

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_

Biagiotti

Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Giarré

## Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 21 giugno 2018 - Quiz

*Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.*

*I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.*

- Dato un sistema di controllo in retroazione che garantisce un margine di fase della funzione di anello  $M_f = 90^\circ$ , i poli dominanti (o il polo dominante) della funzione di sensitività complementare saranno caratterizzati da un coefficiente di smorzamento che, approssimativamente, vale:
  - $\delta \approx 0.1$
  - $\delta \approx 0.45$
  - $\delta \approx 0.9$
  - $\delta \approx 1$
- Per ridurre di un fattore 1000 l'influenza sull'uscita di un disturbo di misura  $n(t)$  frequenzialmente collocato nell'intervallo  $[\omega_{nmin}, \omega_{nmax}]$  è sufficiente che:
  - la funzione di sensitività alla pulsazione  $\omega_{nmin}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività alla pulsazione  $\omega_{nmax}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività complementare alla pulsazione  $\omega_{nmin}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività complementare alla pulsazione  $\omega_{nmax}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
- Dato un sistema di controllo in retroazione, un disturbo di tipo "d" sull'impianto:
  - può essere cancellato completamente mediante l'inserimento nella funzione di anello di un polo nell'origine
  - può essere attenuato alzando il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo
  - se costituito da un'unica sinusoide a frequenza  $\bar{\omega}_d$  può essere cancellato perfettamente introducendo nella funzione di anello una coppia di poli puramente immaginari  $\pm j\bar{\omega}_d$
- La compensazione in avanti di un disturbo misurabile può servire per:
  - compensare un disturbo di misura ad alta frequenza
  - cancellare un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita senza la necessità di un controllo in retroazione
  - ridurre un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita qualora i vincoli di progetto sul controllo in retroazione non consentano di ridurlo a sufficienza
  - allargare la banda del sistema in retroazione in cui è inserito

5. Il progetto per cancellazione di una rete anticipatrice:
- se fattibile, consente di eliminare il problema delle code di assestamento per impianti senza zeri
  - è possibile se fissata la posizione dello zero la frequenza di attraversamento è minore di quella desiderata
  - prevede la cancellazione di un polo del sistema a frequenza maggiore della frequenza di attraversamento
6. Dato un sistema di controllo in retroazione, l'intervallo di pulsazioni in cui far cadere la pulsazione di incrocio  $\omega_c$  del guadagno d'anello:
- è determinato dalla massima sovraelongazione ammissibile nella risposta del sistema a un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di disturbi di misura
  - è limitato inferiormente dal vincolo di errore a regime nullo a fronte di un ingresso a gradino
7. Un regolatore proporzionale integrale (PI):
- garantisce errore a regime nullo a fronte di ingresso a gradino
  - garantisce errore a regime nullo purchè l'ingresso sia limitato
  - qualora l'attuatore sia caratterizzato da una saturazione può dare luogo a una risposta particolarmente lenta
8. Un sistema di controllo in retroazione tempo-continuo che garantisce la stabilità asintotica del sistema complessivo può diventare instabile quando viene discretizzato?
- sì, se il regolatore viene discretizzato con la tecnica delle differenze all'avanti
  - sì, se a causa del tempo di campionamento scelto il ricostruttore rende negativo il margine di fase del guadagno d'anello
  - sì, se il tempo di campionamento è troppo basso
  - no, mai
9. In un sistema di controllo digitale, il fenomeno dell'aliasing:
- consiste in una sovrapposizione frequenziale della componente primaria e di quelle secondarie che costituiscono lo spettro del segnale campionato
  - può essere ridotto abbassando la pulsazione di campionamento del regolatore
  - può essere ridotto abbassando il periodo di campionamento del regolatore
  - è più accentuato se vengono impiegati regolatori passa alto piuttosto che regolatori passa basso
10. (**Biagiotti**) Qual è il minimo ordine di continuità di una traiettoria che garantisca un'azione di controllo in avanti limitata per un impianto avente 4 poli e 1 zero:
- 1
  - 2
  - 3
  - 4
11. (**Giarrè**) Un sistema retroazionato è internamente stabile se e solo se le seguenti condizioni sono soddisfatte
- 1)  $L(s)$  presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale negativa.

Cognome:

Nome:

N. Matr.:  Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_Biagiotti  Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte AGiarré 

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 21 giugno 2018 - Problemi

*Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.*

1. Implementazione digitale di regolatori tempo-continui: illustrare sinteticamente le problematiche legate alla scelta del periodo di campionamento, alla presenza del ricostruttore e alla tecnica di discretizzazione utilizzata.
2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{80s + 16}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40} = 80 \frac{(s + 0.2)}{(s + 2)^2(s + 10)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa)  $e_v \leq 20\%$ ;
- attenuazione di almeno 100 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione  $\omega_d = 0.05$  rad/s;

e dinamiche:

- sorpasso percentuale nullo;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione  $\omega_n = 400$  rad/s;
- minimo tempo di assestamento compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- a) Progettare il regolatore  $R(s)$  di complessità minima che posto in reatroazione unitaria negativa con l'impianto  $G(s)$  consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.
- b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento  $y_{sp}(t)$  (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward  $u_{ff}(t)$  (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.
- d) Volendo discretizzare il regolatore  $R(s)$  scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione
  - la banda del sistema in anello chiuso
  - il disturbo di misura, al fine di prevenire l'aliasing
  - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a  $10^\circ$

Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

- e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore  $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ .

**Biagiotti** - f) Dopo avere selezionato la traiettoria polinomiale di grado minimo che consenta di mantenere limitata l'ampiezza dell'azione di controllo in avanti progettata al punto c), dimensionare la durata della traiettoria in modo da soddisfare i limiti su velocità massima e accelerazione massima  $v_{max} = 45$  e  $a_{max} = 250$  considerando uno spostamento da  $q_0 = 10$  a  $q_1 = 25$ . Scrivere l'espressione della traiettoria di andata da  $q_0$  a  $q_1$  nel tempo  $T$ , e successivamente quella della traiettoria di ritorno da  $q_1$  a  $q_0$  (a partire dal tempo iniziale  $T$ ).

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_  
 Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Biagiotti   
Giarré

## Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 21 giugno 2018 - Quiz

*Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.*

*I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.*

- Dato un sistema di controllo in reatroazione che garantisce un margine di fase della funzione di anello  $M_f = 90^\circ$ , i poli dominanti (o il polo dominante) della funzione di sensitività complementare saranno caratterizzati da un coefficiente di smorzamento che, approssimativamente, vale:
  - $\delta \approx 0.1$
  - $\delta \approx 0.45$
  - $\delta \approx 0.9$
  - $\delta \approx 1$
- Per ridurre di un fattore 1000 l'influenza sull'uscita di un disturbo di misura  $n(t)$  frequenzialmente collocato nell'intervallo  $[\omega_{nmin}, \omega_{nmax}]$  è sufficiente che:
  - la funzione di sensitività alla pulsazione  $\omega_{nmin}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività alla pulsazione  $\omega_{nmax}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività complementare alla pulsazione  $\omega_{nmin}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
  - la funzione di sensitività complementare alla pulsazione  $\omega_{nmax}$  abbia modulo minore di  $-60dB$
- Dato un sistema di controllo in retroazione, un disturbo di tipo "d" sull'impianto:
  - può essere cancellato completamente mediante l'inserimento nella funzione di anello di un polo nell'origine
  - può essere attenuato alzando il modulo del guadagno d'anello  $|L(j\omega)|$  nel range di frequenze interessate dal disturbo
  - se costituito da un'unica sinusoide a frequenza  $\bar{\omega}_d$  può essere cancellato perfettamente introducendo nella funzione di anello una coppia di poli puramente immaginari  $\pm j\bar{\omega}_d$
- La compensazione in avanti di un disturbo misurabile può servire per:
  - compensare un disturbo di misura ad alta frequenza
  - cancellare un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita senza la necessità di un controllo in retroazione
  - ridurre un disturbo misurabile (o comunque stimabile) sull'uscita qualora i vincoli di progetto sul controllo in retroazione non consentano di ridurlo a sufficienza
  - allargare la banda del sistema in retroazione in cui è inserito

5. Il progetto per cancellazione di una rete anticipatrice:
- se fattibile, consente di eliminare il problema delle code di assestamento per impianti senza zeri
  - è possibile se fissata la posizione dello zero la frequenza di attraversamento è minore di quella desiderata
  - prevede la cancellazione di un polo del sistema a frequenza maggiore della frequenza di attraversamento
6. Dato un sistema di controllo in retroazione, l'intervallo di pulsazioni in cui far cadere la pulsazione di incrocio  $\omega_c$  del guadagno d'anello:
- è determinato dalla massima sovraelongazione ammissibile nella risposta del sistema a un ingresso a gradino
  - è limitato superiormente dalla (eventuale) presenza di disturbi di misura
  - è limitato inferiormente dal vincolo di errore a regime nullo a fronte di un ingresso a gradino
7. Un regolatore proporzionale integrale (PI):
- garantisce errore a regime nullo a fronte di ingresso a gradino
  - garantisce errore a regime nullo purchè l'ingresso sia limitato
  - qualora l'attuatore sia caratterizzato da una saturazione può dare luogo a una risposta particolarmente lenta
8. Un sistema di controllo in retroazione tempo-continuo che garantisce la stabilità asintotica del sistema complessivo può diventare instabile quando viene discretizzato?
- sì, se il regolatore viene discretizzato con la tecnica delle differenze all'avanti
  - sì, se a causa del tempo di campionamento scelto il ricostruttore rende negativo il margine di fase del guadagno d'anello
  - sì, se il tempo di campionamento è troppo basso
  - no, mai
9. In un sistema di controllo digitale, il fenomeno dell'aliasing:
- consiste in una sovrapposizione frequenziale della componente primaria e di quelle secondarie che costituiscono lo spettro del segnale campionato
  - può essere ridotto abbassando la pulsazione di campionamento del regolatore
  - può essere ridotto abbassando il periodo di campionamento del regolatore
  - è più accentuato se vengono impiegati regolatori passa alto piuttosto che regolatori passa basso
10. (**Biagiotti**) Qual è il minimo ordine di continuità di una traiettoria che garantisca un'azione di controllo in avanti limitata per un impianto avente 4 poli e 1 zero:
- 1
  - 2
  - 3
  - 4
11. (**Giarrè**) Un sistema retroazionato è internamente stabile se e solo se le seguenti condizioni sono soddisfatte
- 1)  $L(s)$  presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale positiva.
  - 1)  $L(s)$  non presenta cancellazioni ; 2) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  non passa per il punto  $(-1, 0)$ ; 3) Il diagramma di Nyquist completo di  $L(j\omega)$  circonda il punto critico in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli a parte reale negativa.

Cognome:

Nome:

N. Matr.:  Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_Biagiotti  Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte AGiarré 

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 21 giugno 2018 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Implementazione digitale di regolatori tempo-continui: illustrare sinteticamente le problematiche legate alla scelta del periodo di campionamento, alla presenza del ricostruttore e alla tecnica di discretizzazione utilizzata.
2. Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{80s + 16}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40} = 80 \frac{(s + 0.2)}{(s + 2)^2(s + 10)}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa)  $e_v \leq 20\%$ ;
- attenuazione di almeno 100 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione  $\omega_d = 0.05 \text{ rad/s}$ ;

e dinamiche:

- sorpasso percentuale nullo;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n" collocato alla pulsazione  $\omega_n = 400 \text{ rad/s}$ ;
- minimo tempo di assestamento compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

- a) Progettare il regolatore  $R(s)$  di complessità minima che posto in reatroazione unitaria negativa con l'impianto  $G(s)$  consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.

#### SOLUZIONE:

Il soddisfacimento della specifica statica (errore finito per ingresso a rampa) richiede almeno un polo nell'origine e pertanto il regolatore  $R(s)$  potrà avere la forma di un PI o un PID. Dalle specifiche dinamiche discendono i seguenti vincoli frequenziali:

- $S = 0\%$  (ovvero risposta aperiodica)  $\rightarrow M_f^* \geq 80\%$ ;
- attenuazione di almeno 10 volte di un disturbo di misura "n"  $\rightarrow \omega_c \leq \omega_n/10 = 40 \text{ rad/s}$ ;

Dal momento che viene richiesto di minimizzare il tempo di assestamento, si assumerà la massima pulsazione di incrocio compatibile con le altre specifiche. Perciò  $\omega_c^* = 40 \text{ rad/s}$ .

Alla pulsazione  $\omega_c^* = 40$ , la fase dell'impianto esteso  $G_e(s) = \frac{G(s)}{s}$  vale  $\arg\{G_e(j40)\} = -250.5254^\circ$ . Di conseguenza l'aggiunta dello zero di un semplice PI consentirebbe al più di ottenere un margine di fase  $19.4746^\circ$ . Pertanto sarà necessario un regolatore PID.

Per la progettazione iniziale del PI  $R_{PI}(s) = \mu \frac{\tau_z s + 1}{s}$  si procede per cancellazione con il polo reale dell'impianto che precede  $\omega_c^*$  (in realtà si tratta di un polo doppio). Pertanto si assume  $\tau_z = 1/10$ . Il guadagno  $\mu$  viene selezionato imponendo il soddisfacimento delle specifiche statiche. In particolare dalla prima si ricava

$$e_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \mu \frac{0.1s+1}{s} G(0)} = \frac{1}{\mu G(0)} \leq 0.2 \rightarrow \mu \geq \frac{1}{0.2 G(0)} = 12.5$$

essendo il guadagno statico  $G(0) = 0.4$ . Dalla seconda condizione, che può essere riscritta come

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{100} \text{ alla pulsazione } \omega_d = 0.05 \text{ rad/s}$$

considerando l'espressione approssimata di  $|S(j\omega)|$  per basse frequenze, si ricava

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} = \frac{1}{\left| \mu \frac{0.1j\omega_d + 1}{j\omega_d} G(j\omega_d) \right|} \leq 0.01.$$

Svolgendo i calcoli risulta

$$\left| \frac{0.005j + 1}{0.05j} G(j0.05) \right| = 8.2411$$

da cui  $\mu \geq \frac{1}{8.2411 \cdot 0.01} = 12.1344$ .

Per garantire che entrambe le condizioni siano verificate, occorre assumere il valore di  $\mu$  più grande tra quelli trovati, ovvero  $\mu = 12.5$ .

L'espressione del regolatore PI risulta

$$R_{pi}(s) = 12.5 \frac{0.1s + 1}{s}.$$

Una volta realizzato il regolatore PI, la progettazione della rete di anticipo che compone il PID deve essere svolta a partire dal sistema esteso (denominato  $G_{e1}(s)$ ) composto dall'impianto e dal regolatore  $R_{pi}(s)$

$$G_{e1}(s) = R_{pi}(s)G(s) = 100 \frac{(s + 0.2)}{s(s + 2)^2}$$

e imponendo la pulsazione di incrocio desiderata  $\omega_c^* = 40$  rad/s e il margine di fase  $M_f^* = 80^\circ$ . Occorre pertanto calcolare modulo e argomento per  $\omega = \omega_c^* = 40$  di  $G_{e1}(s)$ :

$$|G_{e1}(j40)| = 0.0623, \quad \arg\{G_{e1}(j40)\} = -174.5617^\circ.$$

I parametri della rete anticipatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^* = \frac{1}{|G_{e1}(j40)|} = 16.0398 \geq 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{e1}(j40)) = 74.5617^\circ \leq 90^\circ$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^*) \geq \frac{1}{M^*} \Rightarrow 0.2662 > 0.0623,$$

dalle formule di inversione si ricava che  $\tau = 0.4091$  e  $\alpha = 0.0129$  per cui

$$R_a(s) = \frac{0.4091s + 1}{0.005287s + 1}$$

e alla fine il regolatore complessivo risulta

$$R_{PID}(s) = 12.5 \frac{(0.1s + 1)(0.4091s + 1)}{s(0.005287s + 1)}$$

- b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.
- c) Volendo inseguire senza errore il riferimento  $y_{sp}(t)$  (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward  $u_{ff}(t)$  (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

### SOLUZIONE:

Per trovare l'espressione analitica dell'azione in avanti occorre invertire la funzione di trasferimento dell'impianto

$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}{80s + 16}$$

dove la funzione di trasferimento ha grado relativo  $-2$ , per cui non fisicamente realizzabile. Dal momento che l'espressione analitica di  $y_{sp}(t)$  e delle sue derivate risulta nota, è possibile implementare  $R_{ff}(s)$  dividendone il numeratore per il denominatore e ottenendo in questo modo

$$R_{ff} = 0.0125s^2 + 0.1725s + 0.5155 + \frac{31.75}{80s + 16}$$

da cui

$$U_{ff}(s) = 0.0125s^2 Y_{sp}(s) + 0.1725s Y_{sp}(s) + 0.5155 Y_{sp}(s) + \frac{31.75}{80s + 16} Y_{sp}(s)$$

↓

$$u_{ff}(t) = 0.0125 y_{sp}^{(2)}(t) + 0.1725 y_{sp}^{(1)}(t) + 0.5155 y_{sp}(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{31.75}{80s + 16} Y_{sp}(s) \right\}$$

d) Volendo discretizzare il regolatore  $R(s)$  scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione

- la banda del sistema in anello chiuso
- il disturbo di misura, al fine di prevenire l'aliasing
- una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a  $10^\circ$

Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

**SOLUZIONE:**

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni suddette:

(a)  $\omega_c = 40 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c = 400 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0157 \text{ s}$

(b)  $\frac{\omega_s}{2} = \omega_n \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\omega_n} = \frac{2\pi}{800} = 0.0079 \text{ s}$

(c)  $\Delta M_f = \frac{T}{2} \omega_c \frac{180}{\pi} \leq 10^\circ \Rightarrow T \leq \frac{10 \cdot 2\pi}{\omega_c \cdot 180} = 0.0088 \text{ s}$  essendo  $\omega_c = 40 \text{ rad/s}$ .

Il valore  $T = 0.005$  soddisfa tutti i vincoli.

Assumendo  $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$  la funzione di trasferimento del regolatore discretizzata risulta

$$R_{\text{PID}}(s) = 12.5 \frac{(0.1s + 1)(0.4091s + 1)}{s(0.005287s + 1)}$$

↓

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{52.83 - 102.5z^{-1} + 49.71z^{-2}}{1 - 1.514z^{-1} + 0.5139z^{-2}} = \frac{52.83z^2 - 102.5z + 49.71}{z^2 - 1.514z + 0.5139}$$

e) Scrivere l'equazione alle differenze del regolatore  $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ .

**SOLUZIONE:**

Interpretando  $z^{-1}$  come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che l'equazione alle differenze corrispondente a  $R(z)$  è

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{52.83 - 102.5z^{-1} + 49.71z^{-2}}{1 - 1.514z^{-1} + 0.5139z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

↓

$$u_k = 1.514 u_{k-1} + 0.5139 u_{k-2} + 52.83e_k - 102.5e_{k-1} + 49.71e_{k-2}$$

**Biagiotti - f)** Dopo avere selezionato la traiettoria polinomiale di grado minimo che consenta di mantenere limitata l'ampiezza dell'azione di controllo in avanti progettata al punto c), dimensionare la durata della traiettoria in modo da soddisfare i limiti su velocità massima e accelerazione massima  $v_{max} = 45$  e  $a_{max} = 250$  considerando uno spostamento da  $q_0 = 10$  a  $q_1 = 25$ . Scrivere l'espressione della traiettoria di andata da  $q_0$  a  $q_1$  nel tempo  $T$ , e successivamente quella della traiettoria di ritorno da  $q_1$  a  $q_0$  (a partire dal tempo iniziale  $T$ ).

---

**SOLUZIONE:**

Poichè l'impianto ha grado relativo  $\rho = 2$ , per mantenere limitata l'ampiezza dell'azione di controllo sarà sufficiente una traiettoria polinomiale di grado 3, in grado di assicurare la continuità di posizione e velocità e la limitatezza dell'accelerazione. Pertanto l'espressione della traiettoria cercata sarà

$$q(t) = h q_N(\tau) \Big|_{\tau = \frac{t-t_0}{T}} + q_0$$

dove  $q_N(\tau)$  è la corrispondente espressione normalizzata

$$q_N(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3.$$

Nel caso in esame lo spostamento in modulo vale  $|h| = |q_1 - q_0| = 15$  mentre la durata  $T$  deve essere determinata sulla base dei vincoli. In particolare, dai limiti su velocità e accelerazione risulta

$$q_{max}^{(1)} = \frac{|h|}{T} q_{N\ max}^{(1)} \leq v_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq 15 \frac{3/2}{45} = 0.5 \text{ s}$$

$$q_{max}^{(2)} = \frac{|h|}{T^2} q_{N\ max}^{(2)} \leq a_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq \sqrt{15 \frac{6}{250}} = 0.6 \text{ s}$$

per cui si assumerà  $T = 0.6$  s. Sostituendo nell'espressione della traiettoria si ottiene

$$q(t) = 10 + 15 \left( 3 \left( \frac{t}{0.6} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{0.6} \right)^3 \right)$$

mentre il ritorno risulta

$$q(t) = 25 - 15 \left( 3 \left( \frac{t-0.6}{0.6} \right)^2 - 2 \left( \frac{t-0.6}{0.6} \right)^3 \right).$$

---