

Cognome: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

N. Matr.:      

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_
- Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Biagiotti

Giarré

## Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

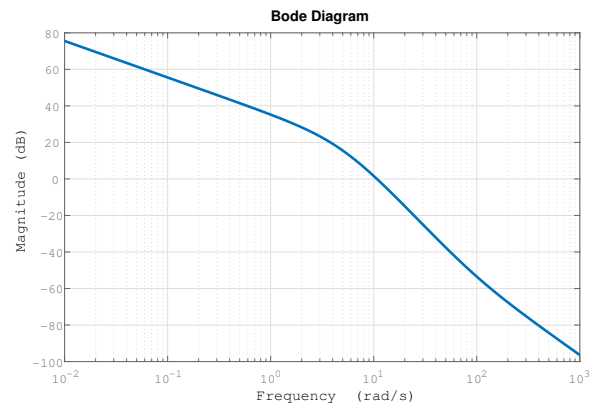
Compito del 12 aprile 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. dato il sistema dinamico retroazionato la cui funzione di anello è riportata in figura (diagramma di bode delle ampiezze) affetto da un disturbo sinusoidale di tipo "d" alla pulsazione 0.2 rad/s, l'attenuazione del disturbo sull'uscita è pari a circa:

- 1000 volte
- 300 volte
- 100 volte
- 50 volte



2. La banda passante di un filtro elimina-banda ha la forma:

- $[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$
- $[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$
- $[0, \omega_B]$
- $[\omega_B, \infty]$

3. Il controllo in feedforward presenta i seguenti svantaggi:

- performance scadenti in condizioni nominali
- scarsa robustezza rispetto a disturbi agenti sull'impianto
- necessità di una conoscenza precisa del plant
- ottenimento di tempi di assestamento molto più grandi di quelli ottenibili con un controllore in retroazione

4. Per basse frequenze, ovvero  $\omega \ll \omega_c$ , la funzione di risposta armonica relativa alla funzione di sensitività del controllo  $Q(s)$  di un sistema in reatroazione unitaria può essere approssimata come:

- $|Q(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx |R(j\omega)G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx 1/|G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx |R(j\omega)|$

5. Se si vuole controllare mediante retroazione unitaria negativa un impianto di tipo 1, il regolatore statico di complessità minima (ovvero col minimo numero di poli nell'origine) che garantisce errore a regime nullo per ingresso a rampa ha la struttura

- $R_s(s) = \mu$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s}$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s^2}$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s^3}$

6. La progettazione di una rete correttiva per cancellazione:
- permette di imporre in maniera esatta sia il margine di ampiezza che la pulsazione di incrocio della funzione di anello
  - è utile per evitare l'insorgere di code di assestamento
  - può essere effettuata cancellando qualunque polo dell'impianto, anche instabile
  - può essere infattibile nel caso non si riesca a ottenere il margine di fase desiderato alla pulsazione di incrocio scelta
7. In un regolatore PID, l'azione di controllo derivativa
- riduce i disturbi di misura
  - limita l'azione di controllo
  - si usa per migliorare il margine di fase
  - può essere realizzata fisicamente solo aggiungendo un polo ad alta frequenza
8. Un sistema di controllo in retroazione (con  $\omega_c = 4$ ) basato su un regolatore digitale è affetto da rumore di misura e pertanto è stato dotato di un filtro anti-aliasing del secondo ordine, la cui pulsazione di taglio è stata collocata a  $\omega_{aa} = 50$  rad/s. Quale dovrebbe essere la pulsazione di campionamento tale da garantire un'attenuazione dei disturbi di almeno 100 volte?
- $\omega_s \approx 40$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 80$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 800$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 1000$  rad/sec
9. In un sistema di controllo digitale in retroazione, una riduzione del margine di fase può essere provocata:
- dall'operazione di campionamento e ricostruzione dei segnali
  - dall'aliasing provocato dal campionamento
  - da un'eventuale filtro anti-aliasing
  - da un prefiltra sul riferimento realizzato discretizzando il corrispondente prefiltra tempo-continuo
10. (**Biagiotti**) Data una generica traiettoria normalizzata, l'operazione di scalatura temporale al fine di ottenere una specifica durata  $T$ :
- modifica in maniera lineare ( $\frac{1}{T}$ ) tutte le sue derivate (e quindi velocità, accelerazione, ...)
  - lascia invariate tutte le derivate
  - modifica linearmente ( $\frac{1}{T}$ ) la velocità, quadraticamente ( $\frac{1}{T^2}$ ) l'accelerazione e così via per le derivate successive
11. (**Giarrè**) Dato un sistema in retroazione la cui funzione di trasferimento è  $W(s) = \frac{kC(s)G(s)}{1 + kC(s)G(s)}$ , al fine di studiarne la stabilità asintotica con il criterio di Nyquist cosa occorre verificare?
- Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo con un circolo orario attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo con un circolo antiorario attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo senza circoli attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  presenti cancellazioni polo/zero instabili, e un diagramma di nyquist completo senza circoli attorno al punto  $(-1, 0)$ .

Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_

Biagiotti 

Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Giarré 

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

### Compito del 12 aprile 2018 - Problemi

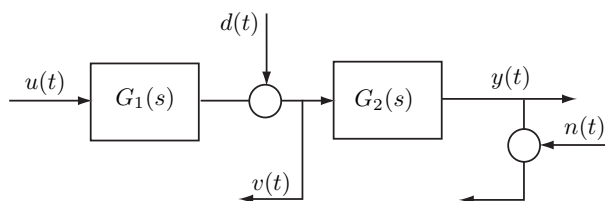
Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Descrivere le principali tecniche per la taratura dei regolatori PID.

2. Dato l'impianto di figura con:

$$G_1(s) = \frac{5}{s(s+2)}$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(s+0.2)(s+12)}$$



Si procede alla realizzazione di uno schema di controllo in cascata partendo dall'anello più esterno.

Si richiede pertanto di:

- Progettare il regolatore di complessità minima, denominato  $R_2(s)$ , per il solo sottosistema  $G_2(s)$  che consenta di ottenere:
  - errore di posizione nullo;
  - risposta aperiodica;
  - tempo di assestamento  $T_a \leq 3$  s;
  - azione di controllo minima.
- Disegnare il diagramma di Bode delle ampiezze di  $L_2(s) = R_2(s)G_2(s)$ .
- Progettare l'anello di controllo interno con il regolatore  $R_1(s)$ , di complessità minima, che consenta il soddisfacimento delle seguenti specifiche:
  - attenuazione di un disturbo  $d(t)$  frequenzialmente confinato nel range  $[0.01, 0.2]$  rad/s di almeno 80 volte;
  - margine di fase  $M_f$  di almeno  $60^\circ$ ;
  - pulsazione di incrocio  $\omega_c$  compatibile con il disaccoppiamento frequenziale richiesto dal progetto del regolatore in cascata.
- Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_1(s) = R_1(s)G_1(s)$  e della funzione di sensitività complementare  $F_1(s)$ . Infine sovrapporre il diagramma di  $|F_1(j\omega)|$  a quello di  $|L_2(j\omega)|$ , tracciato al punto b), e discutere la fattibilità del progetto in cascata.
- Scegliere il tempo di campionamento più idoneo per discretizzare i regolatori  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  tenendo conto della larghezza di banda dei sistemi retroazionati e imponendo che il peggioramento del margine di fase dovuto al ricostruttore di ordine zero non superi i  $5^\circ$ . Discretizzare entrambi i regolatori mediante il metodo di Tustin.
- Scrivere le equazioni alle differenze corrispondenti ai regolatori  $R_1(z) = \frac{U_1(z)}{E_1(z)}$ ,  $R_2(z) = \frac{U_2(z)}{E_2(z)}$  discretizzati al punto precedente.
- Progettare un'azione di feed-forward  $u_{ff}(t)$  per l'intero impianto che consenta di inseguire senza errore il riferimento  $y_{sp}(t)$ , di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate. Quale sarà l'ordine di continuità minimo della traiettoria  $y_{sp}(t)$  che garantisce un'azione di controllo limitata?

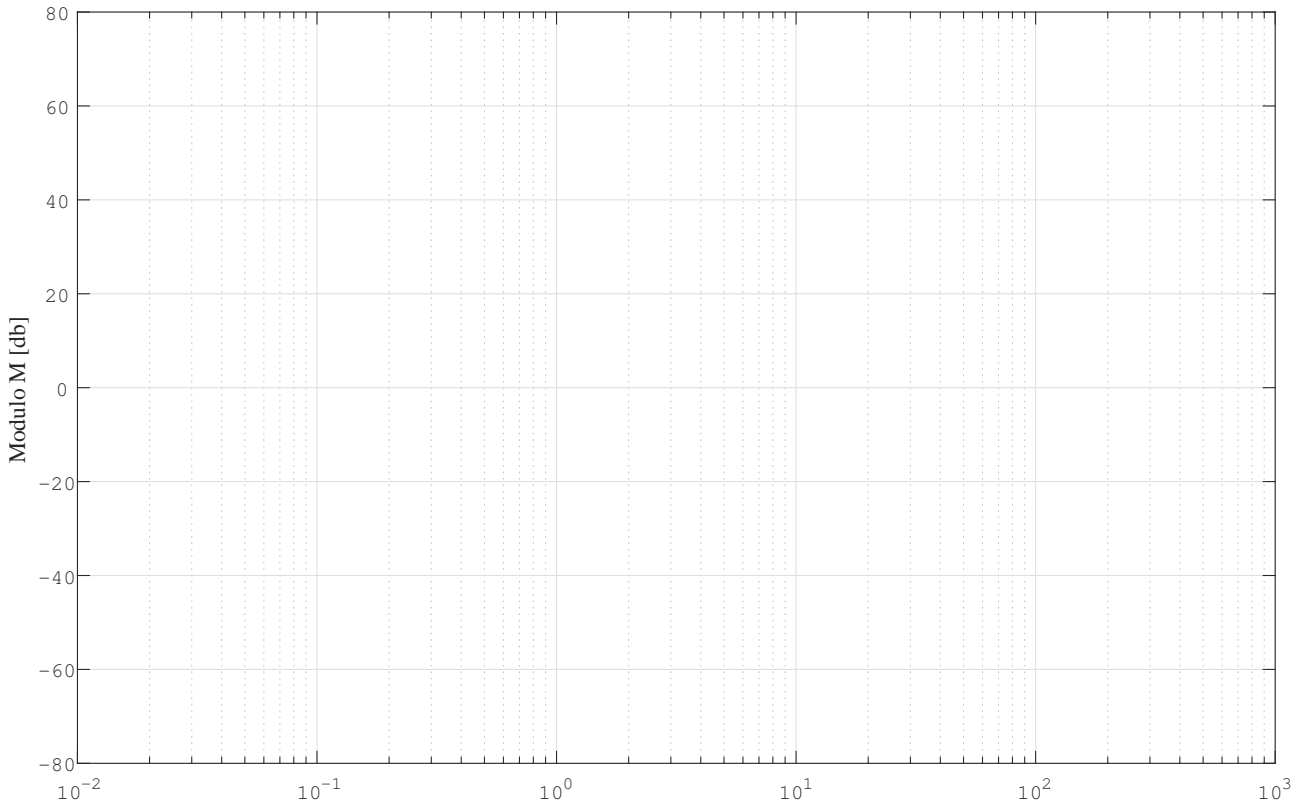


Cognome:

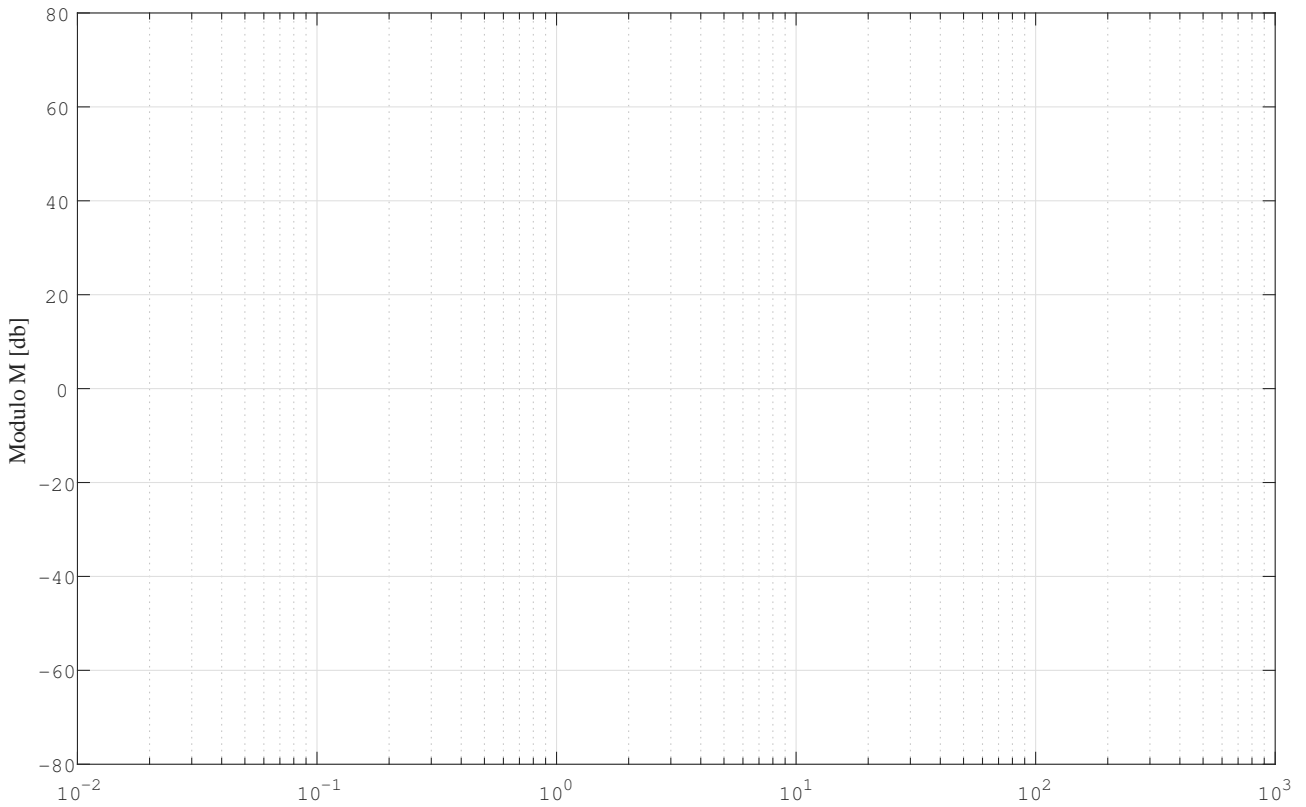
Nome:

N. Matr.:

**Diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_2(s)$  e di  $F_1(s)$**



**Diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_1(s)$  e di  $F_1(s)$**



Cognome: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

N. Matr.:      

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_
- Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Biagiotti

Giarré

## Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

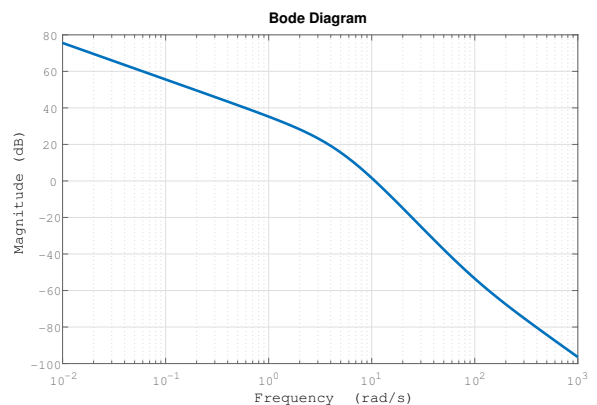
Compito del 12 aprile 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. dato il sistema dinamico retroazionato la cui funzione di anello è riportata in figura (diagramma di bode delle ampiezze) affetto da un disturbo sinusoidale di tipo "d" alla pulsazione 0.2 rad/s, l'attenuazione del disturbo sull'uscita è pari a circa:

- 1000 volte
- 300 volte
- 100 volte
- 50 volte



2. La banda passante di un filtro elimina-banda ha la forma:

- $[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$
- $[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$
- $[0, \omega_B]$
- $[\omega_B, \infty]$

3. Il controllo in feedforward presenta i seguenti svantaggi:

- performance scadenti in condizioni nominali
- scarsa robustezza rispetto a disturbi agenti sull'impianto
- necessità di una conoscenza precisa del plant
- ottenimento di tempi di assestamento molto più grandi di quelli ottenibili con un controllore in retroazione

4. Per basse frequenze, ovvero  $\omega \ll \omega_c$ , la funzione di risposta armonica relativa alla funzione di sensitività del controllo  $Q(s)$  di un sistema in reatroazione unitaria può essere approssimata come:

- $|Q(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx |R(j\omega)G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx 1/|G(j\omega)|$
- $|Q(j\omega)| \approx |R(j\omega)|$

5. Se si vuole controllare mediante retroazione unitaria negativa un impianto di tipo 1, il regolatore statico di complessità minima (ovvero col minimo numero di poli nell'origine) che garantisce errore a regime nullo per ingresso a rampa ha la struttura

- $R_s(s) = \mu$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s}$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s^2}$
- $R_s(s) = \frac{\mu}{s^3}$

6. La progettazione di una rete correttiva per cancellazione:
- permette di imporre in maniera esatta sia il margine di ampiezza che la pulsazione di incrocio della funzione di anello
  - è utile per evitare l'insorgere di code di assestamento
  - può essere effettuata cancellando qualunque polo dell'impianto, anche instabile
  - può essere infattibile nel caso non si riesca a ottenere il margine di fase desiderato alla pulsazione di incrocio scelta
7. In un regolatore PID, l'azione di controllo derivativa
- riduce i disturbi di misura
  - limita l'azione di controllo
  - si usa per migliorare il margine di fase
  - può essere realizzata fisicamente solo aggiungendo un polo ad alta frequenza
8. Un sistema di controllo in retroazione (con  $\omega_c = 4$ ) basato su un regolatore digitale è affetto da rumore di misura e pertanto è stato dotato di un filtro anti-aliasing del secondo ordine, la cui pulsazione di taglio è stata collocata a  $\omega_{aa} = 50$  rad/s. Quale dovrebbe essere la pulsazione di campionamento tale da garantire un'attenuazione dei disturbi di almeno 100 volte?
- $\omega_s \approx 40$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 80$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 800$  rad/sec
  - $\omega_s \approx 1000$  rad/sec
9. In un sistema di controllo digitale in retroazione, una riduzione del margine di fase può essere provocata:
- dall'operazione di campionamento e ricostruzione dei segnali
  - dall'aliasing provocato dal campionamento
  - da un'eventuale filtro anti-aliasing
  - da un prefiltro sul riferimento realizzato discretizzando il corrispondente prefiltro tempo-continuo
10. (**Biagiotti**) Data una generica traiettoria normalizzata, l'operazione di scalatura temporale al fine di ottenere una specifica durata  $T$ :
- modifica in maniera lineare ( $\frac{1}{T}$ ) tutte le sue derivate (e quindi velocità, accelerazione, ...)
  - lascia invariate tutte le derivate
  - modifica linearmente ( $\frac{1}{T}$ ) la velocità, quadraticamente ( $\frac{1}{T^2}$ ) l'accelerazione e così via per le derivate successive
11. (**Giarrè**) Dato un sistema in retroazione la cui funzione di trasferimento è  $W(s) = \frac{kC(s)G(s)}{1 + kC(s)G(s)}$ , al fine di studiarne la stabilità asintotica con il criterio di Nyquist cosa occorre verificare?
- Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo con un circolo orario attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo con un circolo antiorario attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  senza poli instabili né cancellazioni polo/zero, presenti un diagramma di nyquist completo senza circoli attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Che la funzione  $L(s) = kC(s)G(s)$  presenti cancellazioni polo/zero instabili, e un diagramma di nyquist completo senza circoli attorno al punto  $(-1, 0)$ .

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) \_\_\_\_\_  
 Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A

Biagiotti   
 Giarré

## Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

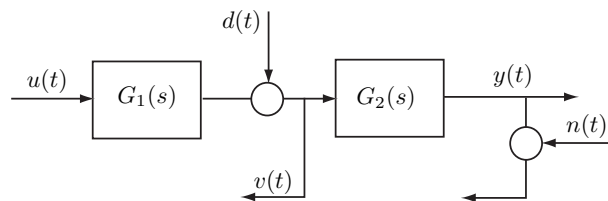
### Compito del 12 aprile 2018 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

- Descrivere le principali tecniche per la taratura dei regolatori PID.
- Dato l'impianto di figura con:

$$G_1(s) = \frac{5}{s(s+2)}$$

$$G_2(s) = \frac{3}{(s+0.2)(s+12)}$$



Si procede alla realizzazione di uno schema di controllo in cascata partendo dall'anello più esterno. Si richiede pertanto di:

- Progettare il regolatore di complessità minima, denominato  $R_2(s)$ , per il solo sottosistema  $G_2(s)$  che consenta di ottenere:
  - errore di posizione nullo;
  - risposta aperiodica;
  - tempo di assestamento  $T_a \leq 3$  s;
  - azione di controllo minima.

#### SOLUZIONE:

Per garantire errore di posizione (cioè errore a regime per ingresso a gradino) nullo, il regolatore  $R_2(s)$  dovrà avere un polo nell'origine. Pertanto, con ogni probabilità, il regolatore avrà la forma di un PI (o di un PID)

$$R_2(s) = \mu \frac{\tau_z s + 1}{s}$$

Le altre specifiche si traducono in:

- risposta aperiodica  $\rightarrow M_f^* = 80^\circ$
- tempo di assestamento  $T_a \leq 3$  s  $\rightarrow T_a = \frac{3}{\omega_c} \leq 3$  s  $\rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{3} = 1$ . Si assume il valore minimo  $\omega_c^* = 1$  rad/s per minimizzare l'azione di controllo, come richiesto.

Il sistema esteso

$$G_{2e}(s) = \frac{G_2(s)}{s} = \frac{3}{s(s+0.2)(s+12)}$$

alla pulsazione di incrocio desiderata vale in modulo e argomento  $|G_{2e}(j1)| = 0.2443$  e  $\arg\{G_{2e}(j1)\} = -173.4537^\circ$ , rispettivamente. Dal momento che la fase è "relativamente" alta, si tenta un progetto per cancellazione, con lo zero del PI utilizzato per migliorare il margine di fase e il guadagno per imporre la  $\omega_c^*$  desiderata. Si fissa  $\tau_z = \frac{1}{0.2} = 5$  (cancellazione del polo in  $-0.2$ ) e si procede al calcolo di

$$\mu = \frac{1}{|G_{2e}(j1)| \cdot \sqrt{1 + (\tau_z \omega_c^*)^2}} = \frac{1}{0.2443 \cdot 5.0990} = 0.8028.$$

Resta da verificare il Margine di fase ottenuto

$$M_f = 180^\circ + \arg\{G_{2e}(j1)\} + \varphi_z = 85.2364^\circ > 80^\circ$$



essendo  $\varphi_z = 78.6901^\circ$ . L'espressione del regolatore PI in grado di soddisfare tutte le specifiche risulta pertanto

$$R_2(s) = 0.8028 \frac{5s + 1}{s}.$$

b) Disegnare il diagramma di Bode delle ampiezze di  $L_2(s) = R_2(s)G_2(s)$ .

**SOLUZIONE:**

Vedere diagramma in fondo

c) Progettare l'anello di controllo interno con il regolatore  $R_1(s)$ , di complessità minima, che consenta il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- attenuazione di un disturbo  $d(t)$  frequenzialmente confinato nel range  $[0.01, 0.2]$  rad/s di almeno 80 volte;
- margine di fase  $M_f$  di almeno  $60^\circ$ ;
- pulsazione di incrocio  $\omega_c$  compatibile con il disaccoppiamento frequenziale richiesto dal progetto del regolatore in cascata.

**SOLUZIONE:**

Il regolatore  $R_2(s)$  sarà costituito da una parte statica (un semplice guadagno  $\mu$ ) più (eventualmente) una parte dinamica. Il guadagno  $\mu$  deve essere scelto in modo tale a garantire l'attenuazione del disturbo  $d(t)$  richiesta, pertanto occorre far sì che alla massima pulsazione del disturbo ( $\omega_d = 0.2$  rad/s) si abbia  $|S(j\omega_d)| \leq \frac{1}{80}$ . Considerando l'espressione approssimata di  $|S(j\omega)|$  per basse frequenze risulta

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} \Rightarrow |L(j\omega_d)| \geq 80$$

con  $L(s) = \mu G_1(s)$ . Svolgendo i calcoli risulta

$$|\mu G_1(j0.2)| \geq 80 \Rightarrow \mu \geq \frac{80}{14.8684} = 6.4319.$$

Per semplicità si assume  $\mu = 7$ . Per il calcolo del regolatore dinamico si considera il sistema esteso  $G_{1e}(s) = \frac{35}{s(s+2)}$  a cui si dovrà imporre un margine di fase  $M_f = 60^\circ$  alla pulsazione di incrocio  $\omega_c = 10$  rad/s (scelta un ordine di grandezza maggiore rispetto alla pulsazione di incrocio dell'anello esterno progettato al punto a)). Dal calcolo del modulo e dell'argomento di  $G_{1e}(j\omega)$ , alla pulsazione  $\omega_c^*$  si evince come sia necessaria una rete anticipatrice. Infatti,  $|G_{1e}(j10)| = 0.3432$  e  $\arg(G_{1e}(j10)) = -168.6901^\circ$ . Pertanto l'amplificazione della rete dovrà essere

$$M^* = \frac{1}{|G_{1e}(j\omega_c^*)|} = 2.9137,$$

mentre lo sfasamento dovrà essere

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{1e}(j\omega_c^*)) = 48.6901^\circ.$$

$M^*$  e  $\varphi^*$  verificano le condizioni di applicabilità di una rete anticipatrice.

Dalle formule di inversione si ricava che  $\tau = 0.3$  e  $\alpha = 0.1406$  per cui

$$R_d(s) = \frac{0.3s + 1}{0.04219s + 1}.$$

Alla fine il regolatore  $R_1(s)$  vale

$$R_1(s) = 7 \frac{0.3s + 1}{0.04219s + 1}.$$

d) Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_1(s) = R_1(s)G_1(s)$  e della funzione di sensitività complementare  $F_1(s)$ . Infine sovrapporre il diagramma di  $|F_1(j\omega)|$  a quello di  $|L_2(j\omega)|$ , tracciato al punto b), e discutere la fattibilità del progetto in cascata.

**SOLUZIONE:**

Vedere diagramma in fondo.

- e) Scegliere il tempo di campionamento più idoneo per discretizzare i regolatori  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  tenendo conto della larghezza di banda dei sistemi retroazionati e imponendo che il peggioramento del margine di fase dovuto al ricostruttore di ordine zero non superi i  $5^\circ$ . Discretizzare entrambi i regolatori mediante il metodo di Tustin.

**SOLUZIONE:**

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni derivanti dalla larghezza di banda dei due regolatori e dal massimo sfasamento ammissibile:

(a) per  $R_1(s)$ ,  $\omega_c^* = 15 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c^* = 100 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.0628 \text{ s}$

(b) per  $R_2(s)$ ,  $\omega_c^* = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c^* = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.6283 \text{ s}$

(c)  $\Delta M_f = \frac{T}{2} \omega_c \frac{180}{\pi} \leq 5^\circ \Rightarrow T \leq \frac{5 \cdot 2\pi}{\omega_c \cdot 180} = 0.0175 \text{ s}$  essendo  $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$  (si assume la  $\omega_c$  più grande che corrisponde al caso peggiore).

Il valore  $T = 0.01$  soddisfa tutte le specifiche.

Sostituendo  $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  la funzione di trasferimento dei regolatori discretizzati risulta

$$R_1(s) = 7 \frac{0.3s + 1}{0.04219s + 1} \Rightarrow R_1(z) = \frac{45.24 - 43.76z^{-1}}{1 - 0.7881z^{-1}} = \frac{45.24z - 43.76}{z - 0.7881}$$

$$R_2(s) = 0.8028 \frac{5s + 1}{s} \Rightarrow R_2(z) = \frac{4.018 - 4.01z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{4.018z - 4.01}{z - 1}$$

- f) Scrivere le equazioni alle differenze corrispondenti ai regolatori  $R_1(z) = \frac{U_1(z)}{E_1(z)}$ ,  $R_2(z) = \frac{U_2(z)}{E_2(z)}$  discretizzati al punto precedente.

**SOLUZIONE:**

Interpretando  $z^{-1}$  come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che le equazioni alle differenze corrispondenti a  $R_1(z)$  e  $R_2(z)$  sono:

$$R_1(z) = \frac{45.24 - 43.76z^{-1}}{1 - 0.7881z^{-1}} = \frac{U_1(z)}{E_1(z)} \Rightarrow u_{1k} = 0.7881u_{1k-1} + 45.24e_{1k} - 43.76e_{1k-1}$$

$$R_2(z) = \frac{4.018 - 4.01z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{U_2(z)}{E_2(z)} \Rightarrow u_{2k} = u_{2k-1} + 4.018e_{2k} - 4.01e_{2k-1}$$

- g) Progettare un'azione di feed-forward  $u_{ff}(t)$  per l'intero impianto che consenta di inseguire senza errore il riferimento  $y_{sp}(t)$ , di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate. Quale sarà l'ordine di continuità minimo della traiettoria  $y_{sp}(t)$  che garantisce un'azione di controllo limitata?

**SOLUZIONE:**

Invertendo la funzione di trasferimento  $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{15}{s^4 + 14.2s^3 + 26.8s^2 + 4.8s}$  e interpretando l'operatore  $s$  come operatore di derivazione l'espressione dell'azione in avanti risulta immediata

$$U_{ff}(s) = G^{-1}(s)Y_{sp}(s) = \frac{1}{15}s^4Y_{sp}(s) + \frac{14.2}{54}s^3Y_{sp}(s) + \frac{26.8}{54}s^2Y_{sp}(s) + \frac{4.8}{54}sY_{sp}(s)$$

$$= 0.0667s^4Y_{sp}(s) + 0.9467s^3Y_{sp}(s) + 1.7867s^2Y_{sp}(s) + 0.32sY_{sp}(s)$$

↓

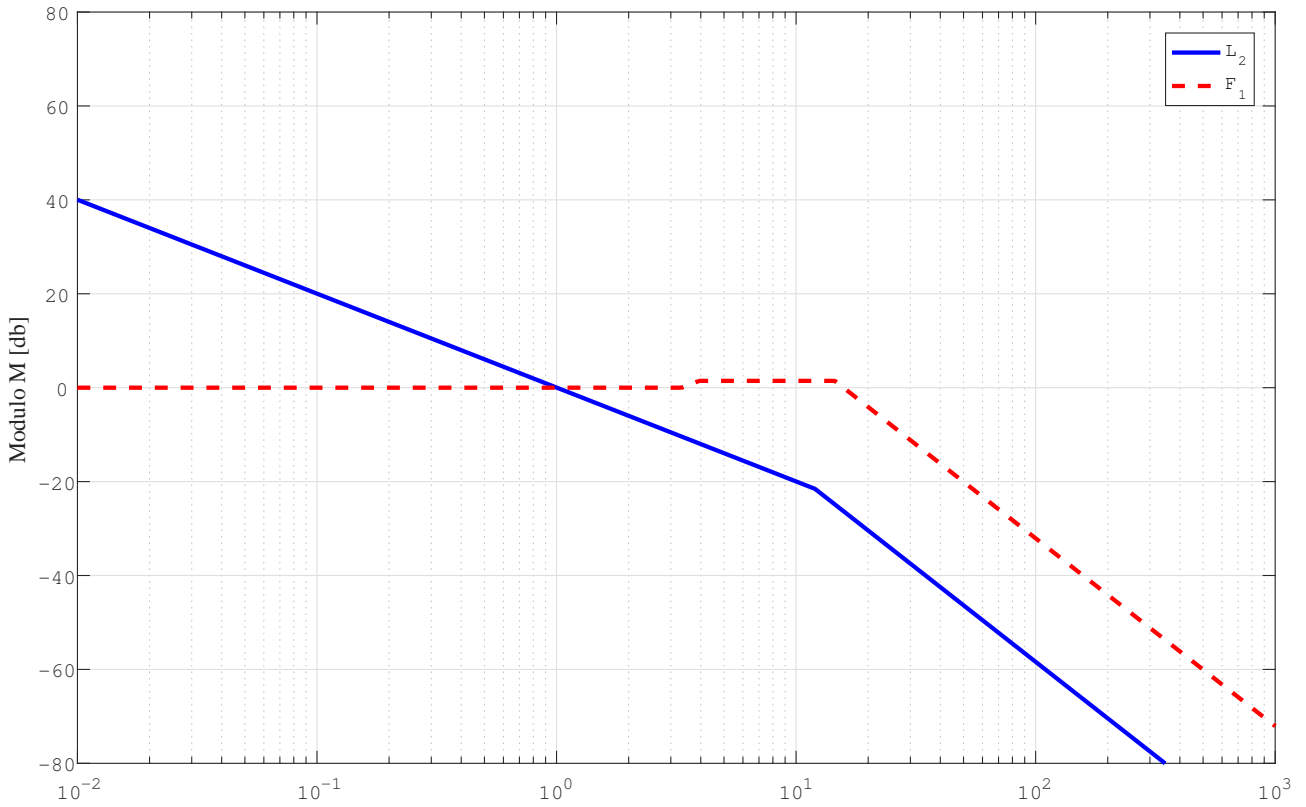
$$u_{ff}(t) = 0.0667y_{sp}^{(4)}(t) + 0.9467y_{sp}^{(3)}(t) + 1.7867y_{sp}^{(2)}(t) + 0.32y_{sp}^{(1)}(t)$$

dove  $y_{sp}^{(i)}(t)$  denota la derivata  $i$ -esima della funzione  $y_{sp}(t)$ .

Per garantire la limitatezza dell'azione di controllo  $u_{ff}(t)$  è necessario che la traiettoria di riferimento  $y_{sp}(t)$  sia almeno  $\mathbb{C}^3$ , cioè continua fino alla derivata terza.



Diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_2(s)$  e di  $F_1(s)$



Diagrammi di Bode delle ampiezze di  $L_1(s)$  e di  $F_1(s)$

