Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

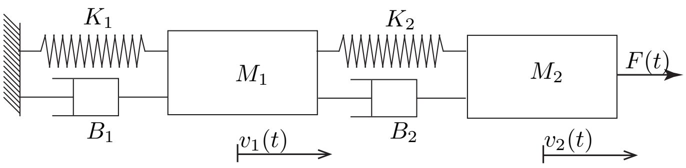
Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (<u>si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso</u>), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema meccanico di figura composto da masse, molle e smorzatori, quale sarà l'ordine della funzione di trasferimento tra ingresso $F(t)$ e uscita $v_2(t)$:



   ◯ 2
   ◯ 4
   ◯ 6
   ◯ 8

2. Quali dei seguenti sistemi non sono asintoticamente stabili?

   ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s+3)(2s+1)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s+4)}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2+4)}$

3. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ◯ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ◯ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ◯ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

4. Il tempo di assestamento della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{50(4 + 0.1\,s)}{(20 + 0.2\,s)(s^2 + 12\,s + 100)}$ vale circa

   ◯ $T_a \simeq 4$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.5$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.25$ s
   ◯ $T_a \simeq 0.03$ s

5. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ 0
   ◯ 3
   ◯ 1/2
   ◯ ∞

6. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ◯ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ◯ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ◯ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

7. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + 7\dot{y} + 2\,y = 3\ddot{x} + \dot{x} + 4\,x$ è:

   ◯ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s^2 + 2s}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s + 2}$
   ◯ $G(s) = \dfrac{s^3 + 7s + 2}{3s^2 + s + 4}$

8. Un sistema di tipo 1

   ◯ ha uno zero nell'origine
   ◯ ha un polo nell'origine
   ◯ ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino
   ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

9. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

10. Linearizzando il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -2x_1 + (\sin^2(x_1) + 1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 & = & x_2 \\ y & = & x_1 + \cos(x_2)u^2 \end{array} \right.$$

intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

   ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 0], \quad D = 1$
   ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 0], \quad D = 0$
   ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 1], \quad D = 1$
   ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 1], \quad D = 0$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\cos(3t)}{3}\, e^{-2\,t} + 3\,\delta(t), \qquad x_2(t) = 1 + 2\sin(4\,t-8) + t^4\, e^{-t}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &=& Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

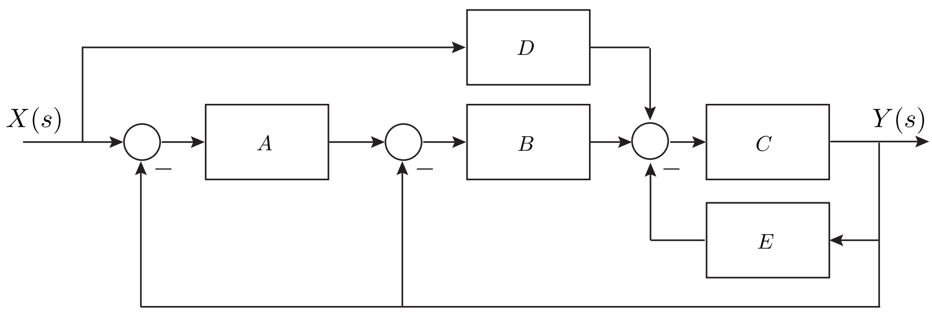
b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^3 + 27s^2 + 32s - 60}{s^3 + 12s^2 + 20s}, \qquad G_2(s) = \frac{24s^2 + 213s + 519}{(s+5)^2\,(s-1)\,(s+2)}$$

c) Dato il seguente schema a blocchi:

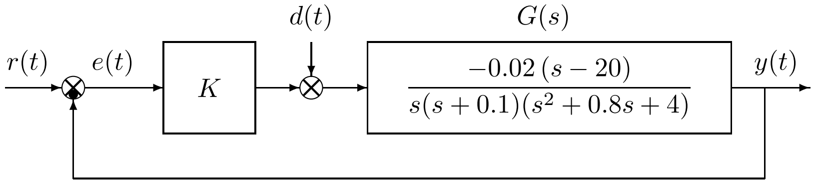


utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{G = 100(s+20)(s+0.05)}{(s^2+30s+625)(s+2)(1+20s)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 50, $x(t) = 50$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

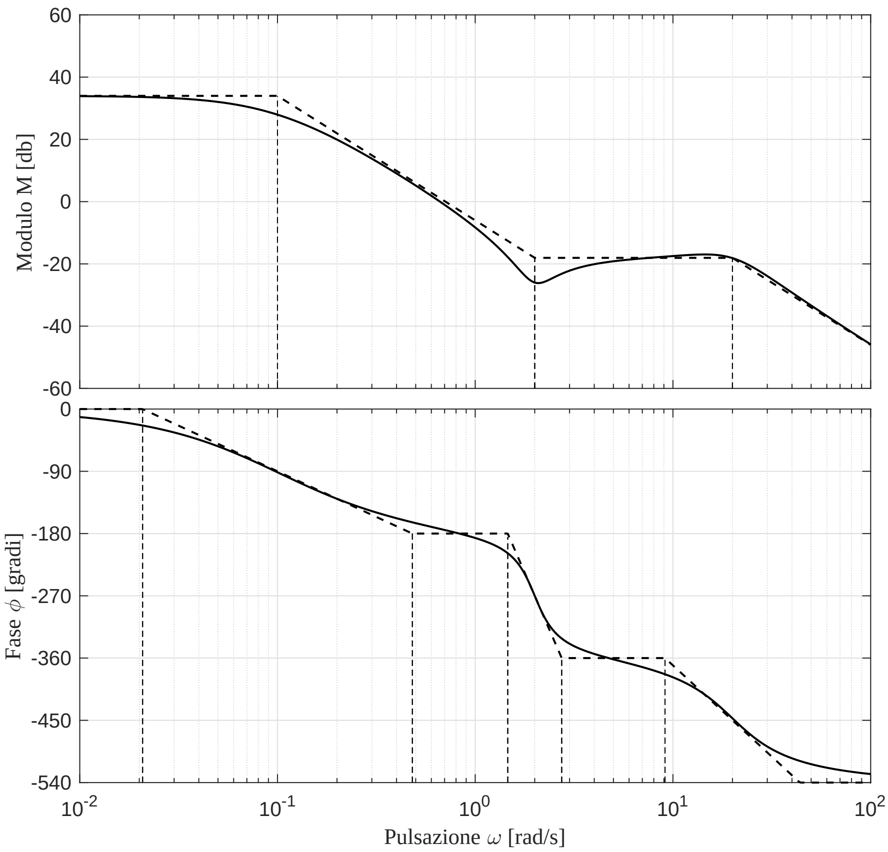
e.2) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 4t$ e il disturbo $d(t) = 3\sin(5t)$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasei della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

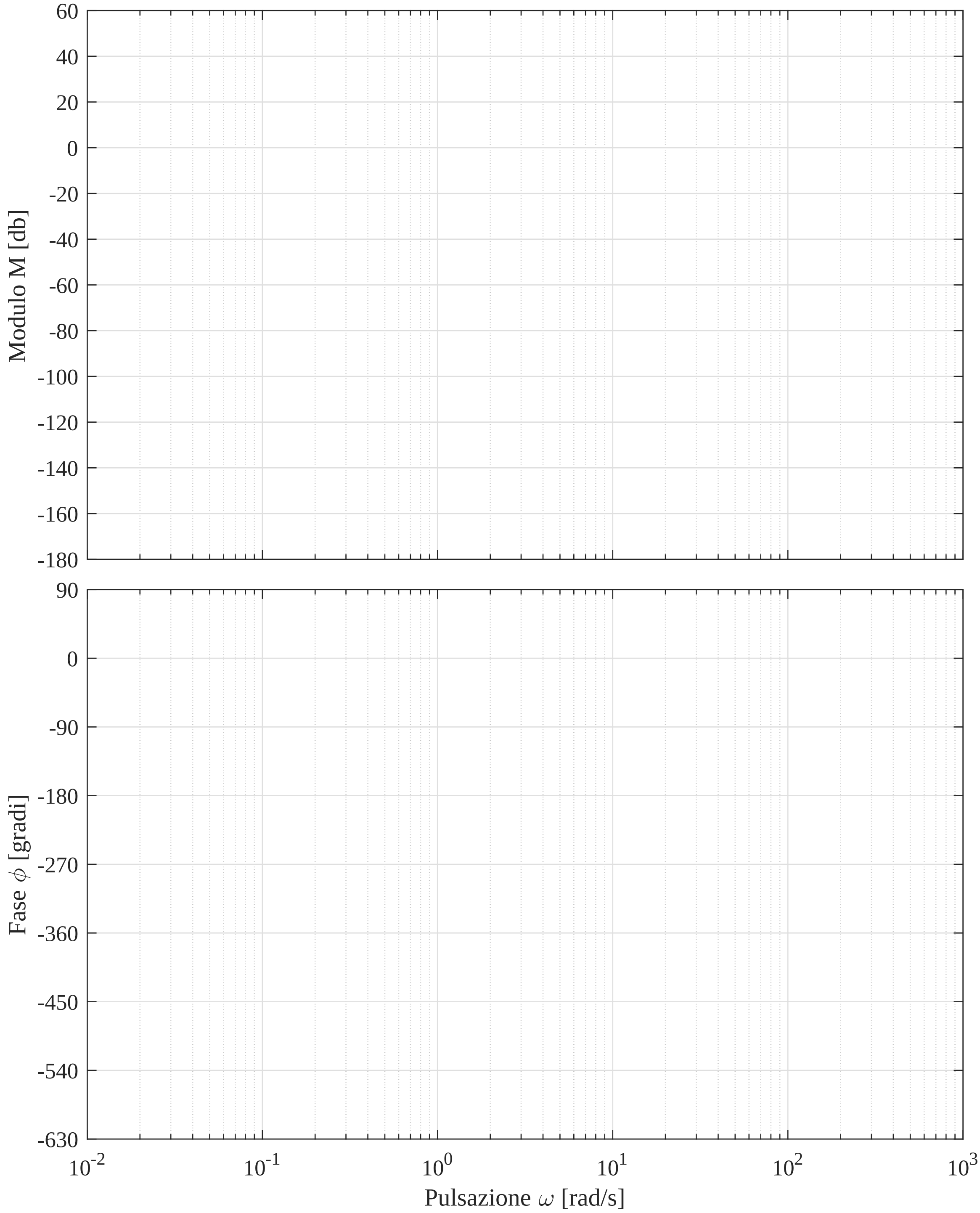


f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\,\sin(10\,t + \pi/3)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

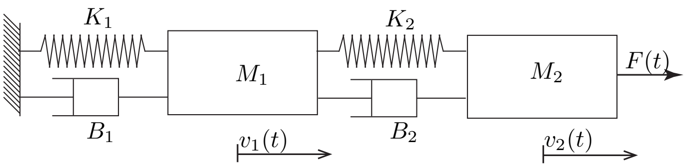
Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema meccanico di figura composto da masse, molle e smorzatori, quale sarà l'ordine della funzione di trasferimento tra ingresso $F(t)$ e uscita $v_2(t)$:



   ○ 2
   ⊗ 4
   ○ 6
   ○ 8

2. Quali dei seguenti sistemi non sono asintoticamente stabili?

   ⊗ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s+3)(2s+1)}$ ○ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s+4)}$

   ○ $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$ ⊗ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2+4)}$

3. L'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$ è:

   ○ $y(t) = a\,e^{-\frac{M}{b}\,t}$
   ○ $y(t) = a(1 - e^{-\frac{M}{b}\,t})$
   ○ $y(t) = \frac{a}{M}\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$
   ⊗ $y(t) = a\,e^{-\frac{b}{M}\,t}$

4. Il tempo di assestamento della risposta al gradino unitario del sistema
   $G(s) = \dfrac{50(4+0.1\,s)}{(20+0.2\,s)(s^2+12\,s+100)}$ vale circa

   ○ $T_a \simeq 4$ s
   ⊗ $T_a \simeq 0.5$ s
   ○ $T_a \simeq 0.25$ s
   ○ $T_a \simeq 0.03$ s

5. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+2}$ vale:

   ○ 0
   ⊗ 3
   ○ 1/2
   ○ ∞

6. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   $\otimes$ permette di calcolare la risposta libera del sistema

   $\otimes$ permette di calcolare la risposta forzata del sistema

   $\otimes$ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti

   $\bigcirc$ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti

7. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale $\dddot{y} + 7\dot{y} + 2\,y = 3\ddot{x} + \dot{x} + 4\,x$ è:

   $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s^2 + 2s}$

   $\otimes$ $G(s) = \dfrac{3s^2 + s + 4}{s^3 + 7s + 2}$

   $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{s^3 + 7s + 2}{3s^2 + s + 4}$

8. Un sistema di tipo 1

   $\bigcirc$ ha uno zero nell'origine

   $\otimes$ ha un polo nell'origine

   $\bigcirc$ ha un errore a regime costante e non nullo nella risposta al gradino

   $\otimes$ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

9. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   $\otimes$ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

   $\bigcirc$ ha solo una radice a parte reale positiva

   $\otimes$ ha almeno una radice a parte reale positiva

10. Linearizzando il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -2x_1 + (\sin^2(x_1) + 1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 & = & x_2 \\ y & = & x_1 + \cos(x_2)u^2 \end{array} \right.$$

   intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

   $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 0]$, $D = 1$

   $\otimes$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 0]$, $D = 0$

   $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 1]$, $D = 1$

   $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 1]$, $D = 0$

Cognome: Nome: N. Matr.: □□□□□□

Ho seguito il corso con Prof. Giarré □ Prof. Biagiotti □

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 5 settembre 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\cos(3t)}{3}\, e^{-2\,t} + 3\,\delta(t), \qquad x_2(t) = 1 + 2\sin(4\,t-8) + t^4\,e^{-t}$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = 3 + \frac{s+2}{3\left[(s+2)^2+3^2\right]}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{8}{s^2+4^2}e^{-2s} + \frac{24}{(s+1)^5}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

SOLUZIONE:
Calcolando $G(s) = B\,(sI_2 - A)^{-1}\,C + D$ si ottiene

$$G(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^2+4s+4}$$

---

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta all'impulso di $G(s)$ ovvero la sua antitrasformata di Laplace puó essere ottenuta scomponendo $G(s)$ come

$$G(s) = 1 + \frac{s}{(s+2)^2}$$

dove la costante 1 dipende dal fatto che la funzione di trasferimento $G(s)$ ha grado relativo nullo. Pertanto, antitrasformando, risulta

$$y(t) = 1\delta(t) + e^{-2t} - 2te^{-2t}.$$

Biagiotti - b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2s^3+27s^2+32s-60}{s^3+12s^2+20s}, \qquad G_2(s) = \frac{24s^2+213s+519}{(s+5)^2\,(s-1)\,(s+2)}$$

SOLUZIONE:
La funzione $G_1(s)$ può essere scomposta in fratti semplici nel seguente modo

$$G_1(s) = 2 - \frac{3}{s} + \frac{2}{s+2} + \frac{4}{s+10}$$

di conseguenza la risposta impulsiva (ovvero l'anti-trasformata di Laplace) risulta

$$g_1(t) = 2\delta(t) - 3 + 2\,e^{-2\,t} + 4e^{-10\,t}$$

La funzione $G_2(s)$ può essere riscritta come

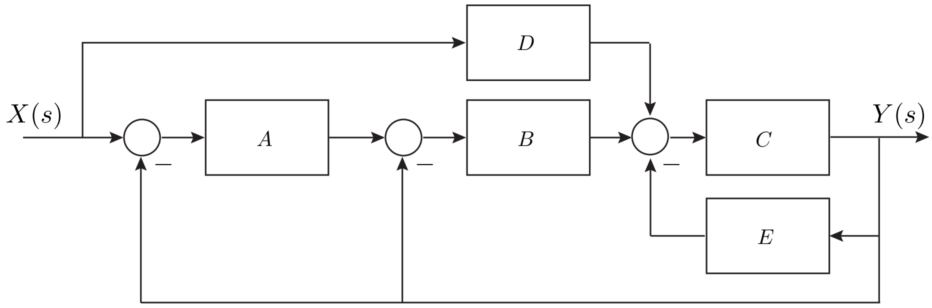
$$G_2(s) = \frac{3}{(s+5)^2} + \frac{7}{(s-1)} - \frac{7}{(s+2)}$$

di conseguenza la sua risposta impulsiva risulta

$$g_2(t) = 3t\,e^{-5t} + 7\,e^{t} - 7\,e^{-2t}$$

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ABC + DC}{1 + CE + BC + ABC}$$

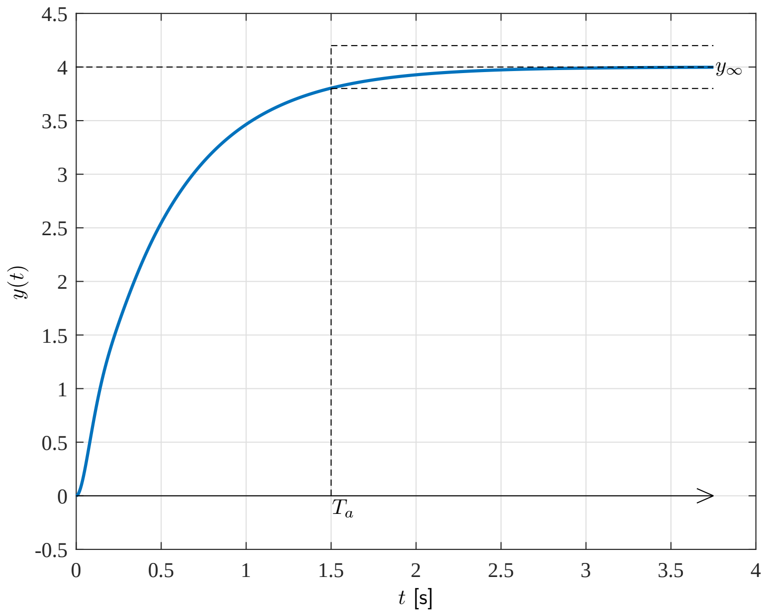
---

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{G = 100(s+20)(s+0.05)}{(s^2+30s+625)(s+2)(1+20s)}$

Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 50, $x(t) = 50$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:

Il sistema ha un polo dominante reale $p = -2$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico, come mostrato in figura



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 50$ risulta

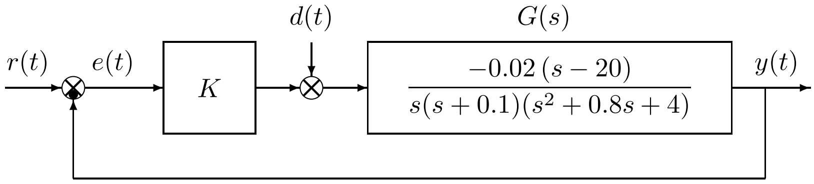
$$y_\infty = A\,G(0) = 50 \cdot 0.08 = 4$$

Il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ s},$$

e il periodo dell'oscillazione non esiste.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 - \frac{0.02\,K(s-20)}{s(s+0.1)(s^2+0.8s+4)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 0.9s^3 + 4.08\,s^2 + (0.4 - 0.02K)\,s + 0.4K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 4.08 & 0.4K & \\
3 & 0.9 & 0.4-0.02K & & \\
2 & 3.272+0.02K & 0.36K & & \rightarrow \; K > -163.6 \\
1 & -0.0004(K-3.42)(K+957.02) & & & \rightarrow \; -957.02 < K < 3.42 \\
0 & 0.36K & & & \rightarrow \; K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^\star = 3.42$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{0.36K^\star}{3.272+0.02K^\star}} = 0.607$$

---

e.2) Posto $K = 2$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 4t$ e il disturbo $d(t) = 3\sin(5t)$

SOLUZIONE:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento a rampa è dato da:

$$e_{r\infty} = \frac{R_0}{K_v} = \frac{4}{2} = 2$$

dove $R_0 = 4$ è la pendenza della rampa e K_v è dato da

$$\lim_{s\to 0} s\,KG(s) = 2$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'errore dovuto al disturbo $d(t)$:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{0.02s - 0.4}{s^4 + 0.9s^3 + 4.08s^2 + 0.36s + 0.8}.$$

Essendo $d(t)$ sinusoidale è possibile sfruttare il concetto di risposta armonica ottenendo $e_{d\infty}(t) = 3\,|F_d(j5)|\sin(5t + \arg\{F_d(j5)\})$ con $|F_d(j5)| = 0.00077014$ e $\arg\{F_d(j5)\} = -182.1029^o = -3.1783$ rad. In conclusione,

$$e_\infty = e_{r\infty} + e_{d\infty} = 2 + 0.0023\sin(5t - 3.1783).$$

---

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

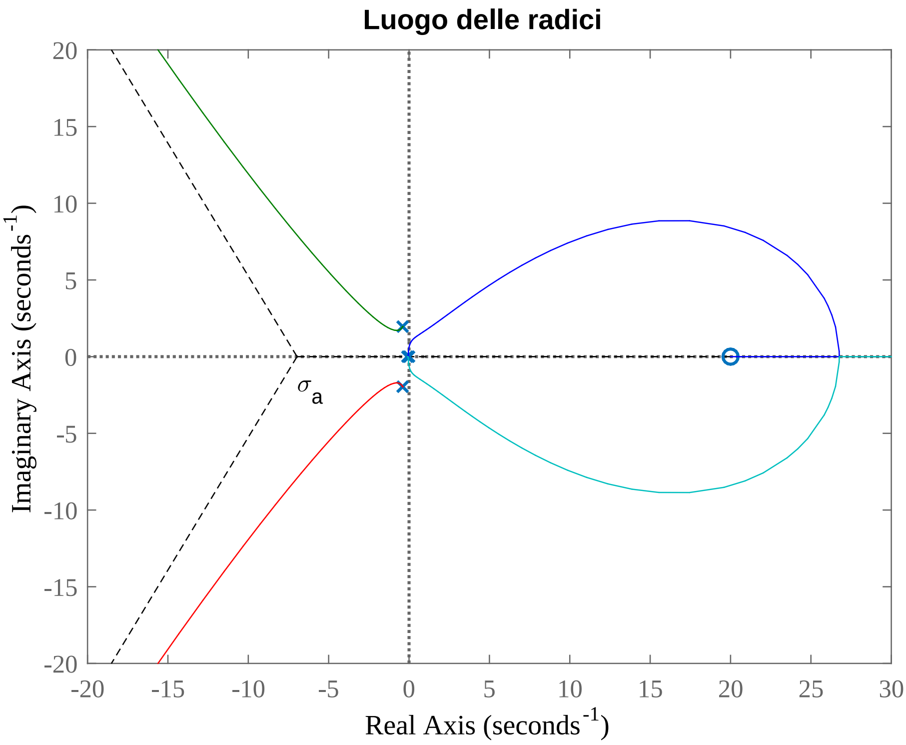
SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

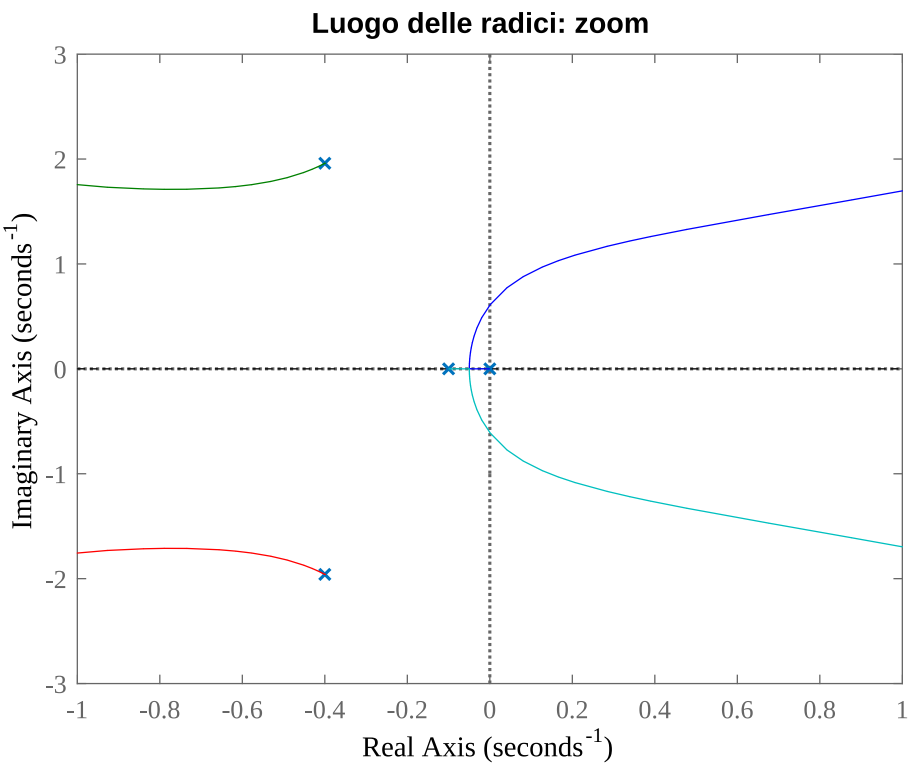
Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:
Il guadagno della $G(s)$ nella forma poli-zeri è negativo, pertanto il guadagno $K' = -0.02\,K$ quando $K > 0$ sarà negativo. Di conseguenza il luogo delle radici verrà tracciato per $K' < 0$. Gli asintoti sono 3, essendo 3 il grado relativo, e il centro degli asintoti è il punto di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-0.1 - 0.8 - 20) = -6.97.$$

Il luogo delle radici finale per valori negativi di K' e uno zoom sono riportati nelle seguenti figure.



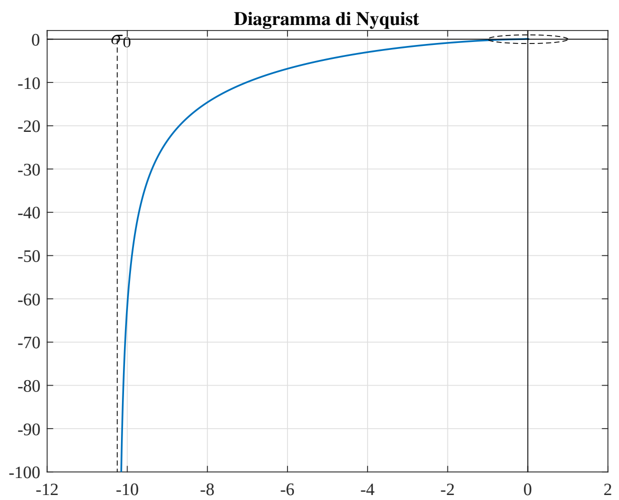


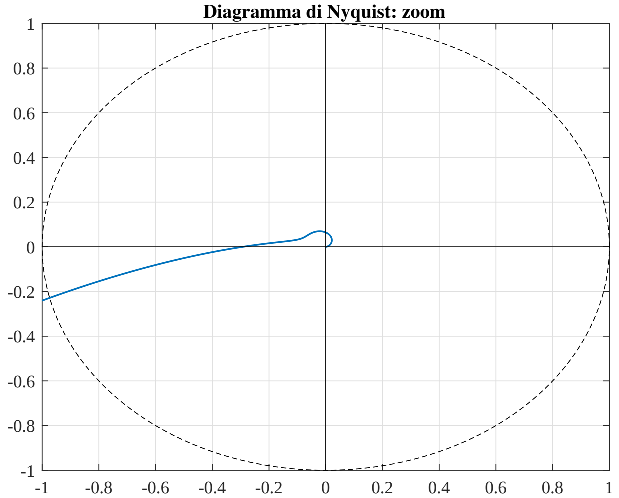
Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici (per $K > 0$) attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^\star = \pm j\omega^\star = \pm j0.607$, per $K = K^\star = 3.42$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura, insieme a uno zoom della regione intorno all'origine.





La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è $G_0(s) = \dfrac{1}{s}$ pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è $G_\infty(s) = \dfrac{-0.02}{s^3}$ e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{5}{2}\pi$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{20} - \frac{1}{0.1} - \frac{0.8}{4} = -10.25 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 20 - (-0.1 - 0.8) = 20.9 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = 2\pi$.
Essendo il sistema di tipo 1, è presente un asintoto verticale che ha ascissa

$$\sigma_a = K\,\Delta_\tau = -10.25$$

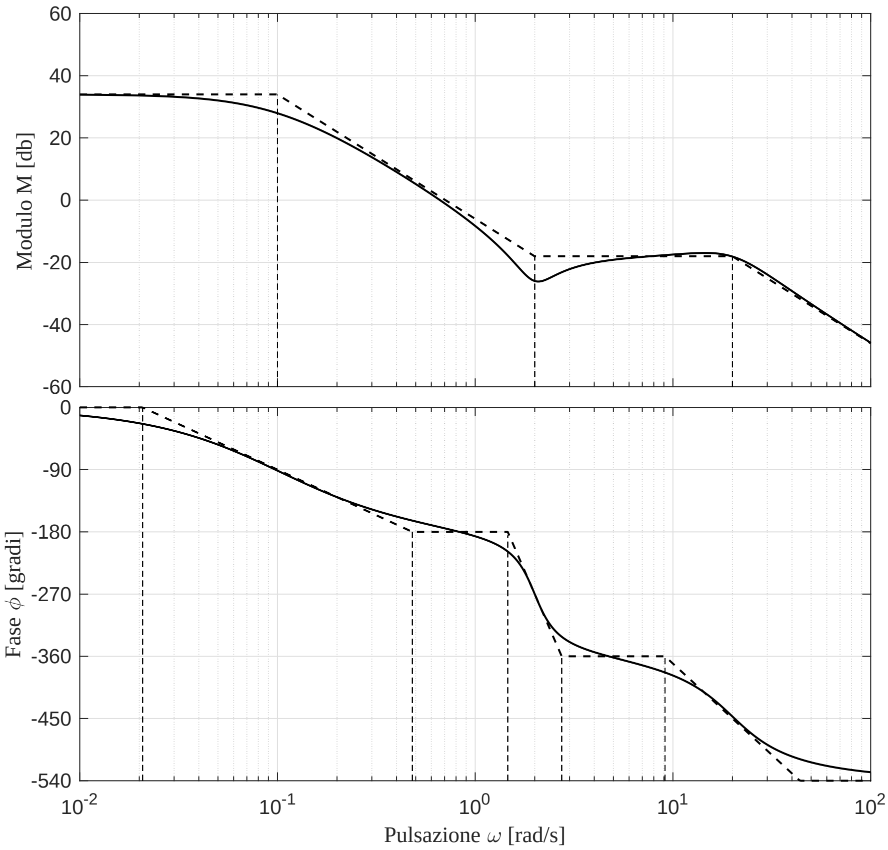
Dal diagramma risultano inoltre esistere due intersezioni con l'asse reale (una per l'asse reale negativo e una per l'asse reale positivo), che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risultano rispettivamente essere pari a

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -1/3.42 = -0.29 \quad \text{e} \quad \sigma_1^\star = -1/K_1 = -1/-957.02 = 0.001$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente a $K^\star$ è $\omega^\star = \sqrt{\frac{0.4-0.02\,K^\star}{0.9}} = 0.607$ rad/s mentre la pulsazione ω_1 corrispondente a K_1 è $\omega_1 = \sqrt{\frac{0.4-0.02\,K_1}{0.9}} = 4.66$ rad/s.

---

f) Si faccia riferimento al diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasei della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



f.1) Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{50(0.25s^2 - 0.2s + 1)}{(10s+1)^2\left(\frac{1}{400}s^2 + \frac{1}{20}s + 1\right)} = \frac{50(s^2 - 0.8s + 4)}{(s+0.1)^2(s^2+20s+400)}$$

dove il valore $\mu \simeq 50$ si determina direttamente leggendo dal diagramma di Bode il valore del modulo in bassa frequenza della $G(s)$

$$|G(0)| \simeq 34 \text{ db} \simeq 50$$

Il segno sarà positivo poichè il sistema ha fase iniziale nulla.

In corrispondenza di $\omega = 0.1$ rad/s è presente una coppia di poli reali coincidenti, infatti il diagramma reale si trova tutto al di sotto della sua approssimazione asintotica. Il loro segno è negativo (quindi sono stabili) essendo lo sfasamento prodotto pari a -180^o.

In corrispondenza di $\omega = 2$ rad/s è presente una coppia di zeri complessi coniugati instabili (essendo lo sfasamento -180^o) con $\zeta = 0.2$. Infatti

$$\zeta = \frac{M_{\alpha_n}}{2} \simeq \frac{0.4}{2} = 0.2.$$

La distanza $M_{\alpha_n} \simeq -8$ db $\simeq 0.4$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

In corrispondenza di $\omega = 20$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati stabili (sfasamento -180^o) caratterizzati da $\delta = 0.5$ (come si evince dal fatto che diagramma asintotico e diagramma reale si intersecano proprio in corrispondenza del punto di rottura in 0.8).

---

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\sin(10\,t + \pi/3)\,.$$

SOLUZIONE:
Leggendo il gudagno statico di $G(s)$ e il modulo e argomento di $G(j\omega)$ in $\omega = 10$ rad/s direttamente dai diagrammi di Bode si trova

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 4 \cdot |G(j0)| + 3 \cdot |G(j10)| \sin(10\,t + \arg\{G(j10)\} + \pi/3) \\ &\approx 200 + 0.4 \sin(10\,t - 6.7680 + \pi/3) \\ &\approx 200 + 0.4 \sin(10\,t - 5.7208)\,. \end{aligned}$$

Cognome: Nome: N. Matr.: