Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 giugno 2018 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

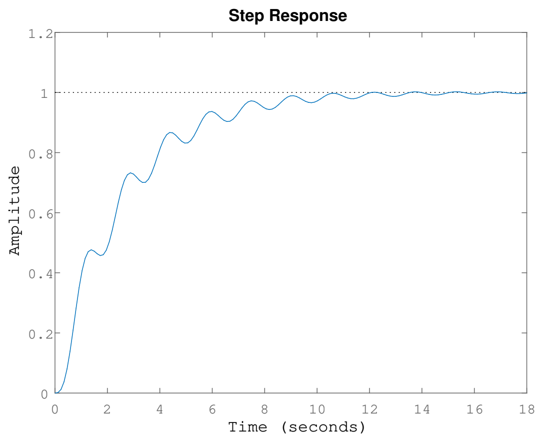
1. Quali dei seguenti sistemi non sono instabili?

◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+3)(2s+1)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s^2+4)}$

◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2-4)}$

2. Se un sistema dinamico dà luogo alla risposta a gradino di figura, allora la sua funzione di traferimento a poli domninanti sarà caratterizzata da

◯ due poli complessi coniugati;
◯ tre poli, di cui due complessi coniugati;
◯ due poli complessi coniugati e uno zero a parte reale positiva;
◯ due poli complessi coniugati e uno zero a parte reale negativa;



3. Applicando al sistem $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+16)}$ l' ingresso $u(t) = 3\sin(4t)$, a regime l'uscita sarà:

◯ $y(t) = 0$
◯ $y(t) = \frac{1}{8}\sin(4t - 45^o)$
◯ $y(t) = \frac{3}{8}\sin(4t)$
◯ $y(t) = \infty$

4. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

◯ errore a regime nullo per ingresso a gradino
◯ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
◯ errore a regime nullo per ingresso a rampa
◯ errore a regime nullo per ingresso a parabola

5. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

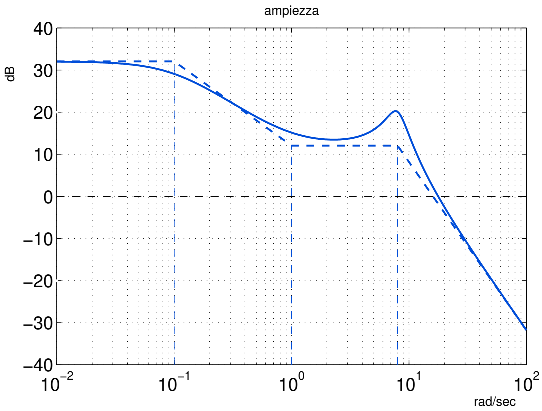
◯ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
◯ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = sF(s)$
◯ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = sF(s) - f(0^-)$
◯ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = \frac{1}{s}F(s)$

6. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3+s^2+12}{4s^3+5s^2+s+1}$ è pari a:

- ◯ 3/4;
- ◯ 12;
- ◯ ∞;
- ◯ 0.

7. Il diagramma di Bode delle ampiezze di figura corrisponde alla funzione di trasferimento (supposta a fase minima):

- ◯ $G(s) = \dfrac{256(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$
- ◯ $G(s) = \dfrac{256(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
- ◯ $G(s) = \dfrac{45(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
- ◯ $G(s) = \dfrac{45(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$



8. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:

- ◯ pendenza di -20 db/decade
- ◯ pendenza di -40 db/decade
- ◯ pendenza di -60 db/decade
- ◯ pendenza di -80 db/decade

9. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

- ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
- ◯ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa
- ◯ ha un polo nell'origine
- ◯ ha tutti le radici a parte reale positiva

10. Linearizzando il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + (\sin^2(x_1)+1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

- ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \;\; 1]$, $D = 0$
- ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 0]$, $D = 0$
- ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 0]$, $D = 0$
- ◯ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 0]$, $D = 0$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 giugno 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \sin(t/2)\, e^{-t}, \qquad x_2(t) = 10 + 2t^2\, e^{-5t} + \cos\left(3(t + \tfrac{\pi}{2})\right)$$

Giarrè - b) Dato il seguente sistema SISO lineare tempo invariante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

1. Ricavare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$.
2. Calcolare in maniera analitica l'evoluzione dell'uscita $y(t)$ con un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

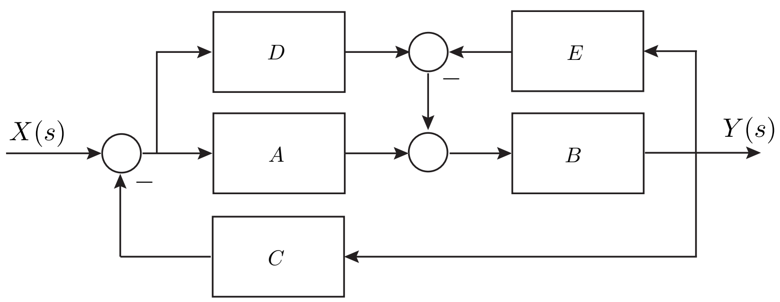
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 13y(t) = 7\ddot{x}(t) + 26\dot{x}(t) + 39x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

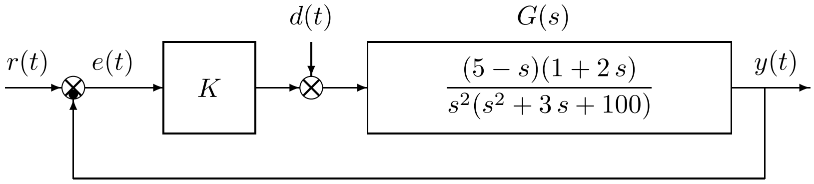
c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10(1 + 0.2\,s)(s+5)^2}{(s^2 + 6\,s + 34)(s + 10)(1 + 10\,s)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 2, $x(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

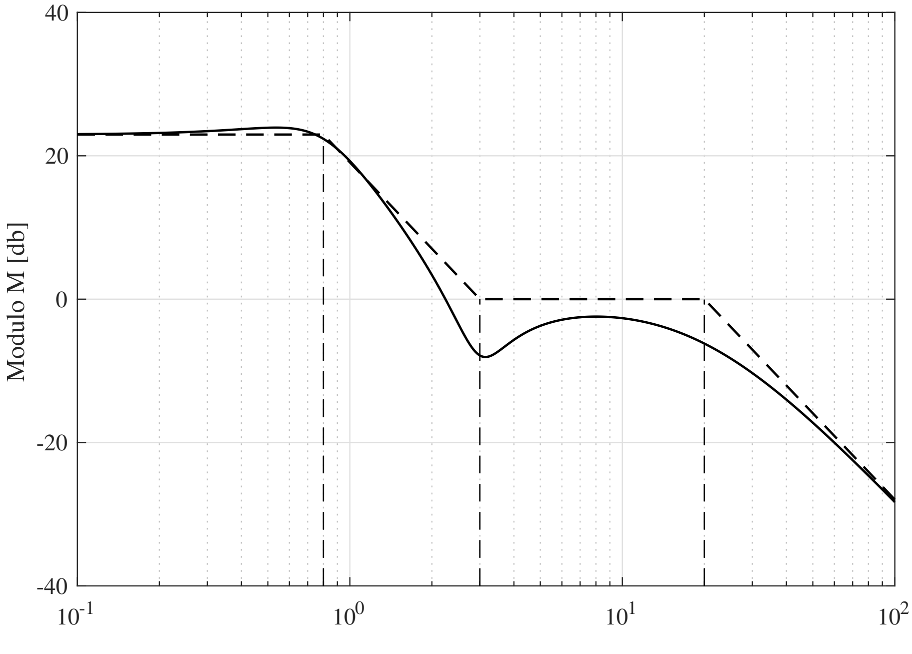
e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 20 + 2t$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(5t)$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato sia per valori positivi del parametro K che per valori negativi. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

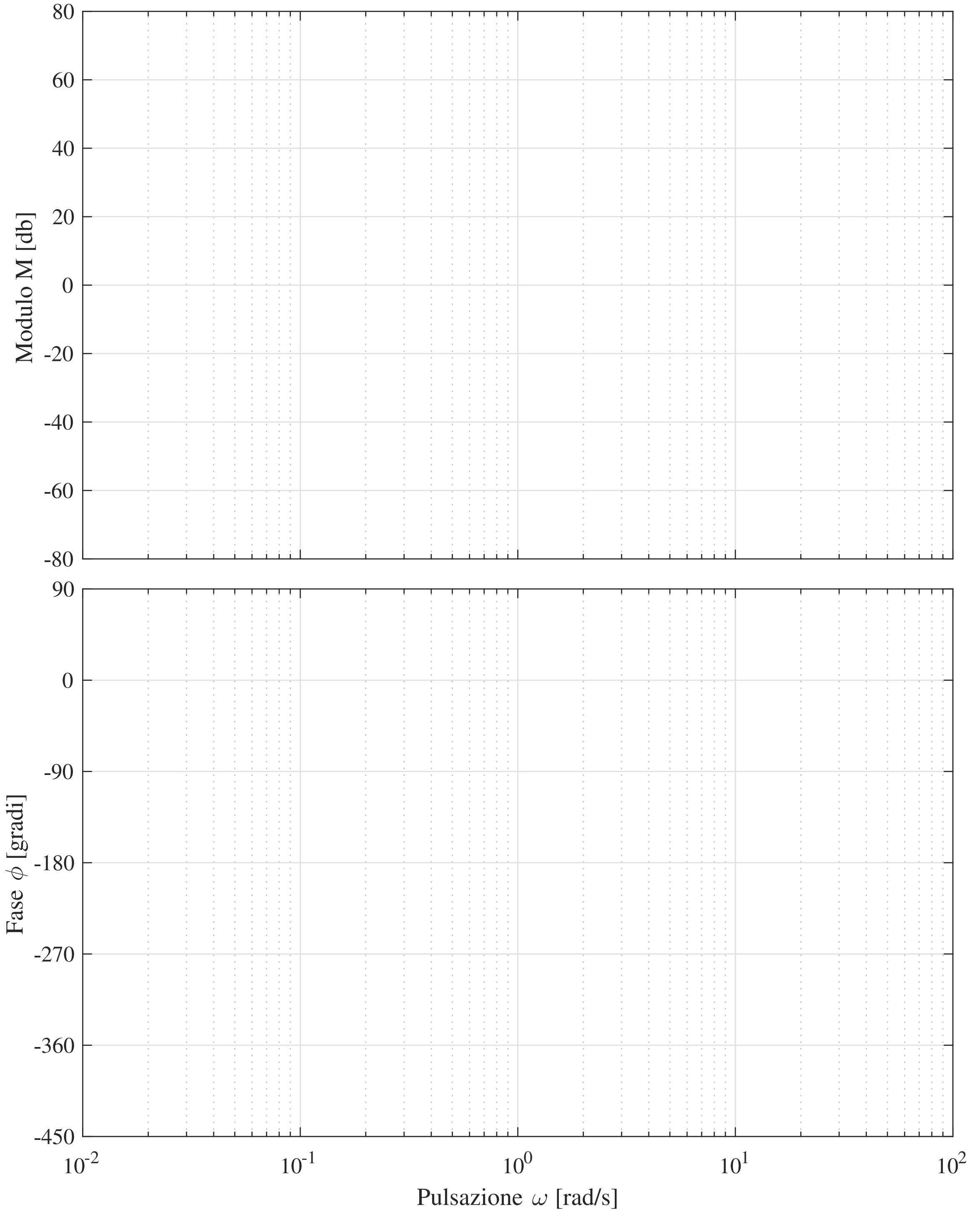
Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione a fase minima $G(s)$ mostrato in figura.



Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

Cognome: Nome: N. Matr.:



Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 giugno 2018 - Quiz

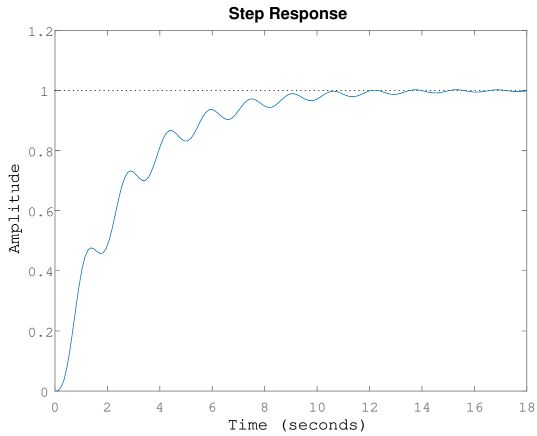
Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Quali dei seguenti sistemi non sono instabili?

○ $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+3)(2s+1)}$ ⊗ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s^2+4)}$

⊗ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$ ○ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2-4)}$

2. Se un sistema dinamico dà luogo alla risposta a gradino di figura, allora la sua funzione di traferimento a poli domninanti sarà caratterizzata da



○ due poli complessi coniugati;
⊗ tre poli, di cui due complessi coniugati;
○ due poli complessi coniugati e uno zero a parte reale positiva;
○ due poli complessi coniugati e uno zero a parte reale negativa;

3. Applicando al sistem $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+16)}$ l' ingresso $u(t) = 3\sin(4t)$, a regime l'uscita sarà:

○ $y(t) = 0$
○ $y(t) = \frac{1}{8}\sin(4t - 45^o)$
○ $y(t) = \frac{3}{8}\sin(4t)$
⊗ $y(t) = \infty$

4. Dato il sistema $G(s) = \dfrac{(s+3)^2}{s^2(s^2+4s+25)}$ posto in retroazione unitaria negativa (che si suppone stabile) risulta

⊗ errore a regime nullo per ingresso a gradino
○ errore a regime limitato ma non nullo per ingresso a rampa
⊗ errore a regime nullo per ingresso a rampa
○ errore a regime nullo per ingresso a parabola

5. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

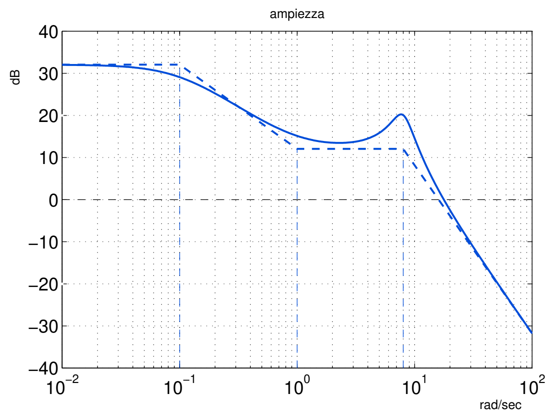
○ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = \frac{1}{s}F(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = sF(s)$
⊗ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = sF(s) - f(0^-)$
○ $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = \frac{1}{s}F(s)$

6. Il valore iniziale della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \dfrac{3s^3 + s^2 + 12}{4s^3 + 5s^2 + s + 1}$ è pari a:

   - $\otimes$ 3/4;
   - $\bigcirc$ 12;
   - $\bigcirc$ ∞;
   - $\bigcirc$ 0.

7. Il diagramma di Bode delle ampiezze di figura corrisponde alla funzione di trasferimento (supposta a fase minima):

   - $\otimes$ $G(s) = \dfrac{256(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$
   - $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{256(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
   - $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{45(s+0.1)}{(s+1)(s^2+3.2s+64)}$
   - $\bigcirc$ $G(s) = \dfrac{45(s+1)}{(s+0.1)(s^2+3.2s+64)}$



8. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s-z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta:

   - $\otimes$ pendenza di -20 db/decade
   - $\bigcirc$ pendenza di -40 db/decade
   - $\bigcirc$ pendenza di -60 db/decade
   - $\bigcirc$ pendenza di -80 db/decade

9. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze pari di s. Utilizzando il criterio di Routh è possibile affermare che l'equazione caratteristica:

   - $\otimes$ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine
   - $\otimes$ ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa
   - $\bigcirc$ ha un polo nell'origine
   - $\bigcirc$ ha tutti le radici a parte reale positiva

10. Linearizzando il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + (\sin^2(x_1) + 1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

   - $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ \ 1], \quad D = 0$
   - $\otimes$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ \ 0], \quad D = 0$
   - $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ \ 0], \quad D = 0$
   - $\bigcirc$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ \ 0], \quad D = 0$

Cognome: Nome: N. Matr.: □□□□□□

Ho seguito il corso con Prof. Giarré □ Prof. Biagiotti □

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 19 giugno 2018 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \sin(t/2)\, e^{-t}, \qquad x_2(t) = 10 + 2t^2\, e^{-5t} + \cos\big(3(t+\tfrac{\pi}{2})\big)$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left[(s+1)^2 + \frac{1}{2^2}\right]}, \qquad X_2(s) = \frac{10}{s} + \frac{4}{(s+5)^3} + \frac{s}{s^2+3^2} e^{\frac{\pi}{2}s}$$

Giarrè - b) Dato il seguente sistema SISO lineare tempo invariante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 1 \quad 0]\, x(t) \end{aligned}$$

1. Ricavare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$.
2. Calcolare in maniera analitica l'evoluzione dell'uscita $y(t)$ con un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

SOLUZIONE:
La funzione di trasferimento si ottiene dalla formula $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = C\frac{Adj(sI-A)}{det(sI-A)}B$.
Poiché $det(sI-A) = (s+1)(s-3)^2$, si ottiene $G(s) = \frac{1}{s+1}$. La risposta nell'uscita si ottiene antitrasformando da $Y(s) = C(sI-A)^{-1}B\frac{1}{s} + C(sI-A)^{-1}x(0) = \frac{1}{s+1}(\frac{1}{s}+1) = \frac{1}{s}$ che fornisce $y(t) = 1$.

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 13y(t) = 7\ddot{x}(t) + 26\dot{x}(t) + 39x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{7s^2 + 26s + 39}{s^2 + 6s + 13}$$

---

b.2) Calcolare analiticamente la risposta al gradino unitario di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta al gradino unitario di $G(s)$ ovvero la antitrasformata di Laplace di $G(s)\frac{1}{s}$ può essere ottenuta scomponendo in fratti semplici

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{7s^2 + 26s + 39}{s^3 + 6s^2 + 13s}$$

come

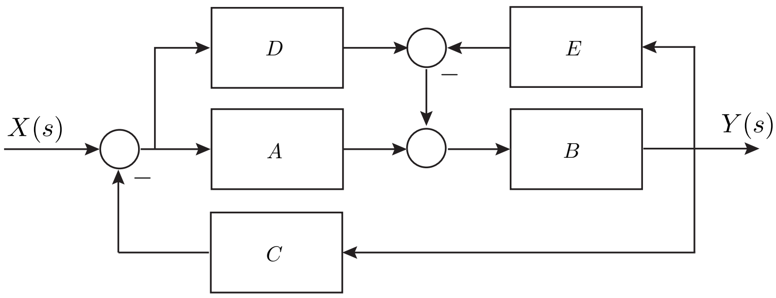
$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{2+j}{s+3-2j} + \frac{2-j}{s+3+2j}$$

Pertanto, antitrasformando, risulta

$$\begin{aligned} y(t) &= 3 + 2\sqrt{5}e^{-3t}\cos\left(2t + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 3 + 4.4721e^{-3t}\cos\left(2t + 0.4636\right) \end{aligned}$$

---

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

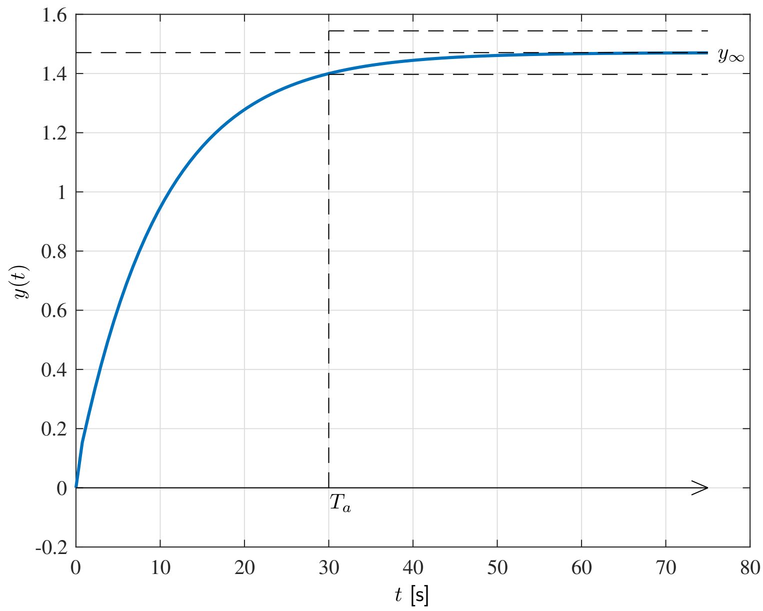
SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB + DB}{1 + ABC + BCD + EB}$$

---

d) Sia data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{10(1 + 0.2\,s)(s+5)^2}{(s^2 + 6\,s + 34)(s+10)(1 + 10\,s)}$
Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino in ingresso di ampiezza 2, $x(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

SOLUZIONE:
Il sistema ha un polo dominante reale $p = -0.1$ pertanto la risposta al gradino sarà di tipo aperiodico, come mostrato in figura



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 2$ risulta

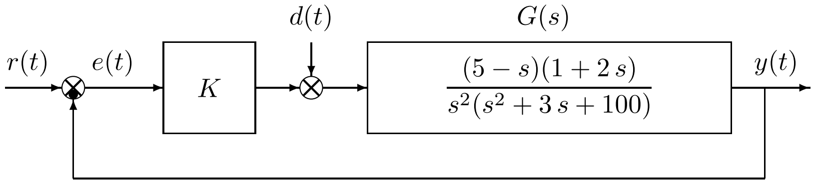
$$y_\infty = A\,G(0) = 2 \cdot 0.7353 = 1.4706$$

Il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{0.1} = 30 \text{ s},$$

e il periodo dell'oscillazione non esiste.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(5-s)(1+2\,s)}{s^2(s^2+3\,s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 3\,s^3 + (100-2\,K)s^2 + 9Ks + 5K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 100-2\,K & 5K \\ 3 & 3 & 9K & \\ 2 & -15K+300 & 15K & \\ 1 & -45K(3K-59) & & \\ 0 & 15K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{300}{15} = 20, \qquad\qquad K > 0.$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$0 < K < \frac{59}{3} = 19.67.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^* = 19.67.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{15K^*}{300-15K^*}} = 7.6811.$$

e.2) Posto $K = 10$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 20 + 2t$ e il disturbo $d(t) = 2\sin(5t)$

SOLUZIONE:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. L'errore $e_r(\infty)$ dovuto al riferimento, composto da una costante e da una rampa, sarà nullo, essendo il sistema considerato di tipo 2, pertanto è necessario calcolare soltanto l'errore dovuto al disturbo $d(t)$, che è dato da:

$$E_d(s) = F_d(s)D(s)$$

dove $D(s)$ è la trasformata di Laplace di $d(t)$ e $F_d(s)$ è la funzione di trasferimento tra $D(s)$ e $E_d(s)$ che vale

$$F_d(s) = -\frac{G(s)}{1+KG(s)} = \frac{2s^2-9s-5}{s^4+3s^3+80s^2+90s+50}.$$

Essendo $d(t)$ sinusoidale è possibile sfruttare il concetto di risposta armonica ottenendo $e_{d\infty}(t) = 2\,|F_d(j5)|\sin(t + \arg\{F_d(j5)\})$ con $|F_d(j5)| = 0.0535$ e $\arg\{F_d(j5)\} = 42.5291^o = 0.7423$ rad.

In conclusione

$$e_\infty = e_{d\infty} = 0.1071\sin(5t + 0.7423).$$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

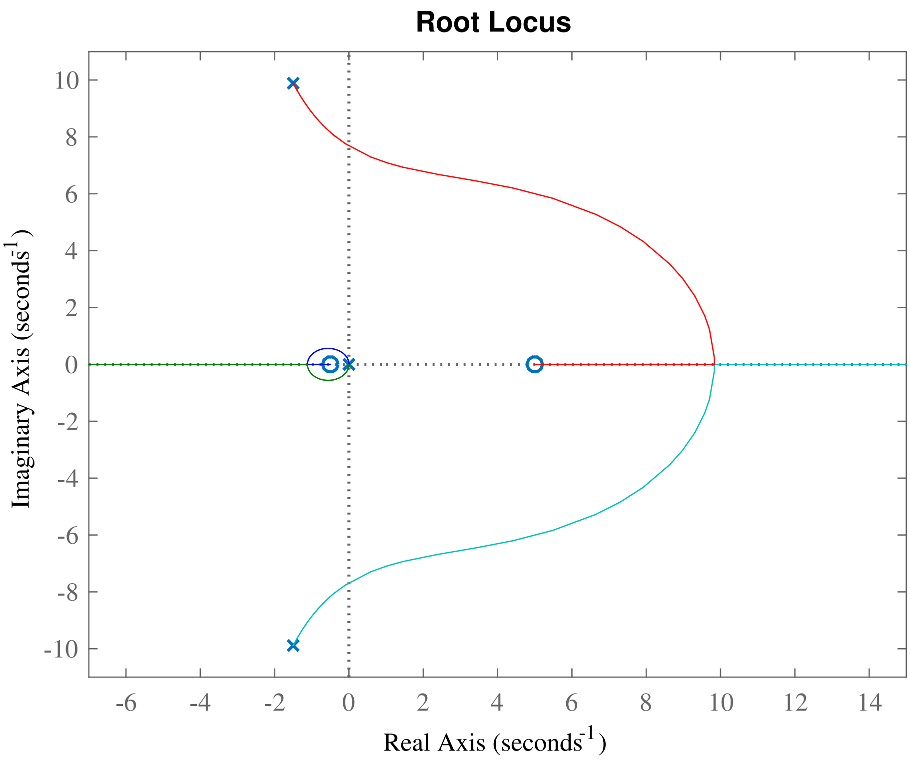
SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato sia per valori positivi del parametro K che per valori negativi. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

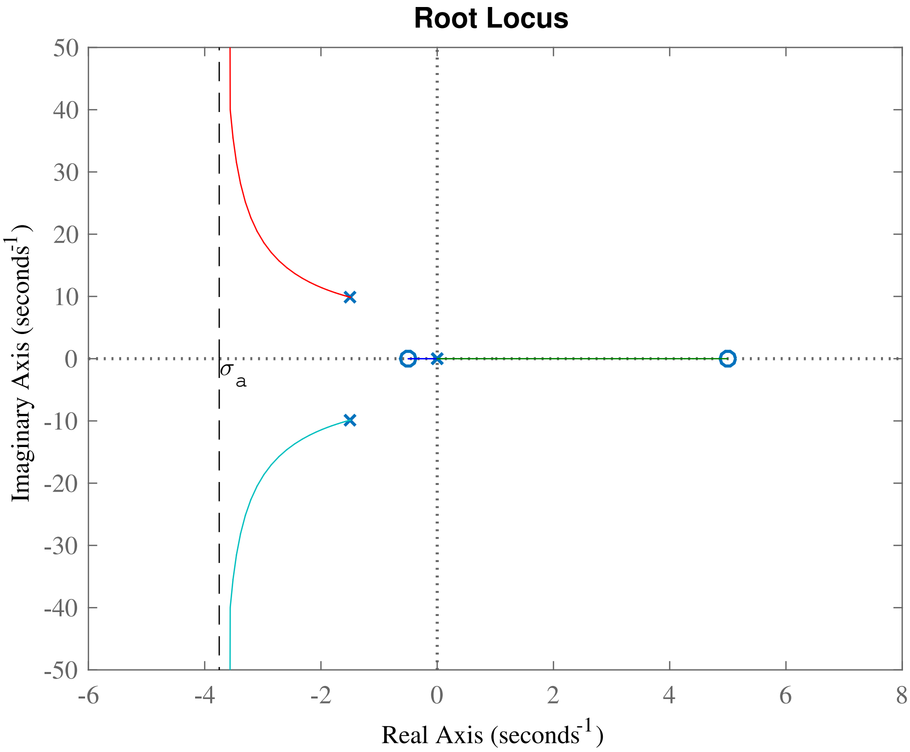
SOLUZIONE:
La funzione di trasferimento $G(s)$ nella forma poli zeri diventa

$$G(s) = -\frac{(s-5)(1+2\,s)}{s^2(s^2+3\,s+100)}$$

pertanto le regole per $K > 0$ e $K < 0$ sono invertite Essendo 2 il grado relativo del sistema, esistono due asintoti che per $K > 0$ sono disposti lungo l'asse reale (inutile quindi cercare il centro degli asintoti), mentre per $K < 0$ sono paralleli all'asse immaginario in corrispondenza dell'ascissa $\sigma_a = -3.75$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è riportato nella seguente figura.



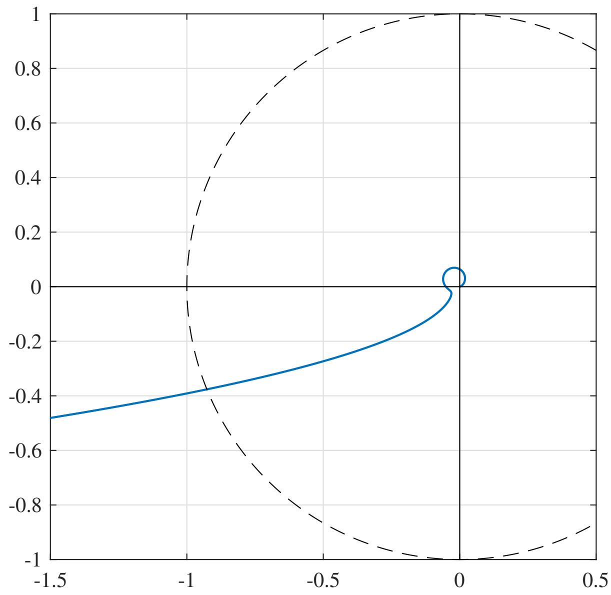
Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che per K positivo il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario, passando dal semipiano sinistro a quello destro, in corrispondenza di $s^* = \pm j\omega^* = \pm j7.6811$, per $K = K^* = 19.67$.
Per valori di $K < 0$ il luogo delle radici risultante è quello riportato nella figura che segue, in cui si nota un ramo sempre collocato nel semipiano destro (coerentemente col fatto che il sistema retroazionato è sempre instabile per $K < 0$).



Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{20\, s^2}, \qquad G_\infty(s) = -\frac{2}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad \varphi_\infty = -2\,\pi.$$

Il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$ e giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -2\,\pi$. Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{1}{5} + 2 - \frac{3}{100} = 1.77 > 0$$

pertanto il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il parametro Δ_p vale

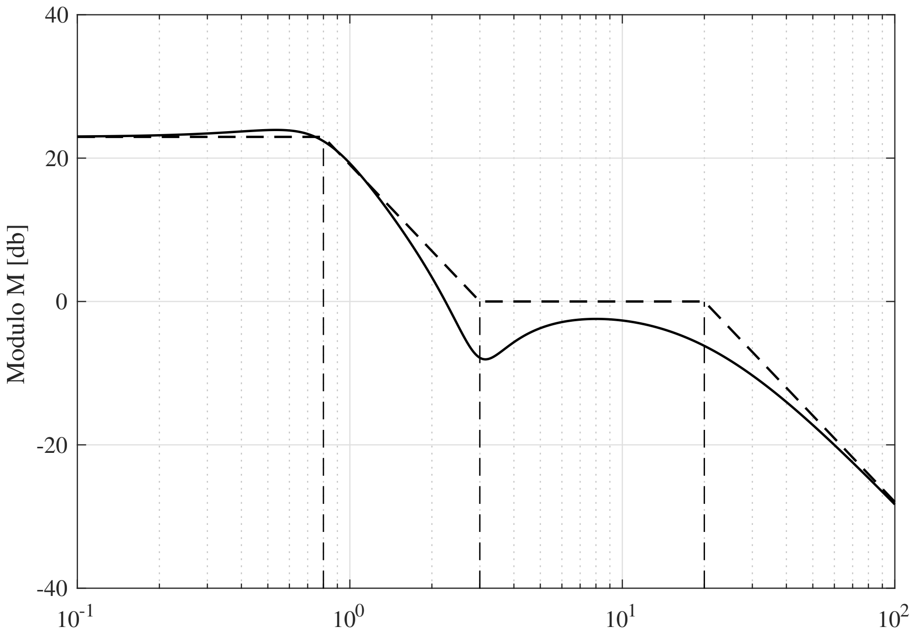
$$\Delta_p = 5 - \frac{1}{2} + 3 = 7.5 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞. Lo sfasamento complessivo è $\Delta\varphi = -\pi$.
Essendo il sistema di tipo 2, il diagramma di Nyquist non presenta asintoti verticali. Dal diagramma risulta inoltre esistere un'intersezione con l'asse reale negativo, che in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto risulta essere pari a

$$\sigma^\star = -1/K^\star = -1/19.67 = -0.05$$

---

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione <u>a fase minima</u> $G(s)$ mostrato in figura.



Si richiede di ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{14.0625(\frac{1}{9}s^2 + \frac{1.2}{9}s + 1)}{(\frac{1}{0.64}s^2 + \frac{0.8}{0.64}s + 1)(\frac{1}{20}s + 1)^2} = \frac{400(s^2 + 1.2s + 9)}{(s^2 + 0.8s + 0.64)(s + 20)^2}$$

dove il valore $\mu \simeq 5$ si determina direttamente leggendo dal diagramma di Bode il valore del modulo in bassa frequenza della $G(s)$

$$|G(0)| \simeq 23 \text{ db} \simeq 14$$

Il segno sarà positivo poichè il sistema è a fase minima.

In corrispondenza di $\omega = 0.8$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati (ovviamente stabili) caratterizzati da $\delta = 0.5$ (come si evince dal fatto che diagramma asintotico e diagramma reale si intersecano proprio in corrispondenza del punto di rottura in 0.8).
In corrispondenza di $\omega = 3$ rad/s è presente una coppia di zeri complessi coniugati stabili con $\zeta = 0.2$. Infatti

$$\zeta = \frac{M_{\alpha_n}}{2} \simeq \frac{0.4}{2} = 0.2.$$

La distanza $M_{\alpha_n} \simeq -8$ db $\simeq 0.4$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

In corrispondenza di $\omega = 20$ rad/s è presente una coppia di poli reali coincidenti, infatti il diagramma reale si trova tutto al di sotto della sua approssimazione asintotica.

Cognome: Nome: N. Matr.: