Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2017 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

   ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+3)(2s+1)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s^2+4)}$

   ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2+1)(s+3)}$ ◯ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2-4)}$

2. Indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \beta x_1 x_2(t) \end{cases}$

   ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ ◯ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

3. La risposta all'impulso del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s/3+1)}$ risulta

   ◯ $g(t) = e^{-t} + e^{-\frac{1}{3}t}$ ◯ $g(t) = \dfrac{3}{2}e^{-t} - \dfrac{3}{2}e^{-3t}$

   ◯ $g(t) = \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{3}{2}e^{3t}$ ◯ $g(t) = e^{-t} + e^{3t}$

4. Le due funzioni di trasferimento $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+0.2s+1}$ e $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+0.4s+4}$ sono caratterizzate da:

   ◯ lo stesso guadagno statico
   ◯ lo stesso tempo di assestamento nella riposta al gradino
   ◯ la stessa sovraelongazione nella risposta al gradino
   ◯ lo stesso periodo delle oscillazioni nella risposta al gradino

5. Ponendo la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{250}{s(s+1)(s+5)^2}$ in retroazione unitaria negativa (e posto che il sistema complessivo sia stabile) l'errore a regime per ingresso di riferimento a rampa $R(s) = \dfrac{4}{s^2}$ sarà

   ◯ nullo
   ◯ costante e pari a 0.4
   ◯ costante e pari a 0.1
   ◯ infinito

6. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

7. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ○ la risposta libera di un sistema
   ○ il valore a regime della risposta forzata di un sistema con segnale di ingresso sinusoidale
   ○ il valore a regime della risposta forzata di un sistema con segnale di ingresso rampa

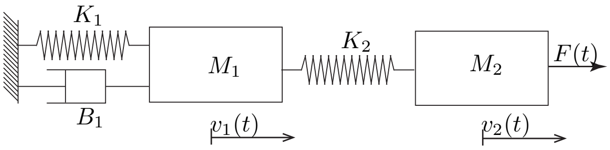
8. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)} e^{-\tau s}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta una:

   ○ pendenza di -20 db/decade
   ○ pendenza di -40 db/decade
   ○ pendenza di -60 db/decade
   ○ pendenza di -80 db/decade

9. (**Biagiotti**) La pendenza iniziale (cioè il valore iniziale della derivata) della risposta al gradino $y(t)$ del sistema definito dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2s^2-8}{(s+4)(2s+2)}$ vale:

   ○ $\dot{y}(0) = 0$
   ○ $\dot{y}(0) = 1$
   ○ $\dot{y}(0) = -1$
   ○ $\dot{y}(0) = \infty$

10. (**Biagiotti**) Dato il sistema meccanico di figura composto da masse, molle e smorzatori, quale sarà l'ordine della funzione di trasferimento tra ingresso $F(t)$ e uscita $v_2(t)$:



   ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5

11. (**Giarré**) Sia data la seguente equazione differenziale $\ddot{y}(t) + 3y(t) = u(t) + \dot{u}(t)$ dove $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ l'uscita, quali delle seguenti matrici descrivono lo stesso sistema nello spazio degli stati?

   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [1\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$

12. (**Giarré**) Linearizzando il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& \alpha x_1^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& \beta x_1 x_2(t) + x_2(t) \\ y(t) &=& x_1(t) \end{cases}$$

intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2017 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2\cos(3\,t) - 4t]\,e^{-t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{4} \\ 3\cos(2t - \frac{\pi}{2}) & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -4 & -7.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.75 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

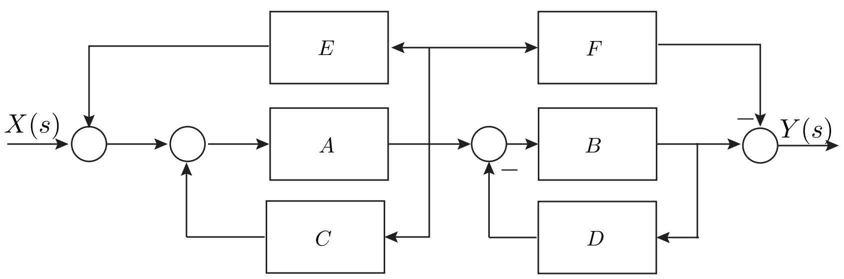
$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 17y(t) = 4\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 70x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

c) Dato il seguente schema a blocchi:



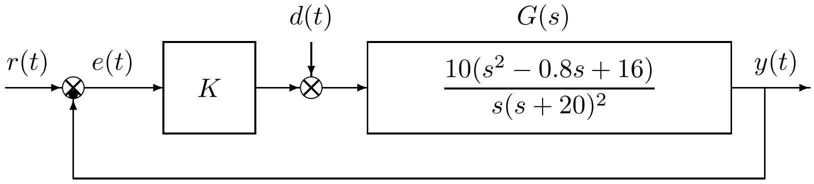
utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

d) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.02(15+s)(25s^2+s+1)}{(2+s)(1+0.05s)(s^2+0.04s+0.04)}$$

disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino di ampiezza 2, $u(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

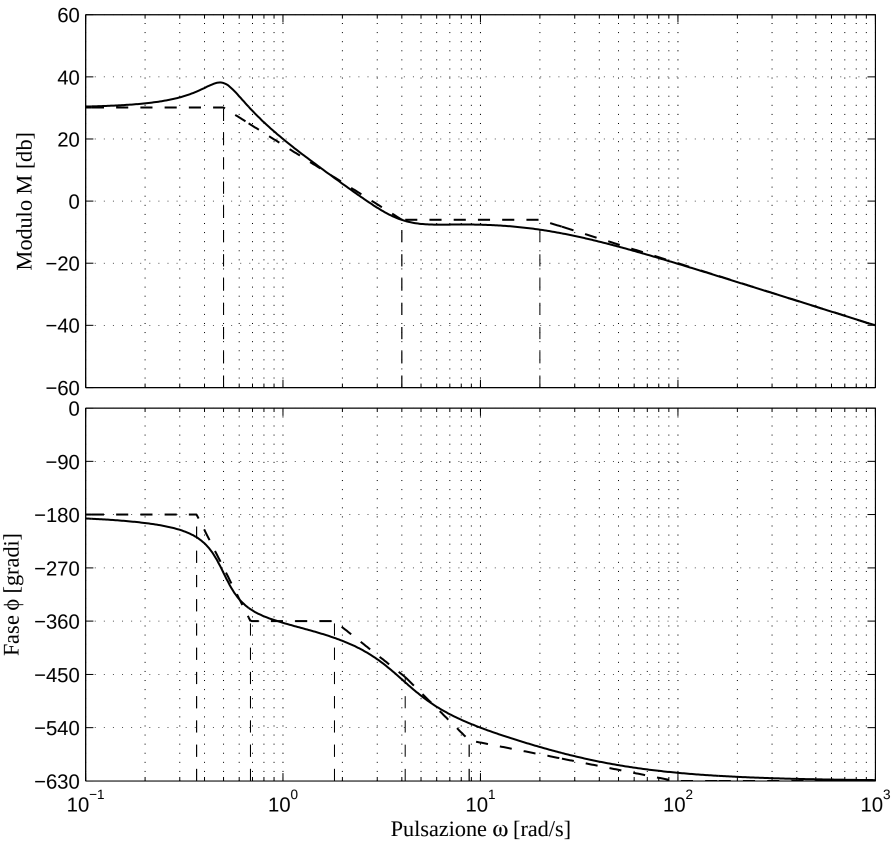
e.2) Posto $K = 20$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 2\sin(4t - \frac{\pi}{4})$ e il disturbo $d(t) = 12$.

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$ mostrato in figura.



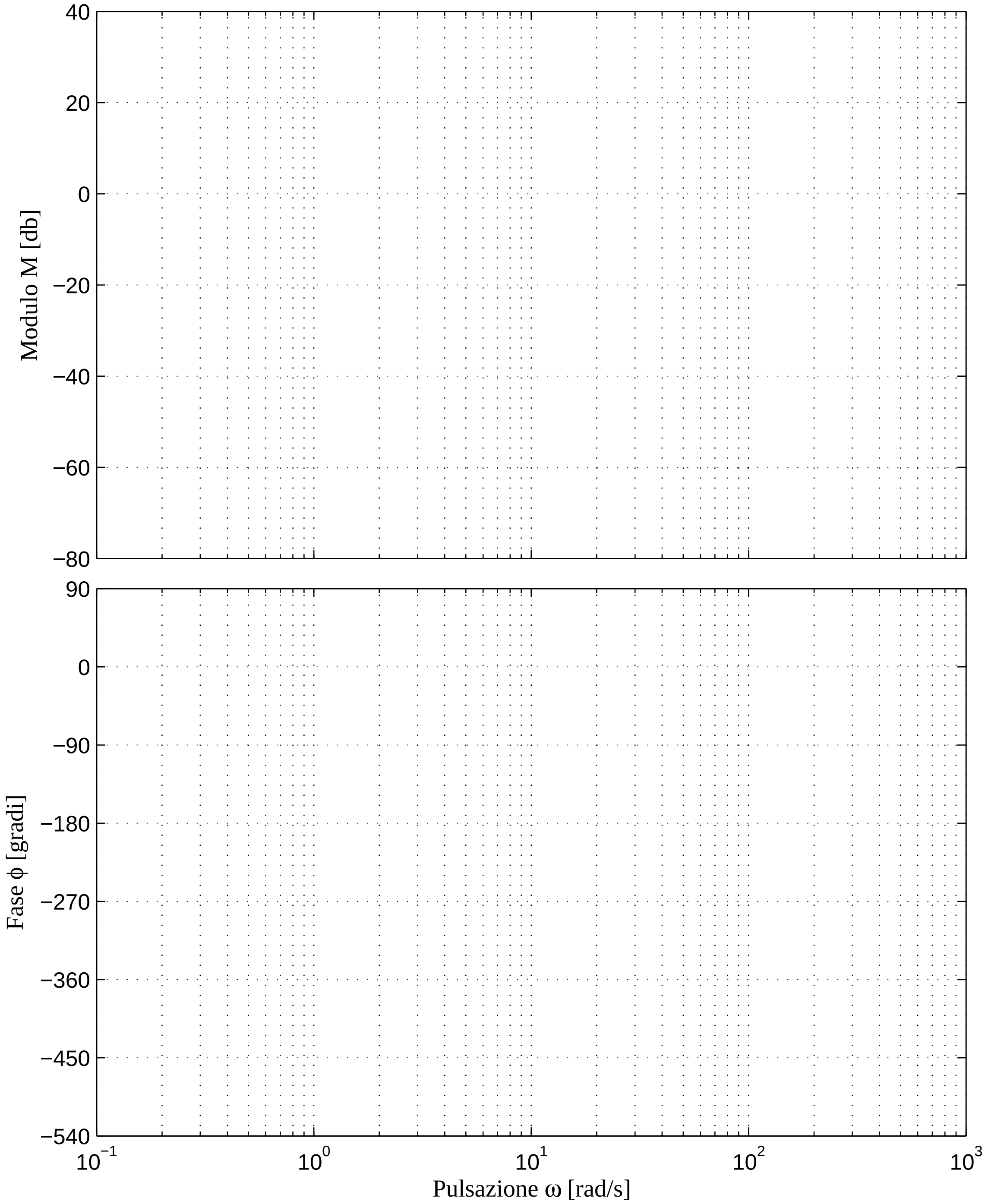
f.1) Ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 3 + 2\,\sin(t - \pi/2)\,.$$

Cognome: Nome: N. Matr.:

Diagrammi di Bode



Cognome: Nome: N. Matr.:

(Giarré: Diagramma di Nyquist) / (Biagiotti: Luogo delle radici)

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2017 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti (si considerino solo le domande numerate normalmente o che recano il nome del docente con cui si è seguito il corso), segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.
I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5.5 su 11), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Quali dei seguenti sistemi sono instabili?

   ⊗ $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+3)(2s+1)}$ ○ $G(s) = \dfrac{s-2}{(3s+1)(s^2+4)}$
   ○ $G(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2+1)(s+3)}$ ⊗ $G(s) = \dfrac{s+2}{(3s+1)(s^2-4)}$

2. Indicare quali dei seguenti stati sono di equilibrio per il sistema non lineare $\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \beta x_1 x_2(t) \end{cases}$

   ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ ⊗ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ○ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ ○ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

3. La risposta all'impulso del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s/3+1)}$ risulta

   ○ $g(t) = e^{-t} + e^{-\frac{1}{3}t}$ ⊗ $g(t) = \dfrac{3}{2}e^{-t} - \dfrac{3}{2}e^{-3t}$
   ○ $g(t) = \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{3}{2}e^{3t}$ ○ $g(t) = e^{-t} + e^{3t}$

4. Le due funzioni di trasferimento $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+0.2s+1}$ e $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+0.4s+4}$ sono caratterizzate da:

   ○ lo stesso guadagno statico
   ○ lo stesso tempo di assestamento nella riposta al gradino
   ⊗ la stessa sovraelongazione nella risposta al gradino
   ○ lo stesso periodo delle oscillazioni nella risposta al gradino

5. Ponendo la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{250}{s(s+1)(s+5)^2}$ in retroazione unitaria negativa (e posto che il sistema complessivo sia stabile) l'errore a regime per ingresso di riferimento a rampa $R(s) = \dfrac{4}{s^2}$ sarà

   ○ nullo
   ⊗ costante e pari a 0.4
   ○ costante e pari a 0.1
   ○ infinito

6. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado sono tutti positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica

   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

7. La funzione di risposta armonica permette di determinare:

   ○ la risposta libera di un sistema
   ⊗ il valore a regime della risposta forzata di un sistema con segnale di ingresso sinusoidale
   ○ il valore a regime della risposta forzata di un sistema con segnale di ingresso rampa

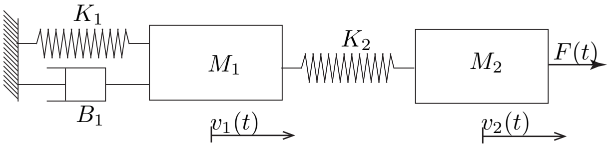
8. Il diagramma di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)} e^{-\tau s}$ con $0 < z_1 < z_2 < p_1 < p_2$, per $\omega \to \infty$ presenta una:

   ⊗ pendenza di -20 db/decade
   ○ pendenza di -40 db/decade
   ○ pendenza di -60 db/decade
   ○ pendenza di -80 db/decade

9. (**Biagiotti**) La pendenza iniziale (cioè il valore iniziale della derivata) della risposta al gradino $y(t)$ del sistema definito dalla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{2s^2 - 8}{(s+4)(2s+2)}$ vale:

   ○ $\dot{y}(0) = 0$
   ○ $\dot{y}(0) = 1$
   ○ $\dot{y}(0) = -1$
   ⊗ $\dot{y}(0) = \infty$

10. (**Biagiotti**) Dato il sistema meccanico di figura composto da masse, molle e smorzatori, quale sarà l'ordine della funzione di trasferimento tra ingresso $F(t)$ e uscita $v_2(t)$:



   ○ 1   ○ 2   ○ 3   ⊗ 4   ○ 5

11. (**Giarré**) Sia data la seguente equazione differenziale $\ddot{y}(t) + 3y(t) = u(t) + \dot{u}(t)$ dove $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ l'uscita, quali delle seguenti matrici descrivono lo stesso sistema nello spazio degli stati?

   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [1\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$
   ⊗ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 1]$

12. (**Giarré**) Linearizzando il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \beta x_1 x_2(t) + x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

intorno al punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 0$ si ottiene un sistema Lineare Tempo-Invariante caratterizzato dalle matrici

   ⊗ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0\ 1]$
   ○ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 0]$

Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Ho seguito il corso con Prof. Giarré ☐ Prof. Biagiotti ☐

Controlli Automatici - Parte A

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 6 novembre 2017 - Esercizi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti (gli studenti dovranno rispondere ai quesiti contrassegnati solo con lettere o col nome del docente di cui hanno seguito il corso più una lettera). I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (11 su 22), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [2\cos(3\,t) - 4t]\,e^{-t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{4} \\ 3\cos(2t - \frac{\pi}{2}) & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$X_1(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+9} - \frac{4}{(s+1)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{3s}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{4}s}$$

Giarré - b) Dato il sistema definito nello spazio degli stati come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &=& Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -4 & -7.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.75 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

b.1) Determinare la corrispondente funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$;

SOLUZIONE:

Calcolando $G(s) = B\,(sI_2 - A)^{-1}\,C + D$ si ottiene

$$G(s) = \frac{2s^2+11s+64}{s^2+4s+29}$$

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

SOLUZIONE:

La risposta all'impulso di $G(s)$ ovvero la sua antitrasformata di Laplace può essere ottenuta scomponendo $G(s)$ come

$$G(s) = 2 + \frac{6s+6}{s^2+4s+29} = 2 + 3\frac{(s+2)}{(s+2)^2+25}$$

dove la costante 2 dipende dal fatto che la funzione di trasferimento $G(s)$ ha grado relativo nullo. Pertanto, antitrasformando, risulta

$$y(t) = 2\delta(t) + 3e^{-2t}\cos(5t)$$

Biagiotti - b) Data l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 17y(t) = 4\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 70x(t)$$

dove $y(t)$ e $x(t)$ rappresentano rispettivamente il segnale di uscita e quello di ingresso:

b.1) Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente all'equazione differenziale data;

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{4s^2 + 10s + 70}{s^2 + 2s + 17}$$

b.2) Calcolare analiticamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

SOLUZIONE:
La risposta all'impulso di $G(s)$ ovvero la sua antitrasformata di Laplace può essere ottenuta scomponendo $G(s)$ come

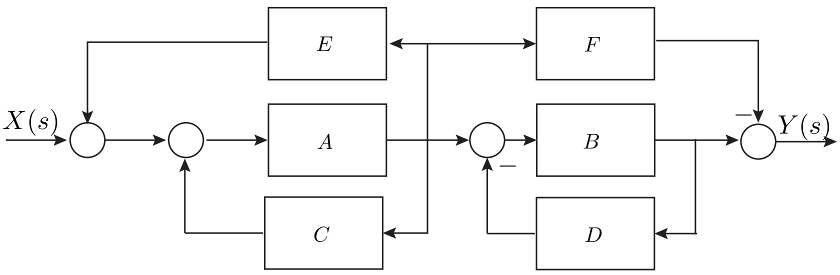
$$G(s) = 4 + \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 17} = 4 + 2\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 16}$$

dove la costante 2 dipende dal fatto che la funzione di trasferimento $G(s)$ ha grado relativo nullo. Pertanto, antitrasformando, risulta

$$g(t) = 4\delta(t) + 2e^{-t}\cos(4t)$$

Per un mero errore materiale l'equazione scritta nel testo del compito era $4\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 70y(t) = \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 17x(t)$ a cui corrisponde la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s^2+2s+17}{4s^2+10s+70}$ che antitrasformata dà luogo alla risposta all'impulso $g(t) = 0.25\delta(t) + 0.1252e^{-1.25t}\cos(3.9922t - 3.0791)$.

c) Dato il seguente schema a blocchi:



utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB - AF(1 + BD)}{1 - AC + BD - AE - ABCD - ABDE}$$

d) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.02(15 + s)(25s^2 + s + 1)}{(2 + s)(1 + 0.05s)(s^2 + 0.04s + 0.04)}$$

disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ a un gradino di ampiezza 2, $u(t) = 2$. Calcolare il valore a regime y_∞ dell'uscita $y(t)$ del sistema, stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del sistema e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata.

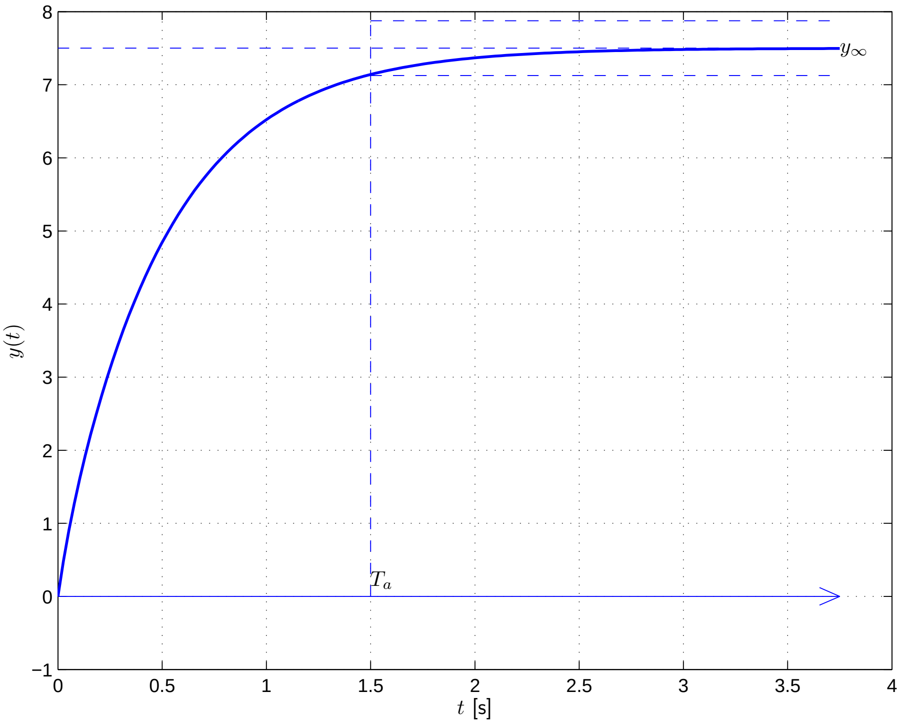
SOLUZIONE:
Riscrivendo la funzione nella forma poli-zeri

$$G(s) = \frac{10(s + 15)(s^2 + 0.04s + 0.04)}{(s + 20)(s + 2)(s^2 + 0.04s + 0.04)}$$

si evidenzia immediatamente come il polo dominante reale sia collocato in

$$p = -2$$

dal momento che la coppia di poli omplessi coniugati con parte reale $\sigma = -0.02$ si cancella con una coppia di zeri posti nella stessa posizione. Di conseguenza la risposta al gradino avrà un andamento aperiodico come mostrato in figura.



Il valore a regime dell'uscita per un gradino in ingresso di ampiezza $A = 2$ risulta

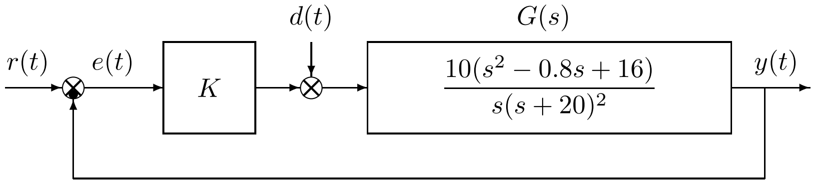
$$y_\infty = A\,G(0) = 7.5,$$

il tempo di assestamento T_a è

$$T_a = \frac{3}{\mathrm{Re}\{p\}} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ s},$$

mentre il periodo delle oscillazioni non è definito.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE:

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{10(s^2-0.8s+16)}{s(s+20)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (10K+40)s^2 + (400-8K)s^2 + 160K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccccc}
3 & 1 & 400-8K & & \\
2 & 10K+40 & 160K & \rightarrow & K > -\frac{40}{10} = -4 \\
1 & -80K^2+3520K+16000 & & \rightarrow & -4.1533 < K < 48.1533 \\
0 & 160K & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 48.1533 = K^\star$$

La pulsazione $\omega^\star$ corrispondente al valore limite $K^\star$ è:

$$\omega^\star = \sqrt{\frac{160K^\star}{10K^\star+40}} = 3.8435 \text{ rad/s}$$

e.2) Posto $K = 20$, calcolare l'errore a regime e_∞ quando sul sistema retroazionato agiscono contemporaneamente il segnale di riferimento $r(t) = 2\sin(4t - \frac{\pi}{4})$ e il disturbo $d(t) = 12$.

SOLUZIONE:

Dato che il sistema è lineare e soggetto quindi alla sovrapposizione degli effetti, l'errore $E(s)$, espresso mediante la trasformata di Laplace, risulterà:

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

dove $E_r(s)$ è l'errore dovuto al riferimento mentre $E_d(s)$ è l'errore dovuto al disturbo. I due errori possono essere calcolati come

$$E_r(s) = F_r(s)\,R(s) = \frac{1}{1+KG(s)}R(s) \tag{1}$$

$$E_d(s) = F_d(s)\,D(s) = \frac{-G(s)}{1+KG(s)}D(s) \tag{2}$$

essendo $R(s)$ e $D(s)$ le trasformate di laplace del riferimento $r(t)$ e del disturbo $d(t)$ rispettivamente. Facendo i calcoli risulta $F_r(s) = \dfrac{s^3+40s^2+400s}{s^3+240s^2+240s+3200}$ e $F_d(s) = \dfrac{-10s^2+8s-160}{s^3+240s^2+240s+3200}$.

Per calcolare l'errore causato dal riferimento $r(t)$, che è sinusoidale, è necessario utilizzare la funzione di risposta armonica. Pertanto

$$\begin{aligned}
e_{r,\infty}(t) &= 2|F_r(j4)|\sin\left(4\,t - \frac{\pi}{4} + \arg\{F_r(j4)\}\right) \\
&= 3.0224\sin(4\,t - 1.0109)
\end{aligned}$$

essendo $|F_r(j4)| = 1.5112$, $\arg\{F_r(j4)\} = -12.9178^o = -0.2255$ rad.

L'errore dovuto al disturbo costante $d(t)$ vale

$$e_{d,\infty} = \lim_{s\to 0} sF_d(s)\frac{12}{s} = \lim_{s\to 0} s\frac{-10s^2+8s-160}{s^3+240s^2+240s+3200}\;\frac{12}{s} = -0.6.$$

In conclusione

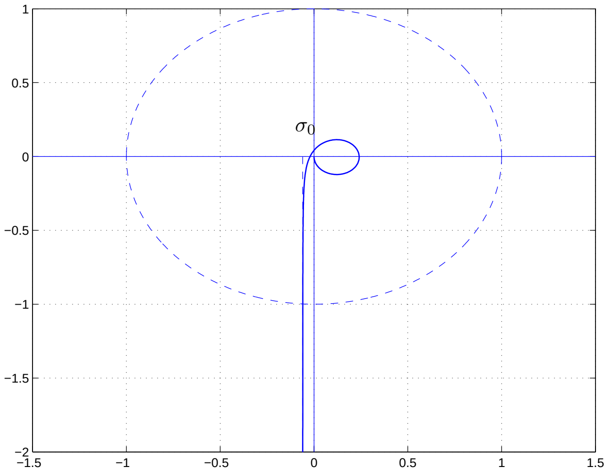
$$e_\infty = e_{r,\infty}(t) + e_{d\infty} = 3.0224\sin(4\,t - 1.0109) - 0.6$$

e.3) Tracciare (nello schema fornito in allegato) i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:
Vedi figura in fondo.

Giarré - e.4) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per valori positivi della pulsazione. Calcolare esattamente la posizione σ_0 di un eventuale asintoto, le eventuali intersezioni con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni.

SOLUZIONE:
Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in figura.



La funzione approssimante per $\omega \to 0$ è

$$G_0(s) = \frac{0.4}{s}$$

pertanto il diagramma parte all'infinito con fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$.
La funzione approssimante per $\omega \to \infty$ è

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s}$$

e quindi il diagramma giunge nell'origine con fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.
Il parametro Δ_τ vale

$$\Delta_\tau = -\frac{0.8}{16} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) = -0.15 < 0$$

pertanto il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
Il sistema è di tipo 1 pertanto esiste un asintoto verticale la cui ascissa è

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.4 \cdot (-0.15) = -0.06$$

Il parametro Δ_p vale

$$\Delta_p = 0.8 - (-20 - 20) = 40.8 > 0$$

pertanto il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale φ_∞.
Lo variazione di fase complessiva è

$$\Delta\varphi = -\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

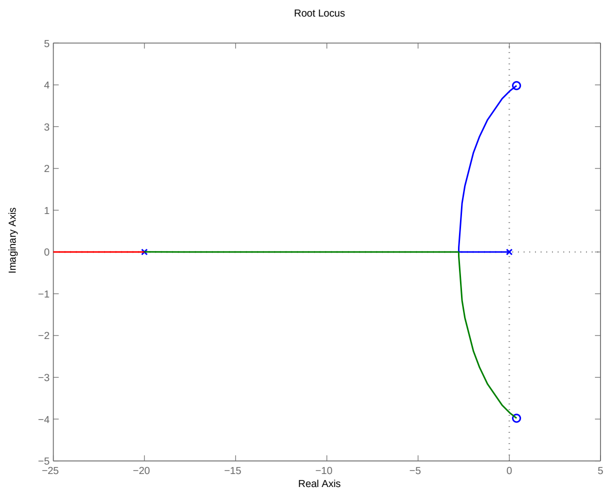
pari a un giro completo intorno all'origine. Esiste un'intersezione con l'asse reale che, in virtù dell'analisi svolta con Routh al primo punto, risulta all'ascissa

$$\sigma^* = -1/K^* = -0.0208.$$

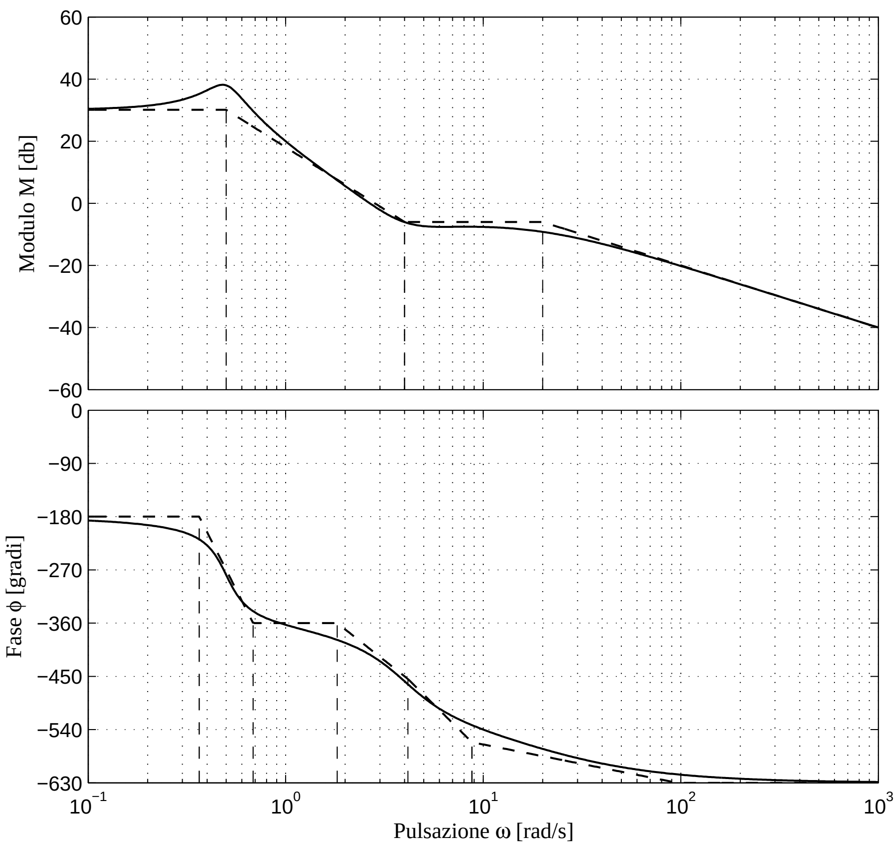
Biagiotti - e.4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare esattamente gli asintoti, il centro degli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K.

SOLUZIONE:

Dal momento che la costante di guadagno del sistema è positiva, per tracciare il luogo delle radici richiesto ($K > 0$) è necessario prendere in considerazione le regole per valori positiv del guadagno. Essendo 1 il grado relativo del sistema, ci sarà un solo asintoto disposto orizzontalmente lungo l'asse reale negativo ($\sigma_a = -40.8$). Dall'analisi svolta mediante il criterio di Routh, risulta che il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario in corrispondenza di $\pm j3.8435$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è riportato nella seguente figura.



f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$ mostrato in figura.



f.1) Ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

SOLUZIONE:

$$G(s) = \frac{-10(s^2 - 4s + 16)}{(s+20)(s^2 + 0.2s + 0.25)} = \frac{-32(0.0625s^2 - 0.25s + 1)}{(0.05s + 1)(4s^2 + 0.8s + 1)}$$

dove il valore $\mu = -32$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s) = \mu$ in corrispondenza di una qualunque pulsazione inferiore al primo punto di rottura (il segno $-$ dipende dal fatto che la fase iniziale $\varphi_0 = -180^o$ deriva dal solo contributo del guadagno negativo mentre non esistono poli nell'origine):

$$|G_0(s)| = |\mu| \simeq 30 \text{ db} \simeq 32 \qquad \rightarrow \qquad \mu \simeq -32.$$

In corrispondenza di $\omega = 0.5$ rad/s è presente una coppia di poli complessi coniugati (quindi con $\omega_n = 0.5$ rad/s) stabili il cui coefficiente di smorzamento vale:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2 \cdot 2.5} = 0.2.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 8$ db $\simeq 2.5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

In $\omega = 4$ rad/s è presente una coppia di zeri complessi coniugati (quindi con $\omega_n = 4$) instabili caratterizzati da un coefficiente di smorzamento $\delta = -0.5$ (dal momento che il grafico reale interseca quello asintotico in corrispondenza del punto di rottura in 4).

---

f.2) Valutare in maniera approssimata la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 3 + 2\,\sin(t - \pi/2)\,.$$

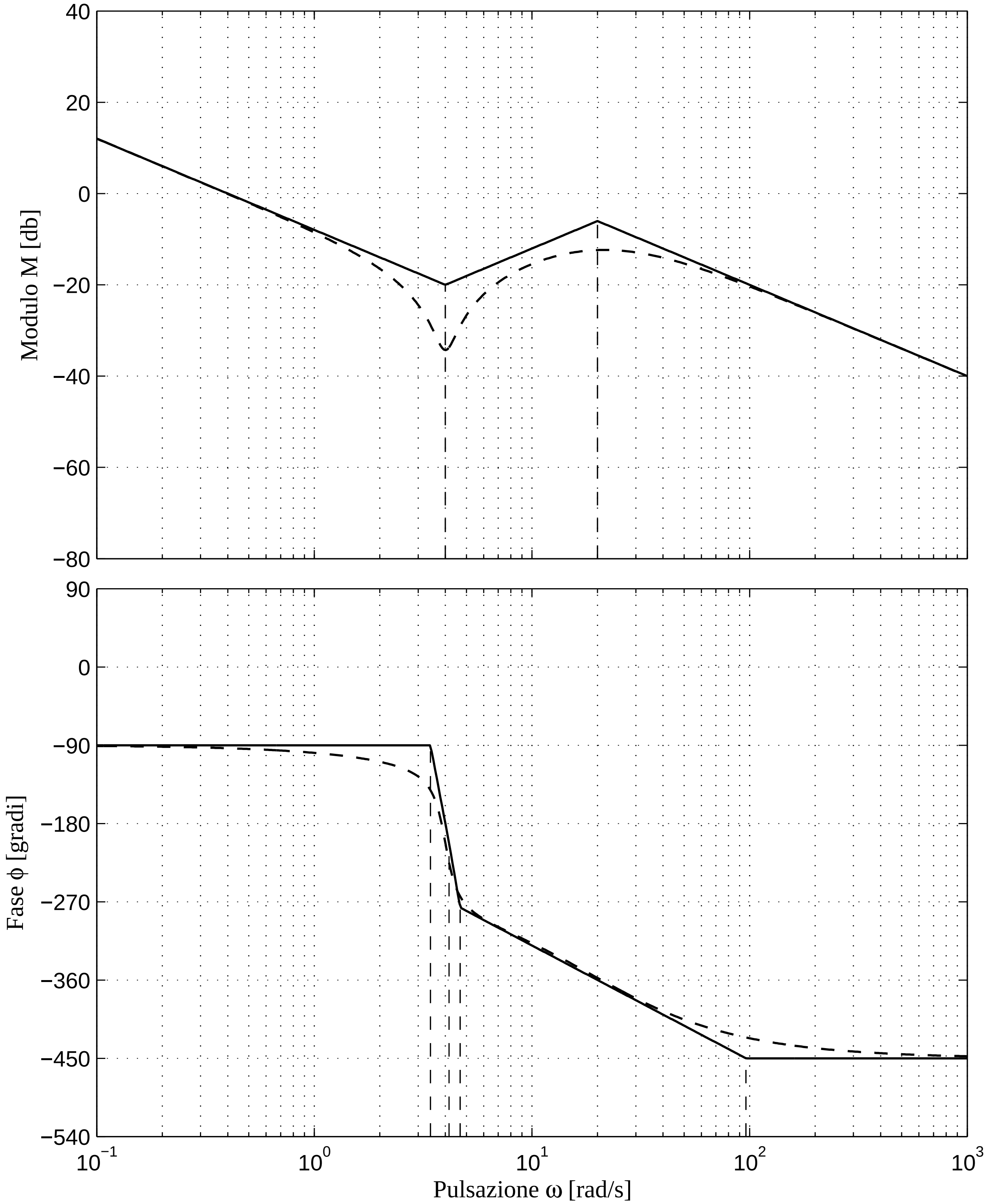
SOLUZIONE:

Leggendo il gudagno statico di $G(s)$ e il modulo e argomento di $G(j\omega)$ in $\omega = 1$ direttamente dai diagrammi di Bode si trova

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= \mu \cdot 3 + 2 \cdot |G(j1)| \sin(t - \pi/2 + \arg\{G(j1)\}) && (3) \\ &\approx -96 + 20 \sin(t - 1.62) && (4) \end{aligned}$$

Cognome: Nome: N. Matr.:

Diagrammi di Bode



Cognome: Nome: N. Matr.: □□□□□□

(Giarré: Diagramma di Nyquist) / (Biagiotti: Luogo delle radici)