotesi: assenza di attrito e capacità



Variabili energetiche:

- q portata (trans-variabile)
- p pressione (per-variabile)

Fenomeni inerziali del liquido:

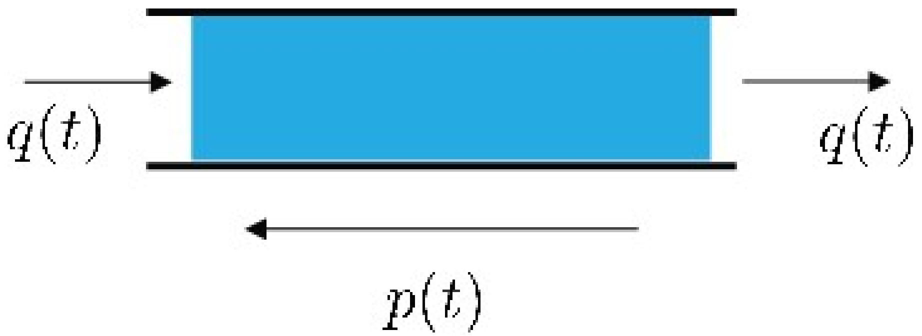
$$m\frac{dv(t)}{dt} = f_1(t) - f_2(t)$$

$$\rho\, l\, S\frac{dv(t)}{dt} = (p_1(t) - p_2(t))S$$

Modello matematico:

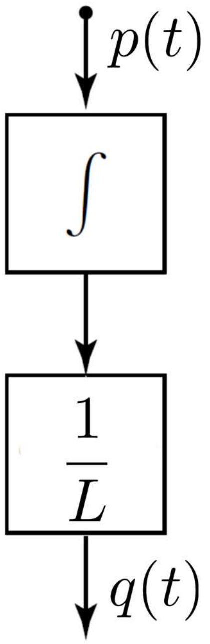
$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t) = L\frac{dq(t)}{dt} \qquad L = \frac{\rho\, l}{S}$$

- **Condotta idraulica**
  - Ipotesi: assenza di attrito e capacità

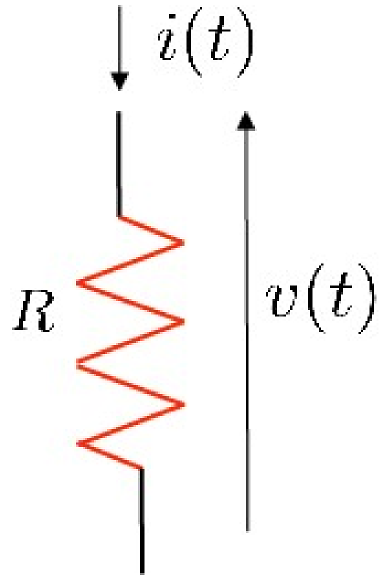


Variabili energetiche:

- q portata (trans-variabile)
- p pressione (per-variabile)



- **Resistenza**
  - Ipotesi: capacità e induttanze nulle



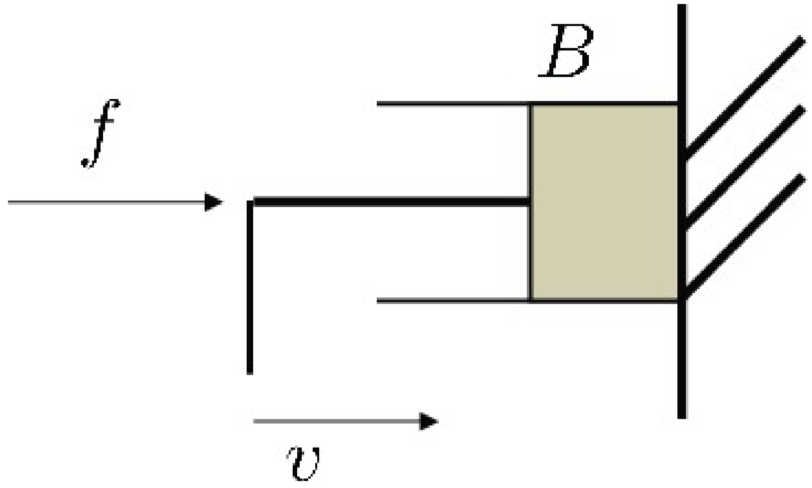
Variabili energetiche:

- i corrente (trans-variabile)
- v tensione (per-variabile)

Modello matematico: $v(t) = R\,i(t)$

Potenza istantanea dissipata: $P(t) = v(t)\,i(t) = Ri^2(t) = \dfrac{v^2(t)}{R}$

- **Ammortizzatore**
  - Ipotesi: massa nulla, corpi rigidi



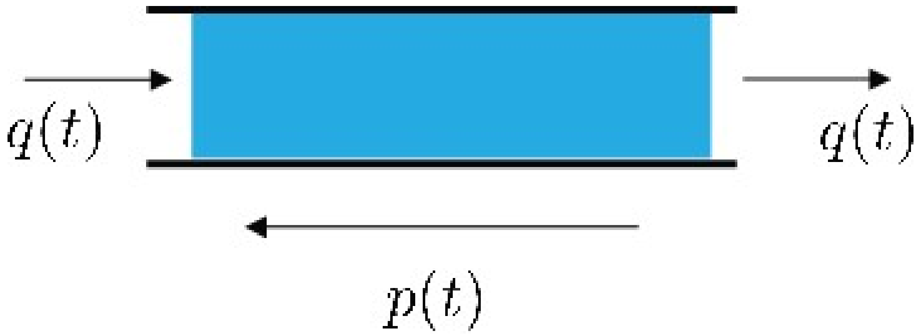
Variabili energetiche:

- $f, \; c$ forza/coppia (trans-v.)
- $v, \; \omega$ velocità tras./rot. (per-v.)

Modello matematico: $f(t) = B\, v(t)$

Potenza istantanea dissipata: $P(t) = f(t)\, v(t) = B\, v^2(t) = \dfrac{f^2(t)}{B}$

- **Condotta idraulica**
  - Ipotesi: condotta piena e inerzia del fluido nulla



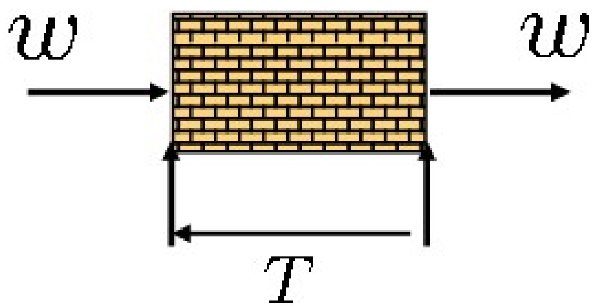
Variabili energetiche:

- q portata (trans-variabile)
- p pressione (per-variabile)

Modello matematico: $$q(t) = \frac{1}{R} p(t)$$

Potenza istantanea dissipata: $$P(t) = q(t)p(t) = Rq^2(t) = \frac{p^2(t)}{R}$$

- **Parete**
  - Ipotesi: assenza di accumulo di calore interno



Variabile energetica:

- w flusso di calore (trans-variabile)

Modello matematico: $T(t) = R_t\, w(t)$

Potenza istantanea dissipata: $P(t) = w(t) = \dfrac{T(t)}{R_t}$

Costruzione di modelli per sistemi complessi

- Sistemi elettrici
  - leggi di Kirchoff in corrente (ai nodi)
  - leggi di Kirchoff in tensione (alle maglie)

- Sistemi meccanici
  - diagramma di corpo libero
    - si tengono solo le masse
    - gli elementi di collegamento sono sostituiti dalle relative azioni

- Un modo per risolvere problemi complessi è quello che sfrutta le analogie tra domini fisici
  - si riporta per analogia il sistema in esame ad uno equivalente nel dominio nel quale l'analisi risulta più semplice o più vicina alla cultura del progettista

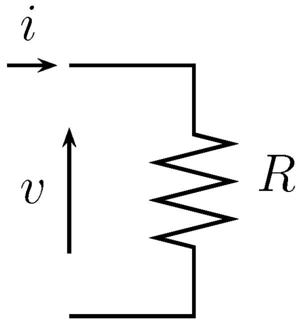
Costruzione di modelli per sistemi complessi

- La complessità dinamica di un sistema è legata al numero di elementi di accumulo presenti

- La complessità dinamica si traduce nell'ordine di derivazione massimo della variabile di uscita

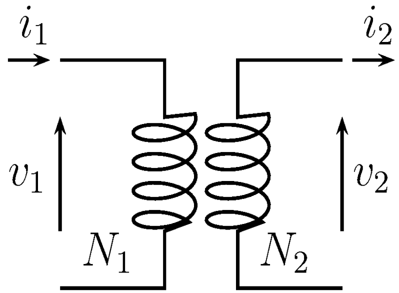
- Attenzione
  - due elementi di accumulo dello stesso tipo (capacitivo o induttivo) non separati da elemento dissipativi o di accumulo di tipo diverso vanno considerati come un unico elemento di accumulo
    - due condensatori in parallelo fanno un unico condensatore di capacità somma delle due
    - due masse collegate direttamente in modo rigido sono da considerarsi equivalenti ad una sola massa di valore pari alla somma delle due

Dominio elettrico: tabella riassuntiva



Resistenza

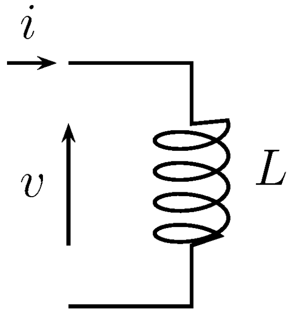
$$v(t) = R\, i(t)$$



Trasformatore ideale

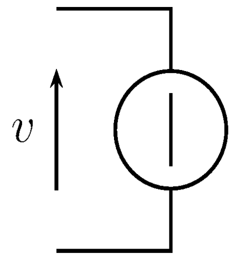
$$v_1(t) = \frac{N_1}{N_2}\, v_2(t)\ , \quad i_1(t) = \frac{N_2}{N_1}\, i_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 i_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\, v_2\right)\left(\frac{N_2}{N_1}\, i_2\right) = v_2 i_2$$



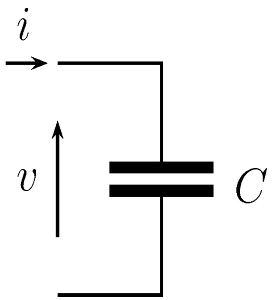
Induttanza

$$v(t) = L\, \frac{d\, i(t)}{d\, t}$$



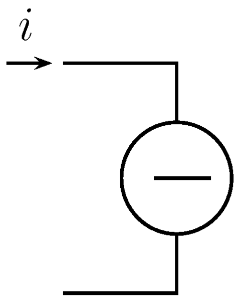
Generatore di tensione

$v(t) = V_0$ (= cost.)



Capacità

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau + \frac{Q_0}{C}$$



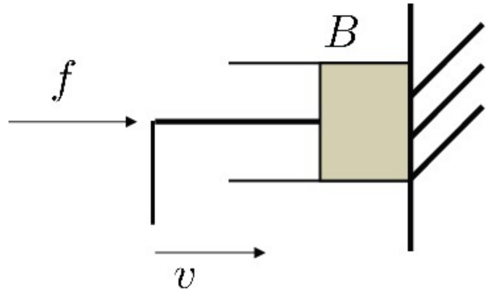
Generatore di corrente

$i(t) = I_0$ (= cost.)

Q_0 è la carica iniziale del condensatore
N_1 e N_2 sono i numeri di spire del circuito primario e secondario

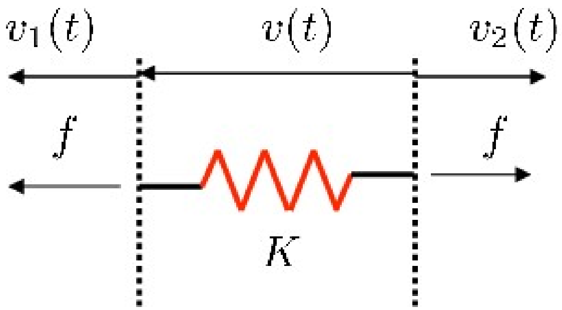
Dominio meccanico: tabella riassuntiva

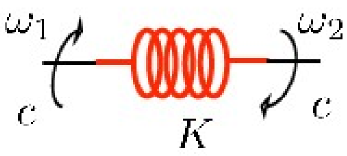
- Ammortizzatore



$$f(t) = B\,v(t)$$

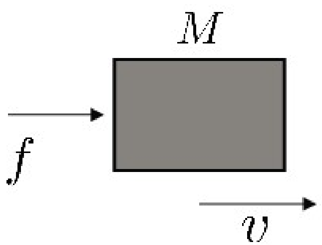
- Molla

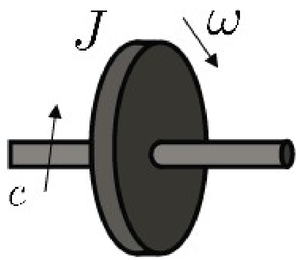




$$v(t) = \frac{1}{K}\frac{df(t)}{dt} \qquad \omega(t) = \frac{1}{K}\frac{dc(t)}{dt}$$

- Massa/inerzia

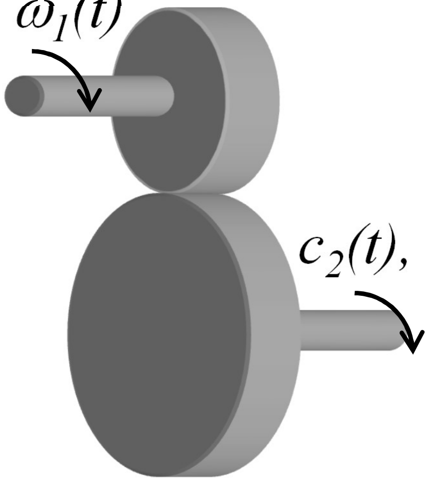




$$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt} \qquad f(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

Dominio meccanico: tabella riassuntiva

- **Riduttore**



$$k_r = \frac{N_1}{N_2} \qquad N_2 > N_1, \quad k_r < 1$$

In un riduttore ideale (senza perdite per attrito e con accoppiamento perfetto tra gli ingranaggi), **la velocità viene ridotta** del fattore k_r

$$\omega_2 = k_r\ \omega_1$$

Poiché in questo meccanismo la potenza entrante deve essere uguale a quella uscente

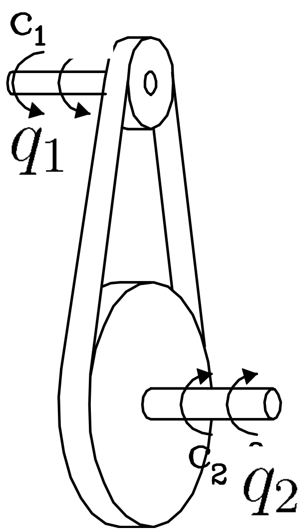
$$P_i(t) = c_1(t)\dot{\theta}_1(t) = c_2(t)\dot{\theta}_2(t) = P_u(t) \qquad c_2(t) = c_1(t)/k_r$$

la coppia risulta amplificata.

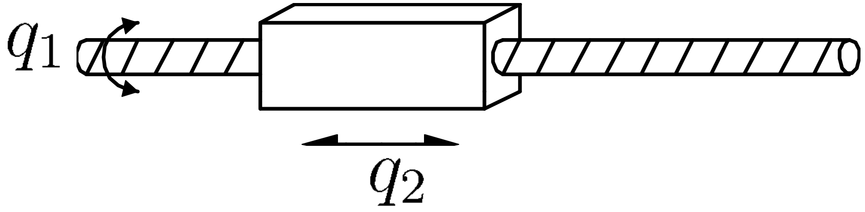
Dominio meccanico: tabella riassuntiva

- Altri sistemi di conversione del moto:

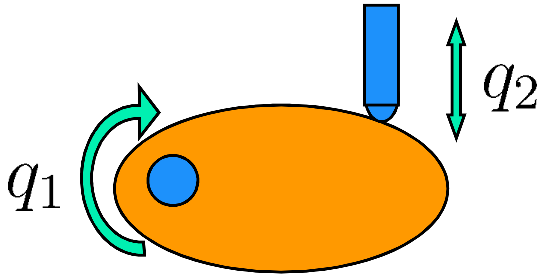
Cinghia/puleggia



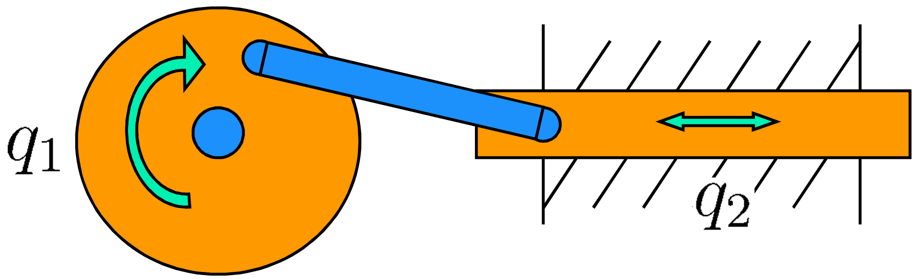
Vite a ricircolazione di sfere



Camma



Biella/manovella



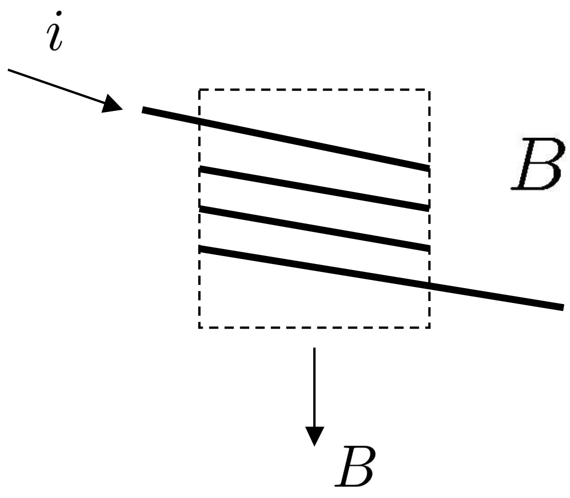
- Assumendo masse e elasticità trascurabili (o concentrate altrove) il modello tra le variabili energetiche che discende direttamente dalla relazione cinematica $q_2 = f(q_1)$ risulta

$$\dot{q}_2 = K(q_1)\,\dot{q}_1 \quad \text{con} \quad K(q_1) = \frac{df(q_1)}{dq_1} \qquad \longrightarrow \qquad \tau_2 = K^{-1}(q_1)\,\tau_1$$

Modelli di sistemi elettromeccanici

- Derivabili mediante le leggi base dell'elettromagnetismo. Queste sono riconducibili a tre leggi fondamentali:

  i. *Una carica elettrica che fluisce entro un conduttore, ovvero una corrente, genera un campo magnetico proporzionale alla corrente stessa.*



$$B = \frac{\mu}{2\pi R} N i$$

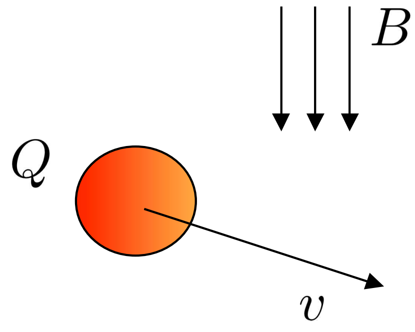
R raggio

N numero di spire

μ permeabilità magnetica del materiale

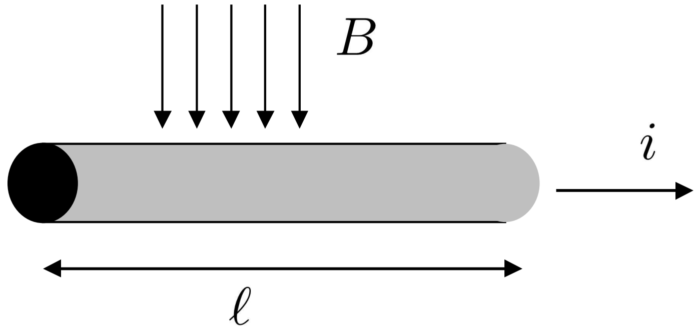
Modelli di sistemi elettromeccanici

ii. *Un campo magnetico esercita una forza su qualunque carica elettrica che si muove relativamente al campo magnetico stesso*



$$\vec{f} = Q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\otimes$ Forza entrante

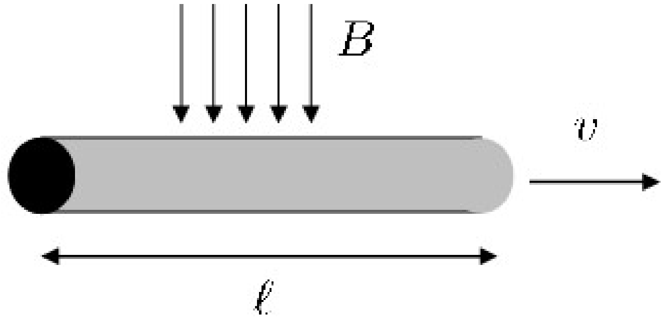


$\otimes$ Forza entrante

$$f = B\,\ell\,i$$

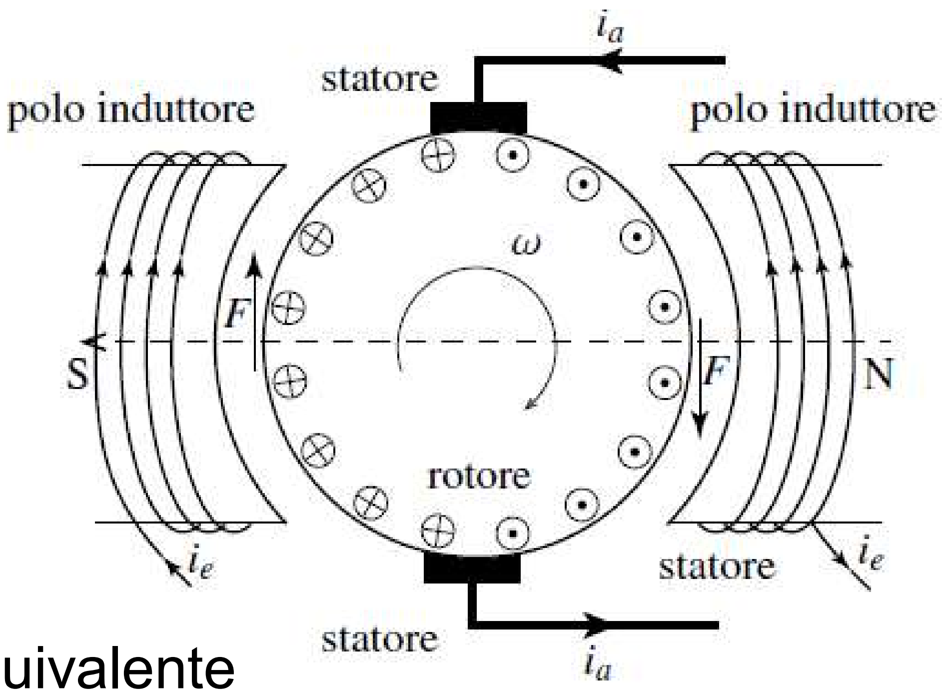
iii. *Ogni volta che un conduttore è in moto relativo rispetto ad un campo magnetico si stabilisce una differenza di potenziale agli estremi del conduttore stesso*

$$\Delta e = e_2 - e_1 = B\,\ell\,v$$

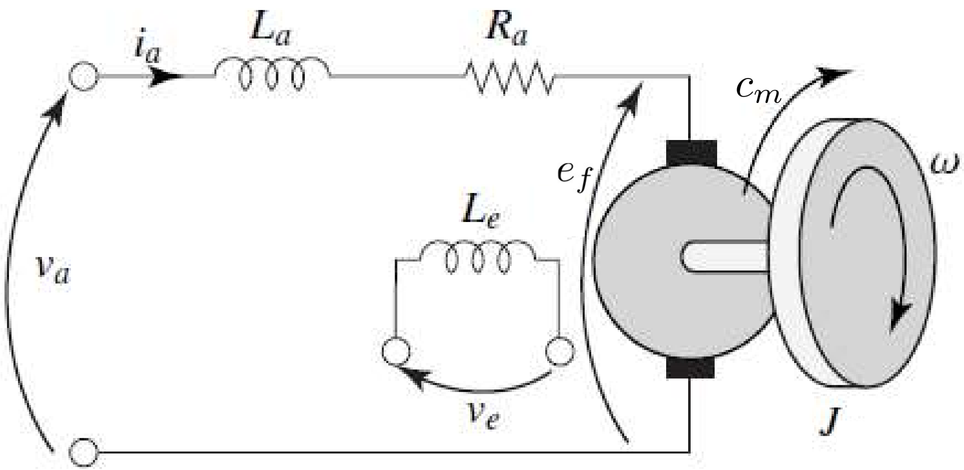


Esempio di sistema elettromeccanico (motore in cc)

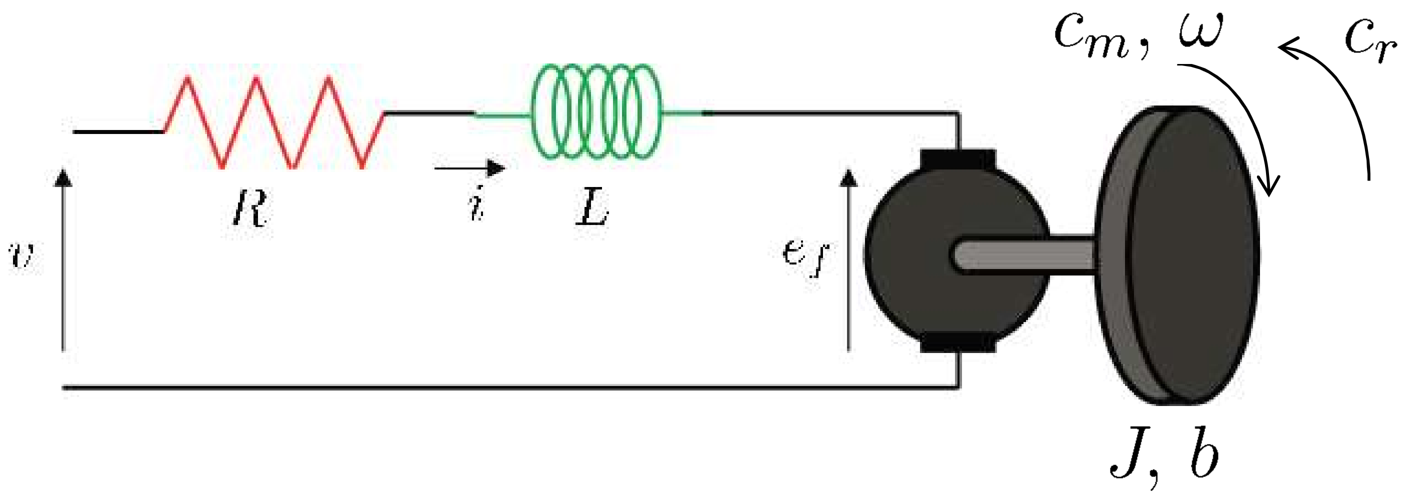
- Schema fisico



- Schema circuitale equivalente



Esempio di sistema elettromeccanico (motore in cc)



Dinamica elettrica

$$v(t) - e_f(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Accoppiamento elettromeccanico

$$c_m(t) = k\,i(t)$$

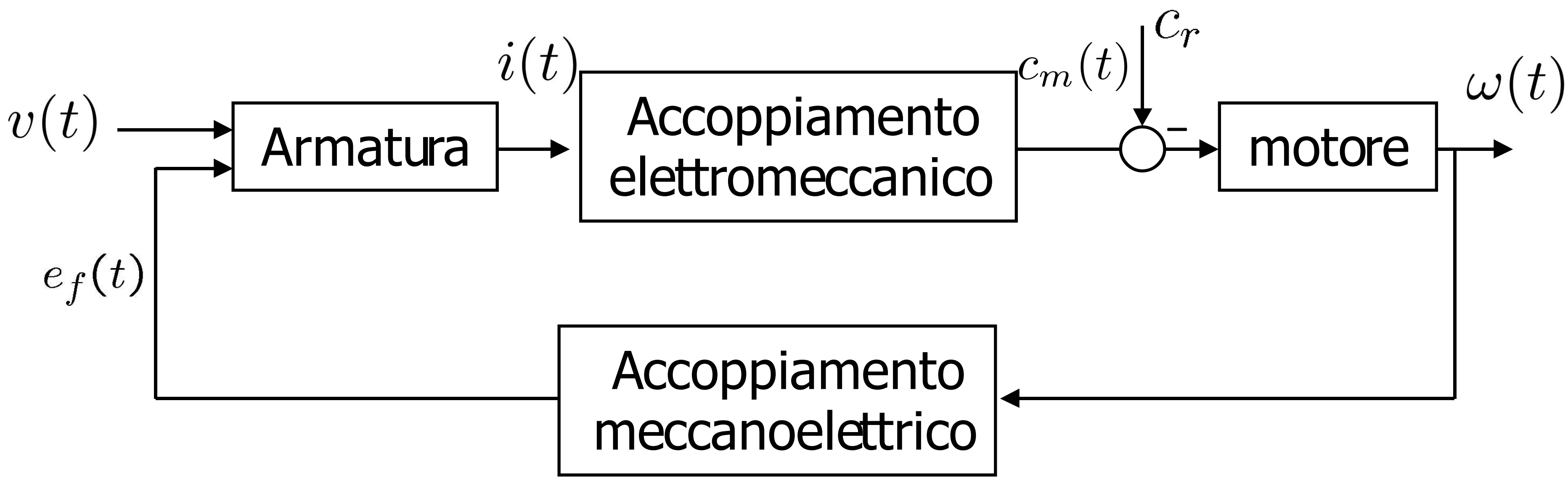
Accoppiamento meccanoelettrico

$$e_f(t) = k\,\omega(t)$$

Dinamica meccanica

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - b\,\omega(t)$$

Esempio di sistema elettromeccanico (motore in cc)



Dinamica elettrica

$$v(t) - e_f(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Accoppiamento elettromeccanico

$$c_m(t) = k\,i(t)$$

Accoppiamento meccanoelettrico

$$e_f(t) = k\,\omega(t)$$

Dinamica meccanica

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - b\,\omega(t)$$

Esempio di sistema elettromeccanico (motore in cc)

- Posto $x_1 = i \qquad u_1 = v \qquad y_1 = \omega$

  $x_2 = \omega \qquad u_2 = c_r$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \qquad y_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{J}x_1(t) - \frac{b}{J}x_2(t) - \frac{1}{J}u_2(t)$$

- ovvero $\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{aligned}$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y = y_1$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E la rappresentazione esterna?

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

SISTEMI ELEMENTARI
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti