Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

☐ Ho superato la Parte A in data (mese/anno)____________________ Biagiotti ☐

☐ Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A Giarré ☐

Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 16 gennaio 2018 - Quiz

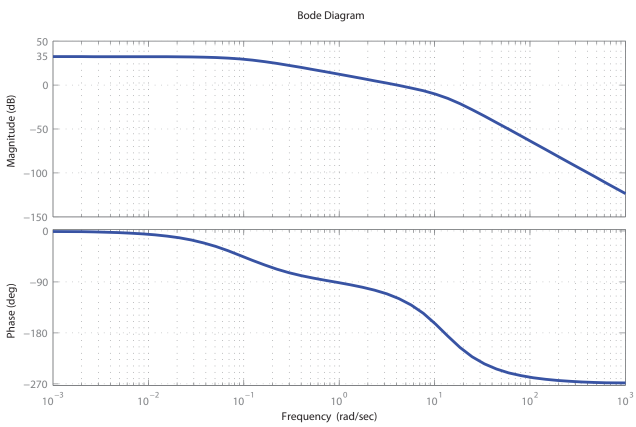
Per ciascuno dei seguenti quesiti (<u>si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso</u>), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Se un sistema dinamico presenta un margine di ampiezza $M_a = 10$ dB, posto in retroazione con un regolatore $R(s) = K$:

   ◯ è stabile solo per $0 < K < 10$
   ◯ è stabile solo per $0 < K < 3.16$
   ◯ è stabile solo per $0 < K < 0.1$
   ◯ è stabile solo per $0 < K < 0.316$

2. Dato il sistema retroazionato, di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di anello $L(s)$, l'attenuazione di un disturbo di bassa frequenza "d" alla pulsazione $\omega_d = 0.01$ è pari a:

   ◯ $\approx 1/50$
   ◯ $\approx 1/35$
   ◯ $\approx 1/56$
   ◯ $\approx 1/316$



3. Dato il sistema in retroazione unitaria negativa, supposto stabile, composto dall'impianto $G(s) = \dfrac{(s+3)}{s(s+25)}$ e dal regolatore $R(s) = 80\dfrac{0.15s+1}{s}$:

   ◯ l'errore a regime per ingresso a gradino sarà nullo
   ◯ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà nullo
   ◯ l'errore a regime per ingresso sinusoidale con $\omega = 5$ sarà nullo
   ◯ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà finito ma non nullo

4. Il controllo in feedforward presenta i seguenti vantaggi:

   ◯ ottime performance in condizioni nominali
   ◯ robustezza rispetto a disturbi agenti sull'impianto
   ◯ non necessità di una conoscenza precisa del plant
   ◯ ottenimento di un tempo di assestamento molto più basso di quello ottenibile con il solo controllore in feedback

5. Il regolatore $R(s) = \dfrac{0.6s+1}{0.12s+1}$:

   ◯ è una rete anticipatrice con $\tau = 0.12$ e $\alpha = 0.5$
   ◯ è una rete ritardatrice con $\tau = 0.12$ e $\alpha = 0.5$
   ◯ è una rete ritardatrice con $\tau = 0.6$ e $\alpha = 0.2$
   ◯ è una rete anticipatrice con $\tau = 0.6$ e $\alpha = 0.2$

6. In un controllore PID, l'azione integrale:
   - ◯ aumenta la banda passante
   - ◯ riduce il tempo di assestamento
   - ◯ aumenta il guadagno a basse frequenze
   - ◯ aumenta il guadagno ad alte frequenze
7. Dato un impianto da controllare, se le specifiche richiedono una larghezza di banda per il sistema controllato pari a $\omega_b = 20$ rad/sec ma è presente un disturbo "d" non misurabile a $\omega_d \approx 40$ rad/sec:
   - ◯ oltre al regolatore in retroazione occorre un filtro passa-basso sul ramo (di retroazione) su cui agisce il disturbo
   - ◯ non è possibile trovare nessun regolatore in grado di soddisfare le specifiche
   - ◯ è necessario progettare il regolatore in retroazione in modo da attenuare il disturbo aggiungendo poi un prefiltro per limitare la banda passante
   - ◯ è necessario progettare il regolatore in retroazione in modo da garantire la banda passante richiesta aggiungendo poi un prefiltro sul disturbo
8. Data una scheda di controllo digitale operante con un periodo di campionamento $T = 0.001$s, al fine di ottenere un'attenuazione sufficiente (-40db) di tutti i disturbi a frequenza superiore a quella di Nyquist dovrà essere equipaggiata con un filtro anti-aliasing del secondo ordine la cui pulsazione di taglio vale
   - ◯ $\omega_{aa} \approx 30$ rad/s
   - ◯ $\omega_{aa} \approx 60$ rad/s
   - ◯ $\omega_{aa} \approx 300$ rad/s
   - ◯ $\omega_{aa} \approx 600$ rad/s
9. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:
   - ◯ l'accelerazione massima si riduce di un fattore 2
   - ◯ l'accelerazione massima si riduce di un fattore 4
   - ◯ l'accelerazione massima aumenta di un fattore 4
   - ◯ l'accelerazione massima aumenta di un fattore 2
10. (**Giarrè**) Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 1:
    - ◯ presenta un asintoto orizzontale
    - ◯ non presenta asisntoti
    - ◯ presenta un asintotico verticale
11. La trasformata di Laplace di un segnale $x^\star(t)$, ottenuto campionando in maniera impulsiva (con periodo T) il segnale tempo-continuo $x(t)$, risulta:
    - ◯ $X^\star(s) = x(kT)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}$
    - ◯ $X^\star(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ks}$
    - ◯ $X^\star(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$
    - ◯ $X^\star(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

☐ Ho superato la Parte A in data (mese/anno)____________________ Biagiotti ☐
☐ Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A Giarré ☐

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 16 gennaio 2018 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

Biagiotti 1 - Illustrare i vantaggi/svantaggi della compensazione in avanti del riferimento mettendone in luce gli obiettivi e le problematiche implementative.

Giarré 1 - Assegnato un sistema di controllo dove la funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$ é tale che

$$R(s) = K \ , \ G(s) = \frac{s-5}{s^2(s+10)},$$

a) Tracciare il diagramma completo di Nyquist di $G(s)$ e determinare per quali valori del guadagno K il sistema di controllo risulta stabile internamente;

b) determinare per quali valori di K l'errore a regime prodotto dal disturbo sull'uscita $d(t) = \cos(2t + \pi/3)$ risulti non superiore a 0.1.

2 - Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{8s+64}{(s+0.5)(s^2+8s+64)} = \frac{8s+64}{s^3+8.5s^2+68s+32}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa) $e_v \leq 10\%$;
- attenuazione di almeno 150 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione $\omega_d = 0.05$ rad/s;

e dinamiche:

- risposta aperiodica;
- tempo di assestamento $T_a \leq 0.1$s;
- minima azione di controllo compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in reatroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.

b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.

c) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione
   - la banda del sistema in anello chiuso
   - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 10^o

   Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

d) Scrivere l' equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \dfrac{U(z)}{E(z)}$.

Biagiotti - e) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

Biagiotti - f) Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 0$ e $q_1 = -20$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $\mathtt{v}_{max} = 20$ e $\mathtt{a}_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda [0, 3] rad/s. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -20$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 0$ ($t_1 = 2T$).

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

☐ Ho superato la Parte A in data (mese/anno)__________________ Biagiotti ☐
☐ Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A Giarré ☐

Controlli Automatici - Parte B

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 16 gennaio 2018 - Quiz

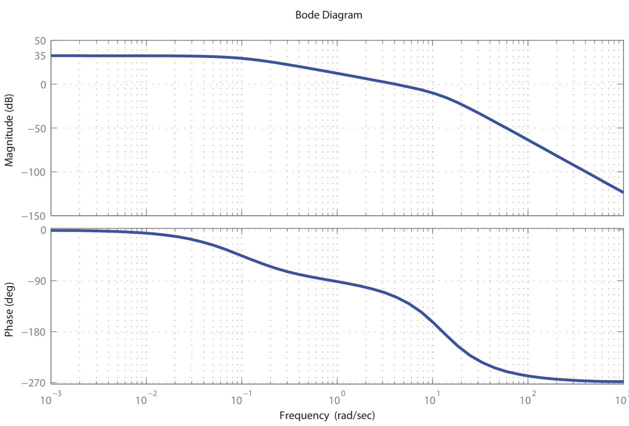
Per ciascuno dei seguenti quesiti (<u>si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso</u>), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Se un sistema dinamico presenta un margine di ampiezza $M_a = 10$ dB, posto in retroazione con un regolatore $R(s) = K$:

   ○ è stabile solo per $0 < K < 10$
   ⊗ è stabile solo per $0 < K < 3.16$
   ○ è stabile solo per $0 < K < 0.1$
   ○ è stabile solo per $0 < K < 0.316$

2. Dato il sistema retroazionato, di cui in figura sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di anello $L(s)$, l'attenuazione di un disturbo di bassa frequenza "d" alla pulsazione $\omega_d = 0.01$ è pari a:

   ○ $\approx 1/50$
   ○ $\approx 1/35$
   ⊗ $\approx 1/56$
   ○ $\approx 1/316$



3. Dato il sistema in retroazione unitaria negativa, supposto stabile, composto dall'impianto $G(s) = \dfrac{(s+3)}{s(s+25)}$ e dal regolatore $R(s) = 80\dfrac{0.15s+1}{s}$:

   ⊗ l'errore a regime per ingresso a gradino sarà nullo
   ⊗ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà nullo
   ○ l'errore a regime per ingresso sinusoidale con $\omega = 5$ sarà nullo
   ○ l'errore a regime per ingresso a rampa sarà finito ma non nullo

4. Il controllo in feedforward presenta i seguenti vantaggi:

   ⊗ ottime performance in condizioni nominali
   ○ robustezza rispetto a disturbi agenti sull'impianto
   ○ non necessità di una conoscenza precisa del plant
   ⊗ ottenimento di un tempo di assestamento molto più basso di quello ottenibile con il solo controllore in feedback

5. Il regolatore $R(s) = \dfrac{0.6s+1}{0.12s+1}$:

   ○ è una rete anticipatrice con $\tau = 0.12$ e $\alpha = 0.5$
   ○ è una rete ritardatrice con $\tau = 0.12$ e $\alpha = 0.5$
   ○ è una rete ritardatrice con $\tau = 0.6$ e $\alpha = 0.2$
   ⊗ è una rete anticipatrice con $\tau = 0.6$ e $\alpha = 0.2$

6. In un controllore PID, l'azione integrale:

   ○ aumenta la banda passante
   ○ riduce il tempo di assestamento
   ⊗ aumenta il guadagno a basse frequenze
   ○ aumenta il guadagno ad alte frequenze

7. Dato un impianto da controllare, se le specifiche richiedono una larghezza di banda per il sistema controllato pari a $\omega_b = 20$ rad/sec ma è presente un disturbo "d" non misurabile a $\omega_d \approx 40$ rad/sec:

   ○ oltre al regolatore in retroazione occorre un filtro passa-basso sul ramo (di retroazione) su cui agisce il disturbo
   ○ non è possibile trovare nessun regolatore in grado di soddisfare le specifiche
   ⊗ è necessario progettare il regolatore in retroazione in modo da attenuare il disturbo aggiungendo poi un prefiltro per limitare la banda passante
   ○ è necessario progettare il regolatore in retroazione in modo da garantire la banda passante richiesta aggiungendo poi un prefiltro sul disturbo

8. Data una scheda di controllo digitale operante con un periodo di campionamento $T = 0.001$s, al fine di ottenere un'attenuazione sufficiente (-40db) di tutti i disturbi a frequenza superiore a quella di Nyquist dovrà essere equipaggiata con un filtro anti-aliasing del secondo ordine la cui pulsazione di taglio vale

   ○ $\omega_{aa} \approx 30$ rad/s
   ○ $\omega_{aa} \approx 60$ rad/s
   ⊗ $\omega_{aa} \approx 300$ rad/s
   ○ $\omega_{aa} \approx 600$ rad/s

9. (**Biagiotti**) Se si dimezza la durata di una generica traiettoria $q(t)$:

   ○ l'accelerazione massima si riduce di un fattore 2
   ○ l'accelerazione massima si riduce di un fattore 4
   ⊗ l'accelerazione massima aumenta di un fattore 4
   ○ l'accelerazione massima aumenta di un fattore 2

10. (**Giarrè**) Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 1:

    ○ presenta un asintoto orizzontale
    ○ non presenta asisntoti
    ⊗ presenta un asintotico verticale

11. La trasformata di Laplace di un segnale $x^\star(t)$, ottenuto campionando in maniera impulsiva (con periodo T) il segnale tempo-continuo $x(t)$, risulta:

    ○ $X^\star(s) = x(kT)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}$

    ○ $X^\star(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ks}$

    ○ $X^\star(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$

    ⊗ $X^\star(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

☐ Ho superato la Parte A in data (mese/anno)___________________ Biagiotti ☐

☐ Svolgerò la tesina con Matlab/Simulink in sostituzione della Parte A Giarré ☐

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 16 gennaio 2018 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

Biagiotti 1 - Illustrare i vantaggi/svantaggi della compensazione in avanti del riferimento mettendone in luce gli obiettivi e le problematiche implementative.

Giarré 1 - Assegnato un sistema di controllo dove la funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$ é tale che

$$R(s) = K \ , \ G(s) = \frac{s-5}{s^2(s+10)},$$

a) Tracciare il diagramma completo di Nyquist di $G(s)$ e determinare per quali valori del guadagno K il sistema di controllo risulta stabile internamente;

b) determinare per quali valori di K l'errore a regime prodotto dal disturbo sull'uscita $d(t) = \cos(2t + \pi/3)$ risulti non superiore a 0.1.

2 - Dato l'impianto

$$G(s) = \frac{8s+64}{(s+0.5)(s^2+8s+64)} = \frac{8s+64}{s^3+8.5s^2+68s+32}$$

Si vuole realizzare un regolatore in retroazione che consenta l'ottenimento delle seguenti specifiche statiche:

- errore di velocità (ovvero errore a regime per ingresso di riferimento a rampa) $e_v \leq 10\%$;
- attenuazione di almeno 150 volte di un disturbo sinusoidale sull'uscita "d" con pulsazione $\omega_d = 0.05$ rad/s;

e dinamiche:

- risposta aperiodica;
- tempo di assestamento $T_a \leq 0.1$s;
- minima azione di controllo compatibile con le altre specifiche;

Si richiede pertanto di svolgere i seguenti punti.

a) Progettare il regolatore $R(s)$ di complessità minima che posto in reatroazione unitaria negativa con l'impianto $G(s)$ consenta di soddisfare tutte le specifiche indicate in alto.

SOLUZIONE:

Il soddisfacimento della specifica statica (errore finito per ingresso a rampa) richiede almento un polo nell'orgine e pertanto il regolatore $R(s)$ potrà avere la forma di un PI o un PID. Dalle specifiche dinamiche discendono i seguenti vincoli frequenziali:

- risposta aperiodica $\rightarrow M_f^\star = 80^o$;
- $T_a \leq 0.1$s $\rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{T_a} = 30$ rad/s;

Dal momento che viene richiesto di minimizzare l'azione di controllo, si assumerà la massima pulsazione di incrocio compatibile con le altre specifiche. Perciò $\omega_c^\star = 30$ rad/s.

Alla pulsazione $\omega_c^\star = 30$, la fase dell'impianto esteso $G_e(s) = \frac{G(s)}{s}$ vale $\arg\{G_e(j15)\} = -267.9588^o$. Di conseguenza l'aggiunta dello zero di un semplice PI consentirebbe al più di ottenere un margine di fase 2.0412^o. Pertanto sarà necessario un regolatore PID.

Per la progettazione iniziale del PI $R_{\mathrm{PI}}(s) = \mu\frac{\tau_z s+1}{s}$ si procede per cancellazione con il polo reale dell'impianto che precede $\omega_c^\star$ Pertanto si assume $\tau_z = 1/0.5 = 2$. Il guadagno μ viene selezionato imponendo il soddisfacimento delle specifiche statiche. In particolare dalla prima si ricava

$$e_v = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s\,\mu\frac{2s+1}{s}\,G(s)} = \frac{1}{\mu\,G(0)} \leq 0.1 \rightarrow \mu \geq \frac{1}{0.1\,G(0)} = 5$$

essendo il guadagno statico $G(0) = 2$. Dalla seconda condizione, che può essere riscritta come

$$|S(j\omega)| \le \frac{1}{150} \text{ alla pulsazione } \omega_d = 0.05\text{rad/s}$$

considerando l'espressione approssimata di $|S(j\omega)|$ per basse frequenze, si ricava

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} = \frac{1}{\left|\mu \frac{2j\omega_d + 1}{j\omega_d} G(j\omega_d)\right|} \le \frac{1}{150}.$$

Svolgendo i calcoli risulta

$$\left|\frac{0.1j + 1}{0.05j} G(j0.05)\right| = 40.0016$$

da cui $\mu \ge \frac{150}{40.0016} = 3.7499$.
Per garantire che entrambe le condizioni siano verificate, occorre assumere il valore di μ più grande tra quelli trovati, ovvero $\mu = 5$.
L'espressione del regolatore PI risulta

$$R_{\text{PI}}(s) = 5\frac{2\,s + 1}{s}.$$

Una volta realizzato il regolatore PI, la progettazione della rete di anticipo che compone il PID deve essere svolta a partire dal sistema esteso (denominato $G_{e1}(s)$) composto dall'impianto e dal regolatore $R_{\text{PI}}(s)$

$$G_{e1}(s) = R_{\text{PI}}(s)G(s) = 80\frac{s + 8}{s(s^2 + 8s + 64)}$$

e imponendo la pulsazione di incrocio desiderata $\omega_c^\star = 30$ rad/s e il margine di fase $M_f^\star = 80^o$. Occorre pertanto calcolare modulo e argomento per $\omega = \omega_c^\star = 30$ di $G_{e1}(s)$:

$$|G_{e1}(j30)| = 0.0952, \quad \arg\{G_{e1}(j30)\} = -178.9136^o.$$

I parametri della rete anticipatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^\star = \frac{1}{|G_{e1}(j30)|} = 10.5050 \ge 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^\star = -180^o + M_f^\star - \arg(G_{e1}(j30)) = 78.9136^o \le 90^o$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^\star) \ge \frac{1}{M^\star} \Rightarrow 0.1923 > 0.0952,$$

dalle formule di inversione si ricava che $\tau = 0.3503$ e $\alpha = 0.0094$ per cui

$$R_a(s) = \frac{0.3503\,s + 1}{0.003298\,s + 1}$$

e alla fine il regolatore complessivo risulta

$$R_{\text{PID}}(s) = 5\frac{(2\boldsymbol{s} + 1)(0.3503\,s + 1)}{s(0.003298\,s + 1)}$$

---

b) Dal momento che il regolatore possiede un polo nell'origine (integratore) sarà soggetto al fenomeno del windup (saturazione dell'azione integrale). Dopo aver illustrato tale problematica, riportare uno schema di controllo con anti-windup nel caso di regolatori PI/PID.

c) Volendo discretizzare il regolatore $R(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione

- la banda del sistema in anello chiuso
- una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 10^o

Discretizzare il regolatore con il metodo delle differenze all'indietro.

SOLUZIONE:

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni suddette:

(a) $\omega_c = 30\ rad/s \quad \Rightarrow \quad \omega_s = 10\omega_c = 300 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = 0.0209\ s$

(b) $\Delta M_f = \dfrac{T}{2}\omega_c \dfrac{180}{\pi} \leq 10^o \quad \Rightarrow \quad T \leq \dfrac{10 \cdot 2\pi}{\omega_c \cdot 180} = 0.0116\ s$ essendo $\omega_c = 30$ rad/s.

Il valore $T = 0.01$ soddisfa tutti i vincoli.

Assumendo $s = \dfrac{1 - z^{-1}}{T}$ la funzione di trasferimento del regolatore discretizzata risulta

$$R_{\text{PID}}(s) = 5\frac{(2\boldsymbol{s}+1)(0.3503\,s+1)}{s(0.003298\,s+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{160.5 - 310.7z^{-1} + 150.3z^{-2}}{1 - 1.142z^{-1} + 0.1416z^{-2}} = \frac{160.5\boldsymbol{z}^2 - 310.7\boldsymbol{z} + 150.3z}{z^2 - 1.142\boldsymbol{z} + 0.1416}$$

d) Scrivere l' equazione alle differenze del regolatore $R(z) = \dfrac{U(z)}{E(z)}$.

SOLUZIONE:

Interpretando z^{-1} come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che l' equazione alle differenze corrispondente a $R(z)$ è

$$R_{\text{PID}}(z) = \frac{160.5 - 310.7z^{-1} + 150.3z^{-2}}{1 - 1.142z^{-1} + 0.1416z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\Downarrow$$

$$u_k = 1.1421\,u_{k-1} - 0.1416\,u_{k-2} + 160.5e_k - 310.7e_{k-1} + 150.3e_{k-2}$$

Biagiotti - e) Volendo inseguire senza errore il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

SOLUZIONE:

Per trovare l'espressione analitica dell'azione in avanti occorre invertire la funzione di trasferimento dell'impianto

$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s^3 + 8.5s^2 + 68s + 32}{8s + 64}$$

dove la funzione di trasferimento ha grado relativo -2, per cui non fisicamente realizzabile. Dal momento che l'espressione analitica di $y_{sp}(t)$ e delle sue derivate risulta nota, è possibile implementare $R_{ff}(s)$ dividendone il numeratore per il denominatore e ottenendo in questo modo

$$R_{ff} = 0.125\,s^2 + 0.0625\,s + 8 + \frac{-480}{8s+64}$$

da cui

$$U_{ff}(s) = 0.125\,s^2\,Y_{sp}(s) + 0.0625\,s\,Y_{sp}(s) + 8\,Y_{sp}(s) + \frac{-480}{8s+64}Y_{sp}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$u_{ff}(t) = 0.125\,y_{sp}^{(2)}(t) + 0.0625\,y_{sp}^{(1)}(t) + 8\,y_{sp}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-480}{8s+64}Y_{sp}(s)\right\}$$

Biagiotti - f) Scrivere l'espressione della traiettoria cicloidale in tempo minimo tra $q_0 = 0$ e $q_1 = -20$ ($t_0 = 0$) che soddisfi i limiti su velocità massima e accelerazione massima $\mathtt{v}_{max} = 20$ e $\mathtt{a}_{max} = 40$ e il cui spettro dell'accelerazione sia collocato nella banda $[0,\,3]$ rad/s. Scrivere quindi l'espressione della traiettoria (cicloidale) di ritorno da $q_0 = -20$ ($t_0 = T$) a $q_1 = 0$ ($t_1 = 2T$).

SOLUZIONE:

L'espressione della traiettoria cicloidale è

$$q(t) = h q_N(\tau)\big|_{\tau=\frac{t-t_0}{T}} + q_0$$

dove $q_N(\tau)$ è la corrispondente espressione normalizzata

$$q_N(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\tau.$$

Nel caso in esame lo spostamento in modulo vale $|h| = |q_1 - q_0| = 20$ mentre la durata T deve essere determinata sulla base dei vincoli. In particolare, dai limiti su velocità e accelerazione risulta

$$q^{(1)}_{max} = \frac{|h|}{T} q^{(1)}_{N\,max} \leq \mathtt{v}_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq 20\frac{2}{20} = 2 \text{ s}$$

$$q^{(2)}_{max} = \frac{|h|}{T^2} q^{(2)}_{N\,max} \leq \mathtt{a}_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq \sqrt{20\frac{2\pi}{40}} = 1.7725 \text{ s}$$

mentre la specifica di tipo frequenziale relativa al fatto di collocare lo spettro della traiettoria nella banda $[0,\,3]$ rad/s si traduce in

$$\frac{2\pi}{T} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad T \geq \frac{2\pi}{3} = 2.0944 \text{ s.}$$

Si noti infatti che lo spettro dell'accelerazione della traiettoria cicloidale ($\sim \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$) è composto da una sola riga a pulsazione $\dfrac{2\pi}{T}$.

Il vincolo più stringente (che porta la periodo più lungo) è quello frequenziale, per cui si assumerà $T = 2.0944$ s. Sostituendo nell'espressione della traiettoria si ottiene

$$q(t) = -20\left(\frac{t}{2.0944} - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{2.0944}t\right)\right)$$

mentre il ritorno risulta

$$q(t) = -20 + 20\left(\frac{t-2.0944}{2.0944} - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{2.0944}(t-2.0944)\right)\right).$$
